

証明可能性述語の様相論理

倉橋 太志

神戸大学大学院システム情報学研究科

SAML2022: Symposium on Advances in Mathematical Logic 2022

京都大学数理解析研究所

2022 年 6 月 22 日

概要

概要

- 理論 T の証明可能性を表す論理式である **証明可能性述語** $\text{Pr}_T(x)$ がどのような性質を満たすのかは、**第二不完全性定理**の証明と関係がある。
- そのような性質を **証明可能性論理** $\text{PL}(\text{Pr}_T)$ という様相論理を通じて分析する。

① $\text{Pr}_T(x)$ の満たす条件と第二不完全性定理の関係

② 各 $\text{Pr}_T(x)$ の証明可能性論理

③ $L = \text{PL}(\text{Pr}_T)$ となる証明可能性述語 $\text{Pr}_T(x)$ がとれるような様相論理 L

について既存の結果をまとめ、最近得られた結果についても紹介する。

内容

- ① 証明可能性述語と第二不完全性定理
- ② 証明可能性論理と Solovay の定理
- ③ 証明可能性述語の正規様相論理
- ④ 証明可能性述語の非正規様相論理

内容

① 証明可能性述語と第二不完全性定理

- ① 証明可能性述語
- ② 第二不完全性定理
- ③ Rosser 証明可能性述語
- ④ 単調性

② 証明可能性論理と Solovay の定理

③ 証明可能性述語の正規様相論理

④ 証明可能性述語の非正規様相論理

証明可能性述語

T : PA の無矛盾かつ計算可能な拡大理論

弱表現

論理式 $\varphi(x)$ が PA において集合 $X \subseteq \mathbb{N}$ を**弱表現**する

$$\stackrel{\text{def.}}{\iff} \forall n \in \mathbb{N} (n \in X \iff \text{PA} \vdash \varphi(\bar{n})).$$

事実

任意の c.e. 集合 $X \subseteq \mathbb{N}$ に対して, X を PA において弱表現する論理式がある.

証明可能性述語

T の定理全体の集合は c.e. であり, これを PA において弱表現する論理式 $\text{Pr}_T(x)$ を T の**証明可能性述語**という.

すなわち, 任意の論理式 φ について, $T \vdash \varphi \iff \text{PA} \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$.

Gödel (1931) は T の証明可能性述語 $\text{Pr}_T(x)$ を作り, 不完全性定理を証明した.

- ① T が ω -無矛盾ならば, T は不完全 (第一不完全性定理)
- ② $T \not\vdash \neg \text{Pr}_T(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$ (第二不完全性定理)

Feferman 的な証明可能性述語

Feferman (1960) は証明可能性述語の作り方によって、その性質がどのように変化するのかを分析した。

- T を PA において弱表現する論理式 $\tau(v)$ を用意する。
つまり、任意の論理式 φ について、 $\varphi \in T \iff \text{PA} \vdash \tau(\ulcorner \varphi \urcorner)$.
- “ x は $\tau(v)$ の定める理論において証明可能” を表す論理式 $\text{Pr}_\tau(x)$ を自然に作れば、 $\text{Pr}_\tau(x)$ は T の証明可能性述語。

Feferman 的な証明可能性述語

$\text{Pr}_\tau(x)$ という形の論理式を **Feferman 的な証明可能性述語**という。

定理 (Feferman, 1960)

Feferman 的な証明可能性述語 $\text{Pr}_\tau(x)$ について次が成立する。

D2: $\text{PA} \vdash \text{Pr}_\tau(\ulcorner \varphi \rightarrow \psi \urcorner) \rightarrow (\text{Pr}_\tau(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_\tau(\ulcorner \psi \urcorner))$.

$\Sigma_1\text{C}$: φ が Σ_1 文ならば $\text{PA} \vdash \varphi \rightarrow \text{Pr}_\tau(\ulcorner \varphi \urcorner)$.

