

Friedman–Goldfarb–Harrington の定理の拡張

倉橋 太志

神戸大学システム情報学研究科

日本数学会 2023 年度年会

中央大学 後楽園キャンパス

2023 年 3 月 16 日

概要

概要

- 任意の c.e. 集合は, PA の無矛盾かつ計算可能な拡大理論において弱表現可能 (Ehrenfeucht and Feferman, 1961)
- この定理は PA の中で形式化して証明できる (FGH 定理)
- 今回は, FGH 定理を
 - 古典命題論理
 - 様相命題論理に基づいて拡張する.

本発表は次の論文に基づく.

T. Kurahashi. “Some observations on the FGH theorem”,
arXiv:2110.14872.
Studia Logica (受理)

- 1 弱表現可能性と FGH 定理
- 2 FGH 定理の拡張 (古典命題論理)
- 3 FGH 定理の拡張 (様相命題論理)

弱表現可能性

- 算術の言語 $\mathcal{L}_A = \{0, s, +, \times, \leq\}$
- T は PA の無矛盾かつ計算可能な拡大 $\mathcal{L}_A$ -理論とする.

定義 (弱表現可能性)

集合 $X \subseteq \omega$ が T において**弱表現可能**

: $\iff \mathcal{L}_A$ -論理式 $\varphi(x)$ が存在して, $\forall n \in \omega (n \in X \iff T \vdash \varphi(\bar{n}))$.

弱表現可能性

- 算術の言語 $\mathcal{L}_A = \{0, s, +, \times, \leq\}$
- T は PA の無矛盾かつ計算可能な拡大 $\mathcal{L}_A$ -理論とする.

定義 (弱表現可能性)

集合 $X \subseteq \omega$ が T において**弱表現可能**

: $\iff \mathcal{L}_A$ -論理式 $\varphi(x)$ が存在して, $\forall n \in \omega (n \in X \iff T \vdash \varphi(\bar{n}))$.

集合の弱表現可能性については次の定理が基本的.

定理 (Ehrenfeucht and Feferman, 1961)

どんな c.e. 集合も T において弱表現可能.

証明可能性述語と第一不完全性定理

定義 (証明可能性述語)

- T の定理全体の集合 $\text{Th}(T)$ は c.e. 集合.
- Ehrenfeucht and Feferman の定理より T において $\text{Th}(T)$ を弱表現する $\mathcal{L}_A$ -論理式 $\text{Pr}_T(x)$ がとれる (T の証明可能性述語).

今回は T の自然な Σ_1 証明可能性述語 $\text{Pr}_T(x)$ を固定しておく.

証明可能性述語と第一不完全性定理

定義 (証明可能性述語)

- T の定理全体の集合 $\text{Th}(T)$ は c.e. 集合.
- Ehrenfeucht and Feferman の定理より T において $\text{Th}(T)$ を弱表現する $\mathcal{L}_A$ -論理式 $\text{Pr}_T(x)$ がとれる (T の証明可能性述語).

今回は T の自然な Σ_1 証明可能性述語 $\text{Pr}_T(x)$ を固定しておく.

集合 X を弱表現する $\mathcal{L}_A$ -論理式 $\varphi(x)$ は X そのものではないが, $\varphi(x)$ を通じて X の持つ性質を T の中で議論できるようになるという点で, $\varphi(x)$ は X の T における代用物とみれる.

証明可能性述語と第一不完全性定理

定義 (証明可能性述語)

- T の定理全体の集合 $\text{Th}(T)$ は c.e. 集合.
- Ehrenfeucht and Feferman の定理より T において $\text{Th}(T)$ を弱表現する $\mathcal{L}_A$ -論理式 $\text{Pr}_T(x)$ がとれる (T の証明可能性述語).

今回は T の自然な Σ_1 証明可能性述語 $\text{Pr}_T(x)$ を固定しておく.

集合 X を弱表現する $\mathcal{L}_A$ -論理式 $\varphi(x)$ は X そのものではないが, $\varphi(x)$ を通じて X の持つ性質を T の中で議論できるようになるという点で, $\varphi(x)$ は X の T における代用物とみれる.

この観点から, 次の問題を考えるのは自然であろう.

問い

集合 X を弱表現する論理式 $\varphi(x)$ はどのような形でとれるか?

FGH 定理

Ehrenfeucht and Feferman の定理は PA の中で形式化して証明できる.

FGH 定理 (Friedman, Goldfarb, and Harrington)

任意の Σ_1 文 σ に対して, $\mathcal{L}_A$ -文 φ が存在して,

$$\text{PA} + \text{Con}_T \vdash \sigma \leftrightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner).$$

FGH 定理は証明可能性述語 $\text{Pr}_T(x)$ の分析を行う際に有用.

FGH 定理

Ehrenfeucht and Feferman の定理は PA の中で形式化して証明できる.

