

証明可能性 - 強制様相論理 PF について

倉橋 太志

神戸大学システム情報学研究科

高瀬 理人 (神戸大学 D2) との共同研究

第 58 回 MLG 数理論理学研究集会

東北大学

2024 年 2 月 16 日

概要

概要

- 証明可能性の様相論理 GL (Solovay の定理, 1976)
 $\Box_p \varphi \iff \text{“}\varphi \text{ は証明可能”}$
- 強制様相論理 S4.2 (Hamkins and Löwe, 2008)
 $\Box_f \varphi \iff \text{“}\varphi \text{ は全ての強制拡大で真”}$
- $\Box_p$ と $\Box_f$ は無関係ではなく、これらの関係を様相論理の観点から明らかにしたい.
- $\Box_p$ と $\Box_f$ を同時に扱う 2 重様相論理 PF を導入し、これが求める論理であることを示した.

T. Kurahashi and R. Takase

The Modal Logic of Provability and Forcing

arXiv:2311.00581

- 1 証明可能性論理 GL
- 2 強制様相論理 S4.2
- 3 証明可能性 - 強制様相論理 PF
- 4 論理 PF^ω

証明可能性述語

$\mathcal{L}_\in = \{\in\}$: 集合論の言語

不完全性定理の証明において, “ x は ZFC において証明可能” を表す論理式 $\text{Pr}_{\text{ZFC}}(x)$ (証明可能性述語) で, 次の導出可能性条件を満たすものを作ることが重要であった:

導出可能性条件

任意の $\mathcal{L}_\in$ -文 φ, ψ について,

D1: $\text{ZFC} \vdash \varphi \Rightarrow \text{ZFC} \vdash \text{Pr}_{\text{ZFC}}(\ulcorner \varphi \urcorner)$

D2: $\text{ZFC} \vdash \text{Pr}_{\text{ZFC}}(\ulcorner \varphi \rightarrow \psi \urcorner) \rightarrow (\text{Pr}_{\text{ZFC}}(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_{\text{ZFC}}(\ulcorner \psi \urcorner))$

D3: $\text{ZFC} \vdash \text{Pr}_{\text{ZFC}}(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_{\text{ZFC}}(\ulcorner \text{Pr}_{\text{ZFC}}(\ulcorner \varphi \urcorner) \urcorner)$

定理 (Löb, 1955; Macintyre and Simmons, 1973)

- $\text{ZFC} \vdash \text{Pr}_{\text{ZFC}}(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \varphi \Rightarrow \text{ZFC} \vdash \varphi$.
- $\text{ZFC} \vdash \text{Pr}_{\text{ZFC}}(\ulcorner \text{Pr}_{\text{ZFC}}(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_{\text{ZFC}}(\ulcorner \varphi \urcorner)$.

Löb の定理において φ を $\exists x(x \neq x)$ とすると, 第 2 不完全性定理が得られる.

証明可能性述語と様相論理

こうした状況は様相論理と相性が良さそう。

$\text{Pr}_{\text{ZFC}}(\ulcorner \varphi \urcorner)$ を $\blacksquare_p \varphi$ とかけば

- D1 は規則 $\frac{\varphi}{\blacksquare_p \varphi}$
- D2 は $\blacksquare_p(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\blacksquare_p \varphi \rightarrow \blacksquare_p \psi)$
- D3 は $\blacksquare_p \varphi \rightarrow \blacksquare_p \blacksquare_p \varphi$
- Löb の定理は $\blacksquare_p(\blacksquare_p \varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \blacksquare_p \varphi$

証明可能性述語の性質を様相論理を用いて分析したい。

様相論理 GL

様相命題論理の言語 $\mathcal{L}_p$ は古典命題論理の言語に 1 変数結合子 $\Box_p$ を加えたもの。
 $\Diamond_p$ を $\neg\Box_p\neg$ の略記とする。

様相論理 GL の公理と推論規則

公理 1 恒真式

公理 2 $\Box_p(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box_p A \rightarrow \Box_p B)$

公理 3 $\Box_p A \rightarrow \Box_p \Box_p A$.

公理 4 $\Box_p(\Box_p A \rightarrow A) \rightarrow \Box_p A$

規則 モダス・ポネンス $\frac{A \quad A \rightarrow B}{B}$ とネセシテーション $\frac{A}{\Box_p A}$

変換

$\mathcal{L}_p$ -論理式と $\mathcal{L}_\in$ -文の間に正確な対応を与える.

