理論の不完全性，決定不能性，分離不能性

倉橋太志 （神戸大学システム情報学研究科）
Albert Visser (Utrecht University)

日本数学会 2024 年度年会
2024 年 3 月 18 日 (月)

本研究の目的

- 第 1 不完全性定理に関わる諸概念の状況をよりクリアにする．
- 証明が与えられていない結果の証明を与える．

本発表は次の論文に基づく：

- **Kurahashi and Visser, Certified Σ_1-sentences. 投稿中. arXiv:2306.13049.**
- **Kurahashi and Visser, Pour-El's landscape. 投稿中. arXiv:2310.04814.**

また，第 2 回ロジック・ウィンタースクール (2023 年 12 月) において本発表の内容を詳しく解説した（ネット上に資料があります）．

第 1 不完全性定理

以降 T は無矛盾な RE 理論を表すとする．

定義

- T は本質的不完全 $\iff$ T の任意の無矛盾な RE 拡大理論が不完全．
- T は本質的決定不能 $\iff$ T の任意の無矛盾な拡大理論が決定不能．

第 1 不完全性定理

- 理論 PA は本質的不完全． (Gödel, 1931; Rosser, 1936)
- 理論 Q は本質的不完全． (Robinson, 1952)
- 理論 R は本質的不完全． (Tarski, Mostowski and Robinson, 1953)

事実

T は本質的不完全 $\iff$ T は本質的決定不能．

よってこれらの理論は本質的決定不能．

分離不能性

- 本質的不完全性・決定不能性を強めた概念の分析が古くから行われている．
- T において証明可能な文全体の集合を T_{p}，
  T において反証可能な文全体の集合を T_{r} とする．

定義

- T は**一様本質的不完全** $\iff$ T の無矛盾な **RE** 拡大理論たちの任意の **RE** 列 $\{U_i\}_{i\in\omega}$ に対して，文 φ が存在して，φ は全ての U_i において証明も反証もできない．
- T は**再帰的分離不能** $\iff$ $T_{\mathrm{p}} \subseteq X$ かつ $T_{\mathrm{r}} \cap X = \emptyset$ となる再帰的集合 X が存在しない．

再帰的分離不能ならば本質的決定不能．

定理

- R は一様本質的不完全． (**Mostowski, 1961**)
- R は再帰的分離不能． (**Grzegorczyk, Mostowski and Ryll-Nardzewski, 1958; Smullyan, 1958**)

定理 (Ehrenfeucht, 1961)

T は一様本質的不完全 $\iff$ T は再帰的分離不能．

実効版

インデックス $i \in \omega$ をもつ **RE** 集合を W_i で表すとする．

定義

- T は実効的本質的不完全 $\iff$ 計算可能関数 $f(x)$ が存在して，任意の $i \in \omega$ について，もし W_i が T の無矛盾な拡大理論であれば，$f(i)$ は W_i において証明も反証もできない文．
- T は本質的創造的 $\iff$ 計算可能関数 $f(x)$ が存在して，任意の $i \in \omega$ について，もし $T_{\mathsf{p}} \cap \mathsf{W}_i = \emptyset$ ならば $f(i) \notin T_{\mathsf{p}} \cup \mathsf{W}_i$．
- T は実効的分離不能 $\iff$ 計算可能関数 $f(x, y)$ が存在して，任意の $i, j \in \omega$ について，もし $T_{\mathsf{p}} \subseteq \mathsf{W}_i$ かつ $T_{\mathsf{r}} \subseteq \mathsf{W}_j$ かつ $\mathsf{W}_i \cap \mathsf{W}_j = \emptyset$ ならば $f(i, j) \notin \mathsf{W}_i \cup \mathsf{W}_j$．

創造性は決定不能性の実効版．

定理 (Tarski, Mostowski, and Robinson, 1953)

- R は実効的本質的不完全．(**Tarski, Mostowski and Robinson, 1953**)
- R は実効的分離不能かつ本質的創造的．(**Smullyan, 1960**)

定理 (Pour-El, 1968)

T は実効的本質的不完全 $\iff$ T は本質的創造的 $\iff$ T は実効的分離不能．

本質的遺伝的決定不能性

- PA と R は有限公理化可能ではない．
- Q は有限公理化された理論．

定義

T は本質的遺伝的決定不能 :$\iff$ T と無矛盾な理論が全て決定不能．

事実 (Tarski, Mostowski and Robinson, 1953)

T が有限公理化されていて本質的決定不能ならば T は本質的遺伝的決定不能．

系 (Tarski, Mostowski and Robinson, 1953)

Q は本質的遺伝的決定不能．

系 (Church, 1936)

算術の言語の述語論理は決定不能．

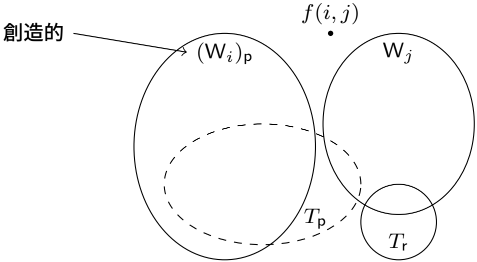
実効的本質的遺伝的創造性

問

本質的遺伝的決定不能性の実効版について Pour-El の定理に類似する定理は示せるか？

定義

T は実効的本質的遺伝的創造的 :$\iff$ 計算可能関数 $f(x, y)$ が存在して，任意の $i, j \in \omega$ について，もし $T + \mathsf{W}_i$ が無矛盾で $(\mathsf{W}_i)_\mathsf{p} \cap \mathsf{W}_j = \emptyset$ ならば，$f(i, j) \notin (\mathsf{W}_i)_\mathsf{p} \cup \mathsf{W}_j$.