FGH 定理 (Friedman, Goldfarb, and Harrington)

任意の Σ_1 文 σ に対して, $\mathcal{L}_A$ -文 φ が存在して,

$$\text{PA} + \text{Con}_T \vdash \sigma \leftrightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner).$$

FGH 定理は証明可能性述語 $\text{Pr}_T(x)$ の分析を行う際に有用.

先ほどと同様の問い

FGH 定理における文 φ はどのような形でとれるか?

FGH 定理

Ehrenfeucht and Feferman の定理は PA の中で形式化して証明できる。

FGH 定理 (Friedman, Goldfarb, and Harrington)

任意の Σ_1 文 σ に対して, $\mathcal{L}_A$ -文 φ が存在して,

$$PA + \text{Con}_T \vdash \sigma \leftrightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner).$$

FGH 定理は証明可能性述語 $\text{Pr}_T(x)$ の分析を行う際に有用。

先ほどと同様の問い

FGH 定理における文 φ はどのような形でとれるか?

この問題は第 1 不完全性定理の観点からも興味深い。

命題

σ が $PA + \text{Con}_T$ 上で独立な Σ_1 文なら, FGH 定理で得られる φ は T 上で独立。

T 上で独立な文がどのような形のものとしてとれるのか, という問題と関係。

- 1 弱表現可能性と FGH 定理
- 2 FGH 定理の拡張 (古典命題論理)
- 3 FGH 定理の拡張 (様相命題論理)

FGH 定理の拡張 (古典命題論理)

まずは FGH 定理を次のように拡張した。

定理

古典命題論理の論理式 $A(p_1, \dots, p_n)$ について、以下は同値：

- ① $A(p_1, \dots, p_n)$ も $\neg A(p_1, \dots, p_n)$ もトートロジーではない。
- ② 任意の Σ_1 文 σ に対して、 $\mathcal{L}_A$ -文 $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ が存在して、

$$\text{PA} + \text{Con}_T \vdash \sigma \leftrightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner A(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \urcorner).$$

FGH 定理の拡張 (古典命題論理)

まずは FGH 定理を次のように拡張した。

定理

古典命題論理の論理式 $A(p_1, \dots, p_n)$ について、以下は同値：

- ① $A(p_1, \dots, p_n)$ も $\neg A(p_1, \dots, p_n)$ もトートロジーではない。
- ② 任意の Σ_1 文 σ に対して、 $\mathcal{L}_A$ -文 $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ が存在して、

$$\text{PA} + \text{Con}_T \vdash \sigma \leftrightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner A(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \urcorner).$$

- $A(p_1, \dots, p_n)$ も $\neg A(p_1, \dots, p_n)$ もトートロジーではないような命題論理式 $A(p_1, \dots, p_n)$ に対して、 T 上で独立な文を $A(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ という形でとれる。

FGH 定理の拡張 (古典命題論理)

まずは FGH 定理を次のように拡張した。

定理

古典命題論理の論理式 $A(p_1, \dots, p_n)$ について、以下は同値：

- ① $A(p_1, \dots, p_n)$ も $\neg A(p_1, \dots, p_n)$ もトートロジーではない。
- ② 任意の Σ_1 文 σ に対して、 $\mathcal{L}_A$ -文 $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ が存在して、

$$\text{PA} + \text{Con}_T \vdash \sigma \leftrightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner A(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \urcorner).$$

- $A(p_1, \dots, p_n)$ も $\neg A(p_1, \dots, p_n)$ もトートロジーではないような命題論理式 $A(p_1, \dots, p_n)$ に対して、 T 上で独立な文を $A(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ という形でとれる。
- 同様に c.e. 集合を弱表現する論理式を $A(\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$ という形でもとれる。

- 1 弱表現可能性と FGH 定理
- 2 FGH 定理の拡張 (古典命題論理)
- 3 FGH 定理の拡張 (様相命題論理)

算術的解釈

- 先ほどの定理を様相命題論理に拡張するためには、命題変数に $\mathcal{L}_A$ -文を割り当てるだけではなく、 $\Box$ も適切に算術の論理式に書き換える必要がある。
- 今回は証明可能性論理と同様、 $\Box$ を証明可能性述語 $\text{Pr}_T(x)$ に書き換える。

算術的解釈

- 先ほどの定理を様相命題論理に拡張するためには、命題変数に $\mathcal{L}_A$ -文を割り当てるだけでなく、 $\Box$ も適切に算術の論理式に書き換える必要がある。
- 今回は証明可能性論理と同様、 $\Box$ を証明可能性述語 $\text{Pr}_T(x)$ に書き換える。

定義 (算術的解釈)

様相命題論理式から $\mathcal{L}_A$ -文への写像 f が**算術的解釈**であるとは、次を満たすことをいう：

- $f(\perp)$ は $0 = 1$, $f(A \rightarrow B)$ は $f(A) \rightarrow f(B)$, など。
- $f(\Box A)$ は $\text{Pr}_T(\ulcorner f(A) \urcorner)$.