変換

命題変数から $\mathcal{L}_\in$ -文への写像 g を**変換**という.

各変換 g は $\mathcal{L}_p$ -論理式から $\mathcal{L}_\in$ -文への写像 g_p に次で拡張できる:

- $g_p(p)$ は $g(p)$
- $g_p(\perp)$ は $\exists x(x \neq x)$
- $g_p(\neg A)$ は $\neg g_p(A)$
- $g_p(A \circ B)$ は $g_p(A) \circ g_p(B)$ (ただし $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$)
- $g_p(\Box_p A)$ は $\blacksquare_p g_p(A)$ つまり $\text{Pr}_{\text{ZFC}}(\ulcorner g_p(A) \urcorner)$

命題

任意の $\mathcal{L}_p$ -論理式 A について,

$\text{GL} \vdash A \Rightarrow \forall g: \text{変換} (\text{ZFC} \vdash g_p(A)).$

実は逆も成立するが, それを示すためには準備が必要.

GL の有限フレーム性

命題

任意の Kripke フレーム $(W, \sqsubset)$ について、以下は同値：

- ① GL の全ての公理（定理）が $(W, \sqsubset)$ で valid.
- ② $\sqsubset$ は推移的かつ $\sqsubset$ -無限上昇列はない.

このような Kripke フレームを **GL-フレーム**という.

定理 (GL の Kripke 完全性と有限フレーム性)

任意の $\mathcal{L}_p$ -論理式 A について、以下は同値：

- ① $GL \vdash A$.
- ② A は全ての GL-フレームで valid.
- ③ A は全ての有限 GL-フレームで valid.

有限 GL-フレームの埋め込み

定義

- $\mathcal{L}_\in$ -論理式 φ に現れる $\forall x$ と $\exists x$ を全てそれぞれ $\forall x \in \omega$ と $\exists x \in \omega$ に書き換えることで得られる $\mathcal{L}_\in$ -論理式を φ^ω とかく。
- φ^ω という形の $\mathcal{L}_\in$ -論理式を**算術的**な $\mathcal{L}_\in$ -論理式という。
- 例えば証明可能性述語 $\text{Pr}_{\text{ZFC}}(x)$ は算術的な $\mathcal{L}_\in$ -論理式でとれる。
- Solovay の定理の証明の鍵となるのは、有限 GL-フレームの ZFC への埋め込み。

定理 (Solovay, 1976)

ルート r を持つ有限 GL-フレーム $(W, \sqsubset)$ に対して、算術的 $\mathcal{L}_\in$ -文の族 $\{\lambda_i\}_{i \in W}$ があって、次が成り立つ：

- $i \neq j \Rightarrow \text{ZFC} \vdash \lambda_i \rightarrow \neg \lambda_j$
- $\text{ZFC} \vdash \bigvee_{k \in W} \lambda_k$
- $i \neq r \Rightarrow \text{ZFC} \vdash \lambda_i \rightarrow \blacksquare_p \bigvee_{i \sqsubset k} \lambda_k$
- $i \sqsubset j \Rightarrow \text{ZFC} \vdash \lambda_i \rightarrow \blacklozenge_p \lambda_j$

$\{\lambda_i\}_{i \in W}$ を $(W, \sqsubset)$ の **Solovay 文**という。

Solovay の定理

定義

$\mathcal{L}_\in$ -理論 T が**算術的 Σ_1 -健全**

: $\iff$ 任意の Σ_1 $\mathcal{L}_\in$ -文 φ について, $T \vdash \varphi^\omega \Rightarrow \omega^V \models \varphi$.

定理 (Solovay, 1976)

ZFC が算術的 Σ_1 -健全ならば, 任意の $\mathcal{L}_p$ -論理式 A について, 以下は同値:

- ① $GL \vdash A$.
- ② 全ての変換 g について, $ZFC \vdash g_p(A)$.

証明の概略.

(2 $\Rightarrow$ 1): 対偶を示す.

$GL \not\vdash A$ とする.

有限 GL-フレームに基づくモデル $(W, \sqsubset, \models)$ と $j \in W$ があって $j \not\models A$.

