単調性を満たす証明可能性述語の様相論理

倉橋 太志（神戸大学システム情報学研究科）
小暮 晏佳（金沢大学理工学域数物科学類）

日本数学会 2023 年度年会
中央大学 後楽園キャンパス
2023 年 3 月 16 日

概要

概要

- 第 2 不完全性定理は
  - どのような条件（導出可能性条件）を満たす証明可能性述語 $\mathrm{Pr}_T(x)$ を考えるか
  - 無矛盾性をどのような形で形式化するか

  に応じていろいろなバリエーションが知られている．
- 今回は，単調性条件 **M**:

$$T \vdash \varphi \to \psi \Rightarrow T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner)$$

  を満たす $\mathrm{Pr}_T(x)$ について，様相論理を用いた分析を行なった．

本発表は次の論文に基づく．

H. Kogure and T. Kurahashi. “Arithmetical completeness theorems for monotonic modal logics”, arXiv: 2208.03555, 2022.

証明可能性述語と無矛盾性の形式化

理論 T を PA の無矛盾な r.e. 拡大とする.

定義（証明可能性述語）

$\mathrm{Pr}_T(x)$ が T の**証明可能性述語**
$\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ $\mathrm{Pr}_T(x)$ は Σ_1 論理式かつ $\forall\varphi\,(T \vdash \varphi \iff \mathsf{PA} \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\varphi\urcorner))$.

証明可能性述語と無矛盾性の形式化

理論 T を PA の無矛盾な r.e. 拡大とする．

定義（証明可能性述語）

$\mathrm{Pr}_T(x)$ が T の**証明可能性述語**
$\overset{\text{def.}}{\iff}$ $\mathrm{Pr}_T(x)$ は Σ_1 論理式かつ $\forall\varphi\,(T \vdash \varphi \iff \mathsf{PA} \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\varphi\urcorner))$.

T の無矛盾性を主張する次の 2 種類の表現を考える．

無矛盾性の形式化

- $\mathrm{Con}_T \;:\equiv \neg\mathrm{Pr}_T(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$.
- $\mathrm{Con}^{\mathrm{S}}_T := \{\neg(\mathrm{Pr}_T(\ulcorner\varphi\urcorner) \land \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\neg\varphi\urcorner)) : \varphi$ は論理式 $\}$.

$\mathsf{PA} + \mathrm{Con}^{\mathrm{S}}_T \vdash \mathrm{Con}_T$.

第 2 不完全性定理

定義（導出可能性条件）

D2: $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \to \psi \urcorner) \to (\mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner))$.
D3: $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \urcorner)$.
M: $T \vdash \varphi \to \psi \Rightarrow T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner)$.

単調性条件 M は Hilbert–Bernays (1936) で導入された D2 より弱い条件．

第 2 不完全性定理

定義（導出可能性条件）

D2: $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \to \psi \urcorner) \to (\mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner))$.
D3: $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \urcorner)$.
M: $T \vdash \varphi \to \psi \Rightarrow T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner)$.

単調性条件 M は Hilbert–Bernays (1936) で導入された D2 より弱い条件.

定理

1. **(Löb, 1955)** $\mathrm{Pr}_T(x)$ **が D2 と D3 を満たす** $\Rightarrow T \nvdash \mathrm{Con}_T$.
2. **(K., 2021)** $\mathrm{Pr}_T(x)$ **が M と D3 を満たす** $\Rightarrow T \nvdash \mathrm{Con}_T^{\mathrm{S}}$.

第 2 不完全性定理

定義（導出可能性条件）

D2: $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \to \psi \urcorner) \to (\mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner))$.
D3: $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \urcorner)$.
M: $T \vdash \varphi \to \psi \Rightarrow T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner)$.

