様相論理 $\mathbf{IL}^{-}(\mathbf{P})$ について

発表者: 大川 裕矢 (千葉大学大学院理学研究院)
2022 年度日本数学会奨励研究生
共同発表者: 岩田 荘平 (神戸大学システム情報学研究科)
倉橋 太志 (神戸大学システム情報学研究科)

日本数学会 2023 年度年会 2023 年 3 月 16 日

概要

- 解釈可能性の様相論理 **IL** は, 公理 **P** : $A \rhd B \to \Box(A \rhd B)$ (persistency principle) を加えることで, 算術的に完全となる（Visser, 1990）.
- **P** は不動点定理とも相性が良いことが分かっている（de Jongh and Visser, 1991）.
- **IL** の各公理の性質を詳しく分析するために, K. and O. (2021) で **IL** の部分論理 $\mathbf{IL}^-$ を導入した.
- 今回は $\mathbf{IL}^-$ 上で **P** が論理的に良い振る舞いをすることを次の 4 つの観点から確認する研究を行った.
  1. 不動点定理
  2. 意味論的完全性
  3. カット除去
  4. 算術的完全性

IL

解釈可能性論理 **IL** は証明可能性論理 **GL** の拡大で,
二項様相演算子 $\rhd$ を持つ ($\mathbf{GL} := \mathbf{K} + \Box(\Box A \to A) \to \Box A$).

1. 論理式 $\Box A$ は「A は理論 T で証明可能」を意図.
2. 論理式 $A \rhd B$ は「$T + B$ は $T + A$ において解釈可能」を意図.

解釈可能性論理 IL

IL は **GL** に次の公理を加えることで得られる:

J1: $\Box(A \to B) \to A \rhd B$;

J2: $(A \rhd B) \wedge (B \rhd C) \to A \rhd C$;

J3: $(A \rhd C) \wedge (B \rhd C) \to (A \vee B) \rhd C$;

J4: $A \rhd B \to (\Diamond A \to \Diamond B)$;

J5: $\Diamond A \rhd A$.

公理 P

IL に次の公理を加えると算術的に完全となる.

P: $A \rhd B \to \Box(A \rhd B)$.

定理 (Visser, 1990)

IL + **P** は有限公理化可能な適切な理論に対して算術的に健全かつ完全.

FPP と ℓFPP

定義（modalized と left-modalized）

A を様相論理式とする.

1. $\mathrm{var}(A)$: A に現れる命題変数全体の集合.
2. p が A で modalized
   $:\Leftrightarrow$ A に現れるすべての p が $\Box$ または $\rhd$ に縛られている.
3. p が A で left-modalized
   $:\Leftrightarrow$ p が A で modalized かつ,
   $B \rhd C$ が A の部分論理式ならば $p \notin \mathrm{var}(C)$.

定義 (FPP と ℓFPP)

様相論理 L が FPP (fixed point property) を持つ
$:\Leftrightarrow$ 任意の p が modalized な $A(p)$ について, ある F が存在して,
$\mathrm{var}(F) \subseteq \mathrm{var}(A(p)) \setminus \{p\}$ かつ $L \vdash F \leftrightarrow A(F)$.

様相論理 L が ℓFPP を持つ
$:\Leftrightarrow$ 任意の p が left-modalized な $A(p)$ について, ある F が存在して,
$\mathrm{var}(F) \subseteq \mathrm{var}(A(p)) \setminus \{p\}$ かつ $L \vdash F \leftrightarrow A(F)$.

不動点定理成立状況 ver1

定理 (de Jongh and Visser, 1991)

$\mathbf{IL}$ は FPP を持つ.

$\mathbf{IL}$ よりも弱い論理に対する FPP の成立状況も分かっている.

K. and O. (2021) は $\mathbf{IL}$ よりも弱い部分論理 $\mathbf{IL}^-$ を導入した.
以降 $\mathbf{IL}^-$ に公理 $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n$ を加えた論理を $\mathbf{IL}^-(\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n)$ と書く.
$\mathbf{IL} = \mathbf{IL}^-(\mathbf{J1}, \mathbf{J2}, \mathbf{J5})$ である.

