

## Collection 原理の特徴づけについて

倉橋太志 (神戸大学システム情報学研究科)

日本数学会 2024 年度秋季総合分科会  
2024 年 9 月 6 日 (金)

## 本研究の目的

- PA のモデルの特徴づけを与える Kaye の結果の階層化を行う.
- $\Sigma_n$ -collection 原理 (bounding 原理) のモデルの特徴づけを与える.

$$\forall \vec{z} \left( \forall \vec{x} \exists \vec{y} \varphi(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \rightarrow \forall \vec{u} \exists \vec{v} \forall \vec{x} < \vec{u} \exists \vec{y} < \vec{v} \varphi(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \right), \quad \varphi \in \Sigma_n$$

本発表は次の論文に基づく (神戸大の元院生の南さんとの共同研究):

Kurahashi and Minami,  
On collection schemes and Gaifman's splitting theorem.  
投稿中.  
arXiv:2402.09255.

① 背景

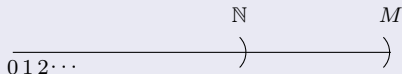
② 得られた結果

## 帰納法公理図式

- $\mathcal{L}_A$ : 一階算術の言語  $\{0, 1, +, \times, <\}$
- $\text{PA}^-$ : 離散順序可換環の非負部分の  $\mathcal{L}_A$ -理論

## 事実

$\text{PA}^-$  のモデル  $M$  の順序型は標準モデル  $\mathbb{N}$  を延長した全順序.



## 帰納法公理図式

$\Gamma$ :  $\mathcal{L}_A$ -論理式のクラス ( $\Delta_0, \Sigma_n$  など)

$$\text{Ind}(\Gamma) : \forall \vec{y} (\varphi(0, \vec{y}) \wedge \forall x (\varphi(x, \vec{y}) \rightarrow \varphi(x+1, \vec{y})) \rightarrow \forall x \varphi(x, \vec{y})), \quad \varphi \in \Gamma.$$

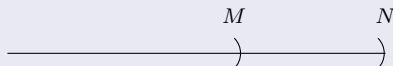
- $\text{I}\Sigma_n := \text{PA}^- + \text{Ind}(\Sigma_n)$
- $\text{PA} := \bigcup \{\text{I}\Sigma_n \mid n \geq 0\}$

# $\text{PA}^-$ のモデルに関する基本的な概念

## 定義

$M, N \models \text{PA}^-$  とする.

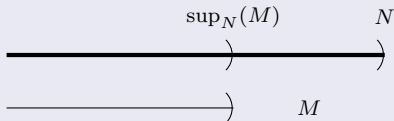
- $M \subseteq_{\text{end}} N : \iff M \subseteq N$  かつ  $\forall a \in M \forall b \in N (N \models b < a \Rightarrow b \in M)$ .



- $M \subseteq_{\text{cof}} N : \iff M \subseteq N$  かつ  $\forall a \in N \exists b \in M (N \models a < b)$ .



- $M \subseteq N$  のとき,  $\sup_N(M) := \{a \in N \mid \exists b \in M (N \models a < b)\}$ .



- $\sup_N(M)$  は  $M \subseteq_{\text{cof}} K \subseteq_{\text{end}} N$  を満たす唯一の  $K \models \text{PA}^-$ .

## Kaye の定理と研究の目標

## 定義

$M, N \models \mathbf{PA}^-, \Gamma: \mathcal{L}_A\text{-論理式のクラス}$

- $M \prec_\Gamma N : \iff M \subseteq N$  かつ任意の  $\Gamma$  論理式  $\varphi(\vec{x})$  と  $M$  の要素  $\vec{a}$  について,  
 $M \models \varphi(\vec{a}) \iff N \models \varphi(\vec{a})$ .
- $M \prec N : \iff$  全ての  $n \geq 0$  について  $M \prec_{\Sigma_n} N$ .

## 定理 (Kaye, 1991)

$M \models \mathbf{I}\Delta_0$  について, 以下は同値:

- ①  $M \models \mathbf{PA}$ .
- ②  $\forall N \models \mathbf{PA}^- (M \prec N \Rightarrow M \prec \sup_N(M) \prec N)$ .