これに新たなルート r を追加したフレームの Solovay 文 $\{\lambda_i\}_{i \in W \cup \{r\}}$ をとる.

モデルと Solovay 文に基づき変換 g を作ると, $ZFC \vdash \lambda_j \rightarrow \neg g_p(A)$ が示せる.

ZFC が算術的 Σ_1 -健全なら $ZFC \not\vdash \neg \lambda_j$ なので $ZFC \not\vdash g_p(A)$. □

① 証明可能性論理 GL

② 強制様相論理 S4.2

③ 証明可能性 - 強制様相論理 PF

④ 論理 PF^ω

強制拡大と様相論理

強制拡大と様相論理

- ZFC のモデルたちの上の強制拡大に基づく関係構造を見るための様相演算子は
 $\Box\varphi \iff \text{“}\varphi \text{ は任意の強制拡大で真”}$
- これは強制関係を用いて $\mathcal{L}_\in$ -文で次のように書ける：
 $\Box_f\varphi \equiv \forall P (1_P \Vdash_P \varphi)$
- $\neg\Box_f\neg\varphi$ を $\Diamond_f\varphi$ と書くと次が成立：
 $\text{ZFC} \vdash \Diamond_f\varphi \leftrightarrow \exists P (1_P \Vdash_P \varphi)$

命題

任意の $\mathcal{L}_\in$ -文 φ, ψ について,

- $\text{ZFC} \vdash \varphi \Rightarrow \text{ZFC} \vdash \Box_f\varphi$
- $\text{ZFC} \vdash \Box_f(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box_f\varphi \rightarrow \Box_f\psi)$
- $\text{ZFC} \vdash \Box_f\varphi \rightarrow \varphi$
- $\text{ZFC} \vdash \Box_f\varphi \rightarrow \Box_f\Box_f\varphi$
- $\text{ZFC} \vdash \Diamond_f\Box_f\varphi \rightarrow \Box_f\Diamond_f\varphi$

様相論理 S4.2

様相命題論理の言語 $\mathcal{L}_f$ は古典命題論理の言語に 1 変数結合子 $\Box_f$ を加えたもの。
 $\Diamond_f$ を $\neg\Box_f\neg$ の略記とする。

様相論理 S4.2 の公理と推論規則

公理 1 恒真式

公理 2 $\Box_f(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box_f A \rightarrow \Box_f B)$

公理 3 $\Box_f A \rightarrow A$.

公理 4 $\Box_f A \rightarrow \Box_f \Box_f A$.

公理 5 $\Diamond_f \Box_f A \rightarrow \Box_f \Diamond_f A$

規則 モダス・ポネンス $\frac{A \quad A \rightarrow B}{B}$ とネセシテーション $\frac{A}{\Box_f A}$

変換

各変換 g は $\mathcal{L}_f$ -論理式から $\mathcal{L}_\in$ -文への写像 g_f に次で拡張できる：

- $g_f(p)$ は $g(p)$
- $g_f(\perp)$ は $\exists x(x \neq x)$
- $g_f(\neg A)$ は $\neg g_f(A)$
- $g_f(A \circ B)$ は $g_f(A) \circ g_f(B)$ (ただし $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$)
- $g_f(\Box_f A)$ は $\blacksquare_f g_f(A)$ つまり $\forall \mathbb{P} (1_{\mathbb{P}} \Vdash_{\mathbb{P}} g_f(A))$

命題

任意の $\mathcal{L}_f$ -論理式 A について,

S4.2 $\vdash A \Rightarrow \forall g$: 変換 ($\text{ZFC} \vdash g_f(A)$).

Kripke フレームと Kripke モデル

Kripke フレームにおいて $\Box_p$ に対応する二項関係は $\sqsubset$ と書いたが,
 $\Box_f$ に対応するものは $\preceq$ と書くことにする.

命題

任意の Kripke フレーム $(W, \preceq)$ について, 以下は同値:

- ① S4.2 の全ての公理 (定理) が $(W, \preceq)$ で valid.
- ② $\preceq$ は反射的かつ推移的かつ upward directed
 $x \preceq y \ \& \ x \preceq z \Rightarrow \exists w (y \preceq w \ \& \ z \preceq w)$.

このような Kripke フレームを **S4.2-フレーム**という.

