有限拡大に制限した本質的不完全性について

倉橋太志 （神戸大学システム情報学研究科）
Albert Visser (Utrecht University)

日本数学会 2024 年度秋季総合分科会
2024 年 9 月 6 日 (金)

本研究の目標

- 有限拡大に制限した本質的不完全性について，その 2 種類の実効版（intensional なものと extensional なもの）を導入．
- これらの違いと，それらが同値となる条件について分析．

本発表は次の論文に含まれる内容に基づく：

Kurahashi and Visser
Pour-El's Landscape
The Bulletin of Symbolic Logic, 受理

第 1 不完全性定理と本質的不完全性

以降 T は無矛盾な c.e. 理論を表すとする．

定義

T は**本質的不完全** $:\iff$ T の任意の無矛盾な c.e. 拡大理論が不完全．

第 1 不完全性定理 (Gödel, 1931; Rosser, 1936)

理論 PA は本質的不完全．

W_i はインデックス i をもつ c.e. 集合を表すとする．

定義

T は**実効的本質的 Γ-不完全** $:\iff$ 計算可能部分関数 f が存在して，
任意の $i \in \omega$ について，もし W_i が T の無矛盾な c.e. 拡大理論ならば，
$f(i)$ が定義され，$f(i)$ は W_i において証明も反証もできない Γ 文．

Rosser 文を用いた証明から次が従う．

第 1 不完全性定理の実効版 (Gödel, 1931; Rosser, 1936)

理論 PA は実効的本質的 Π_1-不完全．

f-本質的不完全性

本質的不完全性を有限拡大のみに制限した次の概念について考察する．

定義

T は **f-本質的不完全** $:\Longleftrightarrow$ 任意の文 φ に対して，$T+\varphi$ が無矛盾ならば不完全．
(f は finite を表す．)

この概念は次の命題の観点から意味がある．

命題

以下は同値：

1. T は f-本質的不完全．
2. T のリンデンバウム代数はアトムを持たないブール代数．

アトムを持たない可算無限ブール代数は全て同型なので，
無矛盾な c.e. 理論 T と U が共に f-本質的不完全なら，それらのリンデンバウム代数は同型．

本質的不完全性と f-本質的不完全性

f-本質的不完全性は本質的不完全性より真に弱い．

定理 (Murwanashyaka, Pakhomov and Visser, 202x)

f-本質的不完全かつ決定可能な理論が存在する．

本質的不完全性と本質的決定不能性は同値なので，上記の理論は本質的不完全でない．

Murwanashyaka, Pakhomov and Visser, There are no minimal essentially undecidable theories, *Journal of Logic and Computation*, to appear.

f-本質的不完全性の実効版

f-本質的不完全性に対する実効版は intensional（内包的）なものと extensional（外延的）なものの 2 種類が考えられる．

定義

- T が **実効的 if-本質的 Γ-不完全** $:\iff$ 計算可能部分関数 f が存在して，任意の $i \in \mathbb{N}$ について，もし W_i が T の無矛盾な有限拡大理論ならば，$f(i)$ は定義され，$f(i)$ は W_i において証明も反証もできない Γ 文．
- T が **実効的 ef-本質的 Γ-不完全** $\iff$ 計算可能部分関数 f が存在して，任意の文 φ について，もし $T+\varphi$ が無矛盾ならば，$f(\varphi)$ は定義され，$f(\varphi)$ は $T+\varphi$ において証明も反証もできない Γ 文．

- 上述した 2 つの概念はそれぞれ Pour-El (1968) と Jones (1969) によって weak effective extensibility と effective nonfinite completability という名前で導入されたもの．

Marian Boykan Pour-El, Effectively extensible theories, *The Journal of Symbolic Logic*, 1968.

James P. Jones, Effectively retractable theories and degrees of undecidability, *The Journal of Symbolic Logic*, 1969.

性質間の関係

定理 (Pour-El, 1968)

T は実効的 if-本質的 Γ-不完全 $\iff$ T は実効的本質的 Γ-不完全.

$$
\begin{tikzcd}
\text{実効的本質的不完全} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Leftrightarrow, "\text{Pour-El}"] & \text{本質的不完全} \arrow[r, Leftrightarrow] \arrow[dd, Rightarrow] & \text{本質的決定不能} \\
\text{実効的 if-本質的不完全} \arrow[d, Rightarrow] & & \\
\text{実効的 ef-本質的不完全} \arrow[r, Rightarrow] & \text{f-本質的不完全} &
\end{tikzcd}
$$

定理 (Murwanashyaka, Pakhomov and Visser, 202x)

実効的 ef-本質的不完全かつ決定可能な理論が存在する.

よって，一般に ef- は if- を導かない.

問い

if- と ef- はどの程度異なるのか，また等しいのか.

得られた結果 1

結果 1

if- と ef- は異なる性質を持っている．

定理 1-1 (ef-について)

T が実効的 ef-本質的不完全とすると，文の c.e. 集合 Γ が存在して，
T は実効的 ef-本質的 Γ-不完全であり，全ての $\varphi \in \Gamma$ について $T + \varphi$ は無矛盾．

定理 1-2 (if-について)

Γ を文の c.e. 集合 とし，T は実効的 if-本質的 Γ-不完全とすると，
$\varphi \in \Gamma$ があって $T + \varphi$ は矛盾．

つまり，実効的 ef-本質的不完全な理論に対しては if- と ef- の差となる Γ がいつでも見つかる．

系

T が実効的 ef-本質的不完全とすると，文の c.e. 集合 Γ が存在して，
T は実効的 ef-本質的 Γ-不完全だが実効的 if-本質的 Γ-不完全ではない．

得られた結果 2

結果 2

T と Γ によっては **if-** と **ef-** が同値になる場合がある．

定理 2

T が PA を含み，文の **c.e.** 集合 Γ が次の条件を満たすとする：

論理式 $\mathsf{true}(x)$ が存在して，任意の $\varphi \in \Gamma$ について $T \vdash \mathsf{true}(\ulcorner\varphi\urcorner) \leftrightarrow \varphi$.

このとき，T は実効的 **if-**本質的 Γ-不完全 $\iff$ T は実効的 **ef-**本質的 Γ-不完全．

例えば $\Gamma \in \{\Sigma_n, \Pi_n \mid n \geq 0\}$ については同値．
証明は次を用いた：

- **c.e.** 理論を弱表現する，良い性質をもつ論理式をとる手法（ここがポイント）
- 不動点定理

分かったこと

「任意の有限〜」という性質の実効版を考える際には，どのように定式化するかでその性質が変化する場合がある．