## 本研究の目標

Kaye の定理について

- 算術的階層に基づいて階層化したい.
- 帰納法がどのように効いているのかを見極めたい.

## いくつかの collection 原理

## いくつかの collection 原理

次の公理図式  $\text{Coll}(\Gamma)$ ,  $\text{Coll}^-(\Gamma)$ ,  $\text{Coll}_s(\Gamma)$  をそれぞれ  
 $\Gamma$ -collection 原理 (もしくは  $\Gamma$ -bounding 原理),  
 パラメータなし  $\Gamma$ -collection 原理,  
 強  $\Gamma$ -collection 原理という:

- $\text{Coll}(\Gamma)$ :  $\forall z (\forall x \exists y \varphi(x, y, z) \rightarrow \forall u \exists v \forall x < u \exists y < v \varphi(x, y, z)), \quad \varphi \in \Gamma.$
- $\text{Coll}^-(\Gamma)$ :  $\forall x \exists y \varphi(x, y) \rightarrow \forall u \exists v \forall x < u \exists y < v \varphi(x, y), \quad \varphi \in \Gamma.$
- $\text{Coll}_s(\Gamma)$ :  $\forall z \forall u \exists v \forall x < u (\exists y \varphi(x, y, z) \rightarrow \exists y < v \varphi(x, y, z)), \quad \varphi \in \Gamma.$

## 理論間の導出関係

- $B\Gamma := I\Delta_0 + \mathbf{Coll}(\Gamma)$
- $B\Gamma^- := I\Delta_0 + \mathbf{Coll}^-(\Gamma)$

理論間には次の導出関係が成立することが知られている：

$$\begin{array}{lll}
 I\Sigma_{n+1} & \Longleftrightarrow & I\Delta_0 + \mathbf{Coll}_s(\Sigma_{n+1}) \Longrightarrow PA^- + \mathbf{Coll}_s(\Sigma_{n+1}) \\
 \Downarrow & & \Downarrow \\
 B\Sigma_{n+1} & = & I\Delta_0 + \mathbf{Coll}(\Sigma_{n+1}) \Longrightarrow PA^- + \mathbf{Coll}(\Sigma_{n+1}) \\
 \Downarrow & & \Downarrow \\
 B\Sigma_{n+1}^- & = & I\Delta_0 + \mathbf{Coll}^-(\Sigma_{n+1}) \Longrightarrow PA^- + \mathbf{Coll}^-(\Sigma_{n+1}) \\
 \Downarrow & & \Downarrow \\
 I\Sigma_n & \Longleftrightarrow & I\Delta_0 + \mathbf{Coll}_s(\Sigma_n) \Longrightarrow PA^- + \mathbf{Coll}_s(\Sigma_n)
 \end{array}$$



## Kaye の定理の階層化 1

## 定理 (Kaye, 1991) 【再掲】

$M \models \mathbf{I}\Delta_0$  について、以下は同値：

- ①  $M \models \mathbf{PA}$ .
- ②  $\forall N \models \mathbf{PA}^- (M \prec N \Rightarrow M \prec \sup_N(M) \prec N)$ .

## 本研究の目標【再掲】

Kaye の定理について

- 算術的階層に基づいて階層化したい。
- 帰納法がどのように効いているのかを見極めたい。

Kaye の定理の片側  $1 \Rightarrow 2$  は2つの主張に分けられる。

- (i)  $M \models \mathbf{PA} \Rightarrow \forall N \models \mathbf{PA}^- (M \prec N \Rightarrow M \prec \sup_N(M))$ .
- (ii)  $M \models \mathbf{PA} \Rightarrow \forall N \models \mathbf{PA}^- (M \prec N \Rightarrow \sup_N(M) \prec N)$ .