S4.2 の有限フレーム性

S4.2-フレーム $(W, \preceq)$ において,

$$x \approx y : \iff x \preceq y \ \& \ y \preceq x$$

と定めると, これは W 上の同値関係.

定義

S4.2-フレーム $(W, \preceq)$ が**前ブール代数 (PBA)** : $\iff (W / \approx, \preceq)$ はブール代数.

定理 (Hamkins and Löwe, 2008)

任意の $\mathcal{L}_f$ -論理式 A について, 以下は同値:

- ① S4.2 $\vdash A$.
- ② A は全ての S4.2-フレームで valid.
- ③ A は全ての有限 S4.2-フレームで valid.
- ④ A は全ての有限 PBA で valid.

Hamkins and Löwe の定理

定理 (Hamkins and Löwe, 2008)

有限 PBA $(W, \preceq)$ に対して,

$\mathcal{L}_\in$ -文の族 $\{\xi_a\}_{a \in W}$ があって, 次が成り立つ:

- $a \neq b \Rightarrow \text{ZFC} \vdash \xi_a \rightarrow \neg \xi_b$
- $\text{ZFC} \vdash \bigvee_{c \in W} \xi_c$
- $\text{ZFC} \vdash \xi_a \rightarrow \blacksquare_f \bigvee_{a \preceq c} \xi_c$
- $a \preceq b \Rightarrow \text{ZFC} \vdash \xi_a \rightarrow \blacklozenge_f \xi_b$

$\{\xi_a\}_{a \in W}$ を $(W, \preceq)$ の **HL 文** といい, これらを用いて次が証明された.

定理 (Hamkins and Löwe, 2008)

ZFC が無矛盾ならば, 任意の $\mathcal{L}_f$ -論理式 A について, 以下は同値:

- ① $\text{S4.2} \vdash A$.
- ② 全ての変換 g について, $\text{ZFC} \vdash g_f(A)$.

- 1 証明可能性論理 GL
- 2 強制様相論理 S4.2
- 3 証明可能性 - 強制様相論理 PF
- 4 論理 PF^ω

証明可能性 - 強制様相論理 PF

- Hamkins and Löwe は論文の冒頭において Solovay の定理について言及しているが、証明可能性論理と強制様相論理は別の文脈における結果という位置づけ。
- しかし、 $\blacksquare_p$ と $\blacksquare_f$ はもちろん無関係ではない。

$\text{ZFC} \vdash \varphi \Rightarrow \text{ZFC} \vdash \blacksquare_f \varphi$ は形式化できる。

命題

$\text{ZFC} \vdash \blacksquare_p \varphi \rightarrow \blacksquare_p \blacksquare_f \varphi$ 。

強制拡大で ω は不変で、 Δ_0 論理式は絶対的なので次が分かる。

命題

φ が算術的なら $\text{ZFC} \vdash \varphi \rightarrow \blacksquare_f \varphi$, 特に

- $\text{ZFC} \vdash \blacksquare_p \varphi \rightarrow \blacksquare_f \blacksquare_p \varphi$
- $\text{ZFC} \vdash \blacklozenge_p \varphi \rightarrow \blacksquare_f \blacklozenge_p \varphi$

$\blacksquare_p$ と $\blacksquare_f$ を統一的に扱う 2 重様相論理を作りたい！

様相論理 S4.2

様相命題論理の言語 $\mathcal{L}_{pf}$ は古典命題論理の言語に 1 変数結合子 $\Box_p$ と $\Box_f$ を加えたもの。

様相論理 PF の公理と推論規則

公理 1 恒真式

公理 2 $\Box_p$ に関する GL の公理

公理 3 $\Box_f$ に関する S4.2 の公理

公理 4 $\Box_p A \rightarrow \Box_f \Box_p A$

公理 5 $\Diamond_p A \rightarrow \Box_f \Diamond_p A$

公理 6 $\Box_p A \rightarrow \Box_p \Box_f A$

規則 モダス・ポネンス $\frac{A \quad A \rightarrow B}{B}$ とネセシテーション $\frac{A}{\Box_p A}$ と $\frac{A}{\Box_f A}$

変換

各変換 g は $\mathcal{L}_{\text{pf}}$ -論理式から $\mathcal{L}_{\in}$ -文への写像 g_{pf} に次で拡張できる：