単調性条件 M は Hilbert–Bernays (1936) で導入された D2 より弱い条件．

定理

1. **(Löb, 1955)** $\mathrm{Pr}_T(x)$ **が D2 と D3 を満たす** $\Rightarrow T \nvdash \mathrm{Con}_T$.
2. **(K., 2021)** $\mathrm{Pr}_T(x)$ **が M と D3 を満たす** $\Rightarrow T \nvdash \mathrm{Con}^{\mathrm{S}}_T$.

事実

$\mathrm{Pr}_T(x)$ **が D2 を満たせば，** T **上で** Con_T **と** $\mathrm{Con}^{\mathrm{S}}_T$ **は同値．**

では，D2 がなければ Con_T **と** $\mathrm{Con}^{\mathrm{S}}_T$ **は異なるだろうか？**

Rosser 証明可能性述語

この分析には Rosser 証明可能性述語 $\mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}}(x)$ が有用．

$$\mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}}(x) :\equiv \exists y(\mathrm{Prf}_T(x, y) \land \forall z < y\, \neg\mathrm{Prf}_T(\neg x, z)).$$

事実

PA $\vdash \neg\mathrm{Pr}_T^{\mathrm{R}}(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$.
したがって，任意の Rosser 証明可能性述語は D2 または D3 の少なくとも一方は成立しない．

Rosser 証明可能性述語

この分析には Rosser 証明可能性述語 $\mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T(x)$ **が有用．**

$$\mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T(x) :\equiv \exists y(\mathrm{Prf}_T(x, y) \land \forall z < y \, \neg\mathrm{Prf}_T(\neg x, z)).$$

事実

$\mathsf{PA} \vdash \neg\mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$.
したがって，任意の Rosser 証明可能性述語は D2 または D3 の少なくとも一方は成立しない．

定理 (K., 2021)

M と D3 を満たす $\mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T(x)$ **が存在する．**

- **つまり，D2 を満たさない** $\mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T(x)$ **が存在して，その** Con_T **が証明できるが** $\mathrm{Con}^{\mathrm{S}}_T$ **は証明できない．**
- **D2 を満たさない** $\mathrm{Pr}_T(x)$ **について** Con_T **と** $\mathrm{Con}^{\mathrm{S}}_T$ **は一般には同値ではない．**

証明可能性論理と算術的完全性定理

様相命題論理において $\Box A$ を $\mathrm{Pr}_T(x)$ を用いて解釈することで，$\mathrm{Pr}_T(x)$ のふるまいを様相論理を通じて分析する．

定義（算術的解釈）

$\mathrm{Pr}_T(x)$ を T の証明可能性述語とする．
次を満たす様相論理式から算術の文への写像 f を $\mathrm{Pr}_T(x)$ に基づく算術的解釈という．

- $f(\bot) \equiv 0 = 1$.
- $f(A \to B) \equiv f(A) \to f(B)$.
- $f(\Box A) \equiv \mathrm{Pr}_T(\ulcorner f(A) \urcorner)$.

証明可能性論理と算術的完全性定理

様相命題論理において $\Box A$ を $\mathrm{Pr}_T(x)$ を用いて解釈することで, $\mathrm{Pr}_T(x)$ のふるまいを様相論理を通じて分析する.

定義（算術的解釈）

$\mathrm{Pr}_T(x)$ を T の証明可能性述語とする.
次を満たす様相論理式から算術の文への写像 f を $\mathrm{Pr}_T(x)$ に基づく算術的解釈という.

- $f(\bot) \equiv 0 = 1$.
- $f(A \to B) \equiv f(A) \to f(B)$.
- $f(\Box A) \equiv \mathrm{Pr}_T(\ulcorner f(A) \urcorner)$.

定義（証明可能性論理）

$\mathsf{PL}(\mathrm{Pr}_T) := \{A \mid \mathrm{Pr}_T(x)$ に基づく任意の算術的解釈 f に対して $T \vdash f(A)\}$
を $\mathrm{Pr}_T(x)$ の証明可能性論理という.