- (i) は Gaifman の splitting theorem (1972) の帰結
- これらの主張については、Kaye によって階層化が既に成されている。

## Kaye の定理の階層化 2

- (i)  $M \models \mathbf{PA} \Rightarrow \forall N \models \mathbf{PA}^- (M \prec N \Rightarrow M \prec \sup_N(M)).$
- (ii)  $M \models \mathbf{PA} \Rightarrow \forall N \models \mathbf{PA}^- (M \prec N \Rightarrow \sup_N(M) \prec N).$

定理 (Kaye - Models of Peano Arithmetic の Theorem 7.7)

$$M \models \mathbf{B}\Sigma_{n+1} \Rightarrow \forall K \models \mathbf{PA}^- (M \prec_{\Delta_0} K \ \& \ M \subseteq_{\text{cof}} K \Rightarrow M \prec_{\Sigma_{n+2}} K).$$

定理 (Kaye, 1991)

$$M \models \mathbf{I}\Sigma_{n+1} \Rightarrow \forall N \models \mathbf{PA}^- (M \prec N \Rightarrow \sup_N(M) \prec_{\Sigma_{n+1}} N).$$

## 本研究で具体的に考えたこと

これらの結果たちについて

- 逆は成り立つだろうか？
- 帰納法は本当に必要だろうか？

① 背景

② 得られた結果

## 得られた結果 1

## 本研究で得られた結果

Kaye の結果たちについて

- 逆が成り立つ.
- 帰納法は必要ない.

## 定理 1

 $M \models \mathbf{PA}^-$  について, 以下は同値:

- ①  $M \models \mathbf{Coll}_s(\Sigma_{n+1})$ .
- ②  $\forall N \models \mathbf{PA}^- (M \prec N \Rightarrow \sup_N(M) \prec_{\Sigma_{n+1}} N)$ .

## 定理 2

 $M \models \mathbf{PA}^-$  について, 以下は同値:

- ①  $M \models \mathbf{Coll}(\Sigma_{n+1})$ .
- ②  $\forall N \models \mathbf{PA}^- (M \prec N \Rightarrow M \prec_{\Sigma_{n+2}} \sup_N(M) \prec_{\Sigma_n} N)$ .

 $\mathbf{I}\Sigma_{n+1} = \mathbf{I}\Delta_0 + \mathbf{Coll}_s(\Sigma_{n+1})$  と  $\mathbf{B}\Sigma_{n+1} = \mathbf{I}\Delta_0 + \mathbf{Coll}(\Sigma_{n+1})$  に注意.

## 得られた結果 2

パラメータなし collection 原理についても同様の結果が成立する.

## 定義

$M, N \models \mathbf{PA}^-$  について,

$M \equiv_{\Gamma} N : \iff$  任意の  $\Gamma$  文  $\varphi$  について,  $M \models \varphi \iff N \models \varphi$ .

## 定理 3

$M \models \mathbf{PA}^-$  について, 以下は同値:

- ①  $M \models \mathbf{Coll}^-(\Sigma_{n+1})$ .
- ②  $\forall N \models \mathbf{PA}^- (M \prec N \Rightarrow M \equiv_{\Sigma_{n+2}} \sup_N(M) \prec_{\Sigma_n} N)$ .

## 得られた結果 3

$\sup_N(M)$  だけではなく,  $\subseteq_{\text{cof}}$  について次の結果も得られた.

## 定理 4

$M, K \models \mathbf{PA}^-$  を  $M \prec_{\Delta_0} K$  かつ  $M \subseteq_{\text{cof}} K$  とすると,

- ①  $M \models \mathbf{Coll}(\Sigma_{n+1}) \Rightarrow M \prec_{\Sigma_{n+2}} K.$
- ②  $M \models \mathbf{Coll}^-(\Sigma_{n+1}) \Rightarrow M \equiv_{\Sigma_{n+2}} K.$
- ③  $M \models \mathbf{Coll}_s(\Sigma_{n+1}) \Rightarrow K \models \mathbf{Coll}_s(\Sigma_{n+1}).$
- ④  $M \models \mathbf{Coll}^-(\Sigma_{n+1}) \Rightarrow K \models \mathbf{Coll}^-(\Sigma_{n+1}).$

- 項目 1 は Kaye の本の結果の  $M \models \mathbf{I}\Delta_0$  の仮定を  $M \models \mathbf{PA}^-$  に落としたもの.
- 項目 3 は  $M \models \mathbf{I}\Delta_0$  の場合が Tin Lok Wong 氏によっても独立に示されている.

## 分かったこと

Gaifman の splitting theorem を含めた,  $\sup_N(M)$  や  $\subseteq_{\text{cof}}$  に関する性質は帰納法公理ではなく種々の collection 原理のモデルと深く関わっていた.