- $g_{\text{pf}}(p)$ は $g(p)$
- $g_{\text{pf}}(\perp)$ は $\exists x(x \neq x)$
- $g_{\text{pf}}(\neg A)$ は $\neg g_{\text{pf}}(A)$
- $g_{\text{pf}}(A \circ B)$ は $g_{\text{pf}}(A) \circ g_{\text{pf}}(B)$ (ただし $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$)
- $g_{\text{pf}}(\Box_p A)$ は $\blacksquare_p g_{\text{pf}}(A)$ つまり $\text{Pr}_{\text{ZFC}}(\ulcorner g_{\text{pf}}(A) \urcorner)$
- $g_{\text{pf}}(\Box_f A)$ は $\blacksquare_f g_{\text{pf}}(A)$ つまり $\forall \mathbb{P} (\mathbb{1}_{\mathbb{P}} \Vdash_{\mathbb{P}} g_{\text{pf}}(A))$

命題

任意の $\mathcal{L}_{\text{pf}}$ -論理式 A について,
 $\text{PF} \vdash A \Rightarrow \forall g: \text{変換}, \text{ZFC} \vdash g_{\text{pf}}(A).$

PF-フレーム

Kripke フレームは、 $\Box_p$ と $\Box_f$ それぞれに対応する二項関係 $\sqsubset$ と $\preceq$ をもつ。

命題

任意の Kripke フレーム $(W, \sqsubset, \preceq)$ について、以下は同値：

- ① PF の全ての公理（定理）が $(W, \sqsubset, \preceq)$ で valid.
- ② $(W, \sqsubset)$ は GL-フレーム， $(W, \preceq)$ は S4.2-フレームで、次の 3 条件を満たす：
 - $x \preceq y \sqsubset z \Rightarrow x \sqsubset z$
 - $x \preceq y \ \& \ x \sqsubset z \Rightarrow y \sqsubset z$
 - $x \sqsubset y \preceq z \Rightarrow x \sqsubset z$

このような Kripke フレームを **PF-フレーム**という。

この 3 条件は分かりにくいので、よい形の PF-フレームを扱うことにする。

Nice PF-フレーム

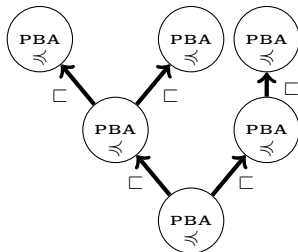
定義

Kripke フレーム $(W, \sqsubset, \preceq)$ が **nice PF-フレーム**

: $\iff$ 互いに素な集合族 $\{\mathcal{C}_i\}_{i \in I}$ があって,

- ① $W = \bigcup_{i \in I} \mathcal{C}_i$
- ② 各 $(\mathcal{C}_i, \preceq)$ は PBA
- ③ $(I, \sqsubset)$ が well-defined, つまり
 $x_0, x_1 \in \mathcal{C}_i \ \& \ y_0, y_1 \in \mathcal{C}_j \Rightarrow (x_0 \sqsubset y_0 \iff x_1 \sqsubset y_1).$
- ④ $(I, \sqsubset)$ は GL-フレーム

つまり, 内側が $\preceq$ で外側が $\sqsubset$ の二層構造のフレーム.



$$x \preceq y \sqsubset z \Rightarrow x \sqsubset z$$

$$x \preceq y \ \& \ x \sqsubset z \Rightarrow y \sqsubset z$$

$$x \sqsubset y \preceq z \Rightarrow x \sqsubset z$$

PF の有限フレーム性

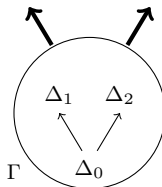
定理 (K. and Takase)

任意の $\mathcal{L}_{pf}$ -論理式 A について、以下は同値：

- ① $PF \vdash A$.
- ② A は全ての PF-フレームで valid.
- ③ A は全ての有限 nice PF-フレーム で valid.

証明の気持ち

- GL と S4.2 それぞれの有限フレーム性の証明を混ぜる（ただし相性が良くない）.
- 極大無矛盾集合の組 (Γ, Δ) について、まずは Δ について S4.2 のフィルトレーションをとり、 Γ について GL のフィルトレーションをとる気持ち.