定理 (I., K., and O.)

1. $\mathbf{IL}^-(\mathbf{J2}_+, \mathbf{J5})$ は FPP を持つ.
2. $\mathbf{IL}^-(\mathbf{J4}, \mathbf{J5})$ は ℓFPP を持つ.

ここで, $\mathbf{J2}_+ : (A \rhd (B \vee C)) \wedge (B \rhd C) \to A \rhd C$ であり,

$$\mathbf{IL}^-(\mathbf{J4}, \mathbf{J5}) \subset \mathbf{IL}^-(\mathbf{J2}_+, \mathbf{J5}) \subset \mathbf{IL}.$$

一方で, $\mathbf{IL}$ の部分論理ではない論理に対しても, FPP は成立する.

不動点定理成立状況 ver2

定理 (de Jongh and Visser, 1991)

$\mathbf{IL}^-(\mathbf{J4}_+, \mathbf{P})$ は FPP を持つ.
ここで, $\mathbf{J4}_+ : \Box(A \to B) \to ((C \rhd A) \to C \rhd B)$.

定理 (I., K., and O.)

$\mathbf{IL}^-(\mathbf{J4}_+)$ は FPP を持たない

よって, de Jongh and Visser の証明において, 公理 $\mathbf{P}$ の使用は本質的.
では, $\mathbf{IL}^-(\mathbf{P})$ はどうか?

研究モチベーション

De Jongh and Visser の結果から公理 **P** は
IL の部分論理に対して FPP に良い影響を与えることが窺えた.

問

$\mathbf{IL}^-$ 上で **P** はどのように振る舞うか?

まず, **P** は ℓFPP について非常によく振る舞うことが分かった.

定理

- $\mathbf{IL}^-(\mathbf{P})$ は ℓFPP を持つ.
- $\mathbf{IL}^-$ は ℓFPP を持たない.

論理 $\mathbf{IL}^-(\mathbf{P})$ を, 更に次の 3 つの観点から調べた.

1. 意味論
2. 証明論
3. 算術

得られた結果 (意味論)

$\mathbf{IL}^-(\mathbf{P})$ はある意味論の基盤になることも分かった．
この意味で，$\mathbf{IL}^-(\mathbf{P})$ は意味論的に非常に自然な論理である．

定義 (Simplified Veltman frame)

$\mathcal{F} = (W, R, S)$ が次を満たすとき，simplified $\mathbf{IL}^-(\mathbf{P})$-frame とよぶ．

1. (W, R) は **GL** の Kripke frame.
2. $S \subseteq W \times W$.

$\mathcal{F}$ 上の satisfaction relation $\Vdash$ は次を満たすものを考える：

$$w \Vdash A \rhd B :\Longleftrightarrow (\forall x \in W)(wRx \ \&\ x \Vdash A \Rightarrow (\exists y \in W)(xSy \ \&\ y \Vdash B)).$$

- 今回導入した意味論は **GL** の Kripke frame の自然な拡張であるが，必ず公理 **P** が妥当となる．
- 更に次の完全性定理が成立する．

定理

$\mathbf{IL}^-(\mathbf{P}) \vdash A$
$\Longleftrightarrow$ すべての有限 simplified $\mathbf{IL}^-(\mathbf{P})$-frame $\mathcal{F}$ について，$\mathcal{F} \models A$.

得られた結果 (証明論)

$\mathbf{IL}^-$ と $\mathbf{IL}^-(\mathbf{P})$ それぞれに対応するシーケント計算 $\mathbf{IL}^-_{\mathrm{seq}}$ と $\mathbf{IL}^-(\mathbf{P})_{\mathrm{seq}}$ を導入した.