算術的解釈

- 先ほどの定理を様相命題論理に拡張するためには、命題変数に $\mathcal{L}_A$ -文を割り当てるだけではなく、 $\Box$ も適切に算術の論理式に書き換える必要がある。
- 今回は証明可能性論理と同様、 $\Box$ を証明可能性述語 $\text{Pr}_T(x)$ に書き換える。

定義 (算術的解釈)

様相命題論理式から $\mathcal{L}_A$ -文への写像 f が**算術的解釈**であるとは、次を満たすことをいう：

- $f(\perp)$ は $0 = 1$, $f(A \rightarrow B)$ は $f(A) \rightarrow f(B)$, など。
- $f(\Box A)$ は $\text{Pr}_T(\ulcorner f(A) \urcorner)$ 。

FGH 定理の観点から、次の問題を考える。

問い

任意の Σ_1 文 σ に対して、算術的解釈 f があって

$$\vdash \sigma \leftrightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner f(A) \urcorner)$$

となるような様相論理式 A はどんなものか？

様相論理 GL

算術的解釈を通じて算術と結びつく様相論理は Gödel–Löb の論理 GL.

定義 (GL)

様相命題論理 GL は次の公理と規則で得られる：

公理 : トートロジー, $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$, $\Box(\Box A \rightarrow A) \rightarrow \Box A$

規則 : (MP) $\frac{A \quad A \rightarrow B}{B}$, (Nec) $\frac{A}{\Box A}$

様相論理 GL

算術的解釈を通じて算術と結びつく様相論理は Gödel–Löb の論理 GL.

定義 (GL)

様相命題論理 GL は次の公理と規則で得られる：

公理 : トートロジー, $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$, $\Box(\Box A \rightarrow A) \rightarrow \Box A$

規則 : (MP) $\frac{A \quad A \rightarrow B}{B}$, (Nec) $\frac{A}{\Box A}$

算術的完全性定理 (Solovay, 1976)

T が Σ_1 -健全ならば, 任意の様相論理式 A について,
 $GL \vdash A \iff$ 任意の算術的解釈 f について $T \vdash f(A)$.

諸定義

今回は GL のある拡大論理が重要な役割を果たす.

定義 (GL_ω)

GL の定理と $\Diamond^n \top$ ($n \in \omega$) を公理として持ち, 規則としてモダス・ポネンスのみをもつ様相論理を GL_ω という.

諸定義

今回は GL のある拡大論理が重要な役割を果たす。

定義 (GL_ω)

GL の定理と $\Diamond^n \top$ ($n \in \omega$) を公理として持ち, 規則としてモダス・ポネンスのみをもつ様相論理を GL_ω という。

$\Diamond^n \top$ の算術における対応物を用意する。

定義 (Con_T^n)

- Π_1 文の列 $\langle Con_T^n \rangle_{n \in \omega}$ を再帰的に定める:
 - Con_T^0 は $0 = 0$ のこと。
 - Con_T^{n+1} は $Con_{T+Con_T^n}$ のこと。
- $T \vdash \neg Con_T^n$ となるような $n \in \omega$ があれば, そのような最小の n を T の高さという。
そのような n がなければ, T の高さは無限であるという。

主定理

- 様相論理式 A の $\Box B$ という形の部分論理式の個数を $\mathfrak{c}(A)$ で表す.

主定理

- 様相論理式 A の $\Box B$ という形の部分論理式の個数を $c(A)$ で表す.

FGH 定理の次のような拡張ができた.

主定理

A を様相命題論理の論理式とする.

理論 T の高さが $c(A)$ より大きければ, 次は同値:

- ① $GL_\omega \not\vdash \Box\Box A \rightarrow \Box A$.
- ② 任意の Σ_1 文 σ に対して, 算術的解釈 f が存在して, 次が成り立つ:
 - ① $PA \vdash \sigma \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner f(A) \urcorner)$,
 - ② $PA + \text{Con}_T^{c(A)+1} \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner f(A) \urcorner) \rightarrow \sigma$.

主定理

- 様相論理式 A の $\Box B$ という形の部分論理式の個数を $c(A)$ で表す.

FGH 定理の次のような拡張ができた.

主定理

A を様相命題論理の論理式とする.

理論 T の高さが $c(A)$ より大きければ, 次は同値:

- $\text{GL}_\omega \not\vdash \Box\Box A \rightarrow \Box A$.
- 任意の Σ_1 文 σ に対して, 算術的解釈 f が存在して, 次が成り立つ:
 - $\text{PA} \vdash \sigma \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner f(A) \urcorner)$,
 - $\text{PA} + \text{Con}_T^{c(A)+1} \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner f(A) \urcorner) \rightarrow \sigma$.

- 古典命題論理式 A について, $c(A) = 0$ であり, また

$$\text{GL}_\omega \not\vdash \Box\Box A \rightarrow \Box A \iff A \text{ も } \neg A \text{ も トートロジーでない}$$

が成立するので, 古典命題論理バージョンはこの定理の系.