主定理 1

有限 nice PF-フレーム $(W, \sqsubset, \preceq)$ について

- 各 PBA $(C_i, \preceq)$ に対応する HL 文 $\{\xi_a^{C_i}\}_{a \in C_i}$
- GL-フレーム $(I, \sqsubset)$ に対応する Solovay 文 $\{\lambda_i\}_{i \in I}$

が取れるので、あとは Solovay の定理の証明と Hamkins and Löwe の定理の証明を組み合わせて次が証明できた。

定理 (K. and Takase)

ZFC が算術的 Σ_1 -健全ならば、任意の $\mathcal{L}_{\text{pf}}$ -論理式 A について、以下は同値：

- ① $\text{PF} \vdash A$.
- ② 全ての変換 g について、 $\text{ZFC} \vdash g_{\text{pf}}(A)$.

- 1 証明可能性論理 GL
- 2 強制様相論理 S4.2
- 3 証明可能性 - 強制様相論理 PF
- 4 論理 PF^ω

論理 S

- GL は $\blacksquare_p$ に関して「ZFC で証明できる」原理に関する様相論理.
- Solovay は $\blacksquare_p$ に関して「真である」原理に関する様相論理の公理化も行なった.

様相論理 S の公理と推論規則

公理 1 GL の定理

公理 2 $\Box_p A \rightarrow A$ 規則 モダス・ポネンス
$$\frac{A \quad A \rightarrow B}{B}$$

定義

ZFC のモデル M が ω -モデル : $\iff \omega^M$ が standard な自然数全体の集合.

定理 (Solovay, 1976)

任意の ZFC の ω -モデル M と $\mathcal{L}_p$ -論理式 A について, 以下は同値:

- $S \vdash A$.
- 全ての変換 g について, $M \models g_p(A)$.

論理 $\mathbf{PF}^\omega$

PF に対しても, S に対応する論理を導入する.

様相論理 $\mathbf{PF}^\omega$ の公理と推論規則

公理 1 PF の定理

公理 2 $\Box_p A \rightarrow \Box_f A$

規則 モダス・ポネンス $\frac{A \quad A \rightarrow B}{B}$

命題

任意の ZFC の ω -モデル M と $\mathcal{L}_{\text{pf}}$ -論理式 A について,
 $\mathbf{PF}^\omega \vdash A \Rightarrow \forall g: \text{変換 } (M \models_{\text{gpf}}(A)).$

Proof.

$M \models_{\text{gpf}}(\Box_p A \rightarrow \Box_f A)$ を示せばよい.

$$M \models_{\text{gpf}}(\Box_p A) \Rightarrow M \models \blacksquare_p g_{\text{gpf}}(A)$$

$$\Rightarrow \text{ZFC} \vdash g_{\text{gpf}}(A)$$

$$\Rightarrow \text{ZFC} \vdash \blacksquare_f g_{\text{gpf}}(A)$$

$$\Rightarrow M \models_{\text{gpf}}(\Box_f A)$$

(M は ω -モデル)



主定理 2

定理 (K. and Takase)

任意の $ZFC + V = L$ の ω -モデル M と $\mathcal{L}_{pf}$ -論理式 A について、以下は同値：

- ① $PF^{\omega} \vdash A$.
- ② 全ての変換 g について、 $M \models g_{pf}(A)$.

系

ZFC が ω -モデルを持つならば、任意の $\mathcal{L}_{pf}$ -論理式 A について、以下は同値：

- ① $PF^{\omega} \vdash A$.
- ② ZFC の全ての ω -モデル M と全ての変換 g について、 $M \models g_{pf}(A)$.

その他、次の結果についても議論を行った：

定理 (K. and Takase)

- ① PF と PF^{ω} は決定可能.
- ② PF は GL の保存的拡大.
- ③ PF^{ω} は S と $S4.2$ の保存的拡大.

参考文献

- Joel David Hamkins and Benedikt Löwe. The modal logic of forcing. *Transactions of the American Mathematical Society*, 360(4):1793–1817, 2008.
- Taishi Kurahashi and Rihito Takase. The modal logic of provability and forcing. arXiv:2311.00581.
- Robert M. Solovay. Provability interpretations of modal logic. *Israel Journal of Mathematics*, 25(3-4):287–304, 1976.
- 佐野勝彦, 倉橋太志. 薄葉季路, 黒川英徳, 菊池誠. 数学における証明と真理 - 様相論理と数学基礎論, 共立出版, 2016.