証明可能性論理と算術的完全性定理

様相命題論理において $\Box A$ を $\mathrm{Pr}_T(x)$ を用いて解釈することで，$\mathrm{Pr}_T(x)$ のふるまいを様相論理を通じて分析する．

定義（算術的解釈）

$\mathrm{Pr}_T(x)$ を T の証明可能性述語とする．
次を満たす様相論理式から算術の文への写像 f を $\mathrm{Pr}_T(x)$ に基づく**算術的解釈**という．

- $f(\bot) \equiv 0 = 1$.
- $f(A \to B) \equiv f(A) \to f(B)$.
- $f(\Box A) \equiv \mathrm{Pr}_T(\ulcorner f(A) \urcorner)$.

定義（証明可能性論理）

$\mathsf{PL}(\mathrm{Pr}_T) := \{A \mid \mathrm{Pr}_T(x)$ に基づく任意の算術的解釈 f に対して $T \vdash f(A)\}$
を $\mathrm{Pr}_T(x)$ の**証明可能性論理**という．

問

どんな様相命題論理 L に対して，$L = \mathsf{PL}(\mathrm{Pr}_T)$ となる $\mathrm{Pr}_T(x)$ がとれるのか？

算術的完全性定理

この問いに関する基本的で重要な結果は **Solovay** の定理.

算術的完全性定理 (Solovay, 1976)

T を Σ_1-健全な理論とする.
D2 と **D3** を満たす通常の $\mathrm{Pr}_T(x)$ について $\mathbf{GL} = \mathsf{PL}(\mathrm{Pr}_T)$.

算術的完全性定理

この問いに関する基本的で重要な結果は Solovay の定理．

算術的完全性定理 (Solovay, 1976)

T を Σ_1-健全な理論とする．
D2 と **D3** を満たす通常の $\mathrm{Pr}_T(x)$ について $\mathbf{GL} = \mathsf{PL}(\mathrm{Pr}_T)$．

対応する証明可能性論理が **GL** 以外になる場合もある．

定理 (K., 2020)

- **D2** を満たす $\mathrm{Pr}_T(x)$ が存在して，$\mathbf{K} = \mathsf{PL}(\mathrm{Pr}_T)$．
- **D2** を満たす $\mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T(x)$ が存在して，$\mathbf{KD} = \mathsf{PL}(\mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T)$．

$\mathbf{GL} = \mathbf{K} + (\Box(\Box A \to A) \to \Box A)$
$\mathbf{KD} = \mathbf{K} + \neg\Box\bot$

算術的完全性定理

この問いに関する基本的で重要な結果は **Solovay** の定理．

算術的完全性定理 (Solovay, 1976)

T を Σ_1-健全な理論とする．
D2 と **D3** を満たす通常の $\mathrm{Pr}_T(x)$ について $\mathbf{GL} = \mathsf{PL}(\mathrm{Pr}_T)$.

対応する証明可能性論理が **GL** 以外になる場合もある．

定理 (K., 2020)

- **D2** を満たす $\mathrm{Pr}_T(x)$ が存在して，$\mathbf{K} = \mathsf{PL}(\mathrm{Pr}_T)$.
- **D2** を満たす $\mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T(x)$ が存在して，$\mathbf{KD} = \mathsf{PL}(\mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T)$.

$\mathbf{GL} = \mathbf{K} + (\Box(\Box A \to A) \to \Box A)$
$\mathbf{KD} = \mathbf{K} + \neg\Box\bot$

- これらは **D2** を満たす $\mathrm{Pr}_T(x)$ に関する結果で，対応するのは正規様相論理．
- **D2** を満たさない $\mathrm{Pr}_T(x)$ を分析するには，非正規様相論理を考える必要がある．
- 特に **D2** を満たさないが **M** を満たす $\mathrm{Pr}_T(x)$ の $\mathsf{PL}(\mathrm{Pr}_T)$ は何だろうか？

Monotonic modal logics

様相論理 MN

Monotonic modal logic MN は次の公理と規則からなる：

公理 ： トートロジー

規則 ： $\textbf{(MP)}\ \dfrac{A \to B \quad A}{B}$, $\textbf{(RM)}\ \dfrac{A \to B}{\Box A \to \Box B}$, $\textbf{(Nec)}\ \dfrac{A}{\Box A}$

MN の算術的健全性

M を満たす任意の $\mathrm{Pr}_T(x)$ **について，MN** $\subseteq \mathsf{PL}(\mathrm{Pr}_T)$.