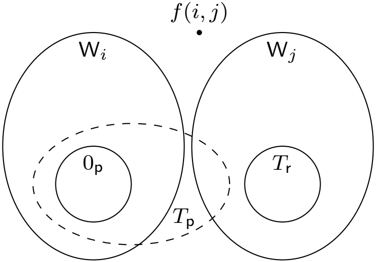


強実効的分離不能性

0_p を述語論理で証明可能な文全体の集合とする．

定義

T は強実効的分離不能 $\iff$ 計算可能関数 $f(x,y)$ が存在して，
任意の $i,j \in \omega$ について，もし $0_\mathsf{p} \subseteq \mathsf{W}_i$ かつ $T_\mathsf{r} \subseteq \mathsf{W}_j$ かつ $\mathsf{W}_i \cap \mathsf{W}_j = \emptyset$ ならば $f(i,j) \notin \mathsf{W}_i \cup \mathsf{W}_j$．



主定理 1

定理 (Pour-El, 1968)【再掲】

T は実効的本質的不完全 $\iff$ T は本質的創造的 $\iff$ T は実効的分離不能．

Pour-El の定理のアナロジーが成立する．

主定理 1 (K. and Visser)

T は実効的本質的遺伝的創造的 $\iff$ T は強実効的分離不能．

Cobham の定理

- R は Q の真部分理論で，しかも有限公理化可能ではない．
- にも関わらず，本質的遺伝的決定不能．

定理 (Cobham, unpublished, 1957?)

R は本質的遺伝的決定不能．

- この結果は Vaught (1962) において（証明なしで）紹介されているが，しかしそのオリジナルの証明は残念ながら残されていない．
- Cobham の定理の証明は Visser (2017) において与えられている．

Vaught の 2 つの定理

定理 (Vaught, 1962)

1. 理論 U が **RE** でありかつ $\mathsf{R} + U$ が無矛盾ならば，有限 $\mathcal{L}_A$-理論 S が存在して，$S \vdash \mathsf{R}$ かつ $S + U$ は無矛盾．
2. R は強実効的分離不能．

- **Vaught の 2 つの定理はいずれも Cobham の定理より強いが，定理 1 の証明は書かれておらず，定理 2 は有限モデル理論における Trakhtenbrot の定理 (1953) を利用しており，直接的ではない．**
- **Visser (2017) による Cobham の定理の証明は，これら Vaught の 2 つの定理の証明に適用できない．**

Vaught の 2 つの定理の直接的な証明を与えたい．

ここで Vaught の定理 1 の実効版に注目する．

定義 (実効的有限拡大性)

理論 T は実効的有限拡大性をもつ $\iff$ 計算可能関数 $f(x)$ が存在して，任意の $i \in \omega$ について，もし $T + \mathsf{W}_i$ が無矛盾ならば，$f(i) \vdash T$ かつ $f(i) + \mathsf{W}_i$ は無矛盾．

主定理 2

Pour-El の定理と主定理 1 を用いて次が示せる．

命題

実効的有限拡大性をもち実効的本質的不完全な理論は強実効的分離不能．

R について

実効的有限拡大性 & 実効的本質的不完全（既知） $\Longrightarrow$ 有限拡大性（**Vaught 1**）& 本質的決定不能

$\Downarrow$ 命題（左）　　　$\Downarrow$（右）

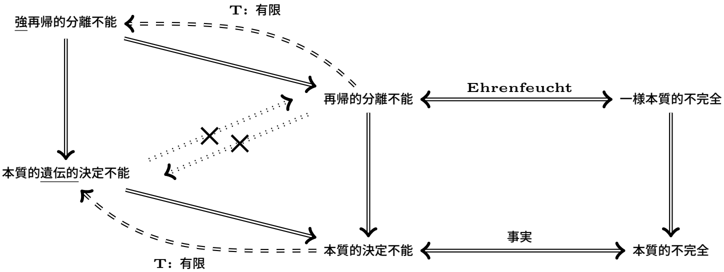
強実効的分離不能（**Vaught 2**） $\longrightarrow$ 本質的遺伝的決定不能（**Cobham**）

つまり次の定理から，Vaught の 2 つの定理と Cobham の定理の別証明が得られる．

主定理 2 (K. and Visser)

R は実効的有限拡大性をもつ．

実効化されていない諸性質の関係



実効化された諸性質の関係