ここでは $\Box A$ は $(\neg A) \rhd \bot$ の略記とする.
$\mathbf{IL}^-_{\mathrm{seq}}$ は LK に次の規則を加えることで得られる.

$$\frac{\Box\Gamma, \Gamma, \Box A \Rightarrow A}{\Box\Gamma \Rightarrow \Box A}\ (\Box) \qquad \frac{A \Rightarrow \{X_i \mid i < n\} \quad \langle Y_i \Rightarrow B\rangle_{i<n}}{\{X_i \rhd Y_i \mid i < n\} \Rightarrow A \rhd B}\ (\rhd)$$

$\mathbf{IL}^-(\mathbf{P})_{\mathrm{seq}}$ は LK に次の規則を加えることで得られる.

$$\frac{\Omega, \{X_i \rhd Y_i \mid i < n\}, A \rhd B, A \Rightarrow \{X_i \mid i < n\} \quad \langle Y_i \Rightarrow B\rangle_{i<n}}{\Omega, \{X_i \rhd Y_i \mid i < n\} \Rightarrow A \rhd B}\ (\rhd_P)$$

ここで Ω は $C \rhd D$ という形の論理式の有限集合.

定理

$\mathbf{IL}^-_{\mathrm{seq}}$ はカット除去可能でないが, $\mathbf{IL}^-(\mathbf{P})_{\mathrm{seq}}$ はカット除去可能.

この定理から, $\mathbf{IL}^-(\mathbf{P})_{\mathrm{seq}}$ が Craig 補間性を持つことも示せた.

得られた結果 (算術)

- T: 算術 **PA** を含む無矛盾な r.e. 理論.
- $\tau(x)$ が T の numeration $:\Leftrightarrow \forall\varphi\,\big(\varphi \in T \iff \mathbf{PA} \vdash \tau(\ulcorner\varphi\urcorner)\big)$.
- T の numeration τ から自然に作られる T の証明可能性述語を $\mathrm{Pr}_\tau(x)$ と書く.
- 算術の文 φ について, $\mathrm{Con}_{\tau+\varphi} :\equiv \neg\mathrm{Pr}_\tau(\ulcorner\neg\varphi\urcorner)$ とする.

定義

τ_0, τ_1 を理論 T の numerations とする.
次を満たす, 様相論理式から算術の文への写像 f を算術的解釈という.

1. $f(\bot) \equiv (0 = 1)$;
2. $f(A \to B) \equiv f(A) \to f(B)$;
3. $f(\Box A) \equiv \mathrm{Pr}_{\tau_0}(\ulcorner f(A)\urcorner)$;
4. $f(A \rhd B) \equiv \mathrm{Pr}_{\tau_0}(\ulcorner f(A) \to \mathrm{Con}_{\tau_1+f(B)}\urcorner)$.

定理

A を様相論理式とする. τ_0, τ_1 を理論 T の適切な numerations とする.
$\mathbf{IL}^-(\mathbf{P}) \vdash A \iff$ 任意の算術的解釈 f について, $T \vdash f(A)$.

参考文献

1. D. de Jongh and A. Visser, Explicit fixed points in interpretability logic. *Studia Logica*, 50(1):39-49, 1991.
2. S. Iwata, T. Kurahashi, and Y. Okawa, The fixed point and the Craig interpolation properties for sublogics of **IL**, Submitted, arXiv:2007.05427.
3. S. Iwata, T. Kurahashi, and Y. Okawa, The persistence principle over weak interpretability logic, Submitted, arXiv.2203.02183.
4. T. Kurahashi and Y. Okawa, Modal completeness of sublogics of the interpretability logic **IL**, *Mathematical Logic Quarterly*, 67,2:164–185, (2021).
5. A. Visser, Interpretability logic, In *Mathematical logic. Proceedings of the summer school and conference dedicated to the ninetieth anniversary of Arend Heyting (1898-1980), held in Chaika, Bulgaria, September 13-23, 1988*, pages 175-209. New York: Plenum Press, 1990.