Monotonic modal logics

様相論理 MN

Monotonic modal logic MN は次の公理と規則からなる：

公理 ： トートロジー

規則 ： **(MP)** $\dfrac{A \to B \quad A}{B}$, **(RM)** $\dfrac{A \to B}{\Box A \to \Box B}$, **(Nec)** $\dfrac{A}{\Box A}$

MN の算術的健全性

M を満たす任意の $\mathrm{Pr}_T(x)$ **について，MN** $\subseteq$ PL(Pr_T).

MN の拡大論理

MN4 $:=$ **MN** $+ (\Box A \to \Box\Box A)$ （**D3** に対応）
MNP $:=$ **MNP** $+ \neg\Box\bot$ $(\mathrm{Con}_T$ に対応）
MND $:=$ **MN** $+ \neg(\Box A \wedge \Box\neg A)$ $(\mathrm{Con}^{\mathrm{S}}_T$ に対応）
MNP4 $:=$ **MNP** $+ (\Box A \to \Box\Box A)$

- 特に **MND** $\subseteq$ **MNP** かつ **MNP** $\not\subseteq$ **MND** であり，これは **D2** を満たさない場合の Con_T と $\mathrm{Con}^{\mathrm{S}}_T$ の関係に対応している．

MN の関係意味論

まずは，MN とその拡大論理に対する関係意味論を導入し（実質は近傍意味論と同等），有限フレーム性を証明した．

MN-フレーム

次の条件を満たす組 (W, R) を **MN-フレーム**という．

- $W \neq \emptyset$.
- $R \subseteq W \times (\mathcal{P}(W) \setminus \{\emptyset\})$.
- $(\forall x \in W)(\forall U, V \in \mathcal{P}(W))(x\ R\ V\ \&\ V \subseteq U \Rightarrow x\ R\ U)$. (単調性)

MN-フレーム上の $\Vdash$ は次を満たすものとする：

$$x \Vdash \Box A \iff (\forall V \in \mathcal{P}(W))\big(x\ R\ V \Rightarrow (\exists y \in V)(y \Vdash A)\big).$$

定理（有限フレーム性）

- $\mathrm{MN} \vdash A \iff A$ は任意の有限 MN-フレームで妥当.
- 同様に MN4, MNP, MND, MNP4 も対応する有限 MN-フレームのクラスで特徴づけられる.

主定理

MN とその拡大論理に対して，それらの有限フレーム性を用いて Solovay の手法を拡張することにより，算術的完全性が証明できた．

主定理（算術的完全性）

1. M を満たす $\mathrm{Pr}_T(x)$ が存在して，$\mathbf{MN} = \mathsf{PL}(\mathrm{Pr}_T)$.
2. M と D3 を満たす $\mathrm{Pr}_T(x)$ が存在して，$\mathbf{MN4} = \mathsf{PL}(\mathrm{Pr}_T)$.
3. M を満たす $\mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T(x)$ が存在して，$\mathbf{MNP} = \mathsf{PL}(\mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T)$.
4. M と $T \vdash \mathrm{Con}^{\mathrm{S}}_T$ を満たす $\mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T(x)$ が存在して，$\mathbf{MND} = \mathsf{PL}(\mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T)$.
5. M と D3 を満たす $\mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T(x)$ が存在して，$\mathbf{MNP4} = \mathsf{PL}(\mathrm{Pr}^{\mathrm{R}}_T)$.

特に，これらの結果から，第 2 不完全性定理の分析で得られていた状況が様相論理の言葉ではっきりと説明できるようになったといえる．