Löb の定理と第二不完全性定理

定理 (Löb, 1955)

証明可能性述語 $\text{Pr}_T(x)$ が次の条件 (**導出可能性条件**) を満たすとする：

$$\text{D2: } T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \rightarrow \psi \urcorner) \rightarrow (\text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner)).$$

$$\text{D3: } T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \urcorner).$$

このとき、次が成立する：

- $T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \varphi$ ならば $T \vdash \varphi$.
- $T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$.
- $T \not\vdash \neg \text{Pr}_T(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$.

- Feferman 的な証明可能性述語について、 $\tau(v)$ が Σ_1 なら $\text{Pr}_\tau(x)$ も Σ_1 .
- $\text{Pr}_\tau(x)$ は $\Sigma_1\text{C}$ を満たすので、この場合 D3 も満たす。

系 (Feferman, 1960)

$\tau(v)$ を Σ_1 とすると、次が成立する：

- $T \vdash \text{Pr}_\tau(\ulcorner \text{Pr}_\tau(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_\tau(\ulcorner \varphi \urcorner)$.
- $T \not\vdash \neg \text{Pr}_\tau(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$.

第二不完全性定理の成立しない Feferman の証明可能性述語

- $\tau(v)$ が Σ_1 のとき, $\text{Pr}_\tau(x)$ に対して第二不完全性定理が成立する.
- $\tau(v)$ が Σ_1 ではないとき, $\text{Pr}_\tau(x)$ に対して第二不完全性定理が成立しない場合がある.

定理 (Feferman, 1960)

T を弱表現する Π_1 論理式 $\pi(v)$ があって, $T \vdash \neg \text{Pr}_\pi(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$.

- 実際, $\text{Pr}_\pi(x)$ は Σ_2 論理式であり, $D2$ と $\Sigma_1 C$ を満たすが, $D3$ を満たさない.

第二不完全性定理は全ての証明可能性述語に対して成立するわけではない.

Rosser 証明可能性述語

第二不完全性定理の成立しない (Feferman 的ではない) Σ_1 証明可能性述語もある。

Rosser 証明可能性述語

“ y は T における x の証明” を表す $\Delta_1(\text{PA})$ 論理式 $\text{Prf}_T(x, y)$ を用意し,

$$\exists y(\text{Prf}_T(x, y) \wedge \forall z < y \neg \text{Prf}_T(\neg x, z))$$

を T の **Rosser 証明可能性述語** といい, $\text{Pr}_T^R(x)$ で表す。

事実

$\text{Pr}_T^R(x)$ は T の Σ_1 証明可能性述語で, 更に次を満たす: 任意の論理式 φ について, $T \vdash \neg \varphi$ ならば $T \vdash \neg \text{Pr}_T^R(\ulcorner \varphi \urcorner)$.

φ として特に $0 = 1$ をとれば, $T \vdash \neg 0 = 1$ なので, 次が分かる。

事実 (Kreisel, 1960)

$$T \vdash \neg \text{Pr}_T^R(\ulcorner 0 = 1 \urcorner).$$

Kreisel, Ordinal logics and the characterization of informal concepts of proof, 1960.

Rosser 証明可能性述語と導出可能性条件

- $\text{Pr}_T^R(x)$ に対して第二不完全性定理が成立しないので、導出可能性条件 D2 と D3 の少なくとも一方は成立しない。
- $\text{Pr}_T^R(x)$ は D2 を満たすだろうか？ (Kreisel and Takeuti, 1974)

定理 (Guaspari and Solovay, 1979)

D2 も D3 も満たさない Rosser 証明可能性述語が存在する。

定理 (Bernardi and Montagna, 1984; Arai, 1990)

D2 を満たす Rosser 証明可能性述語が存在する。

定理 (Arai, 1990)

D3 を満たす Rosser 証明可能性述語が存在する。

D2 や D3 を満たすかどうかは $\text{Pr}_T^R(x)$ の取り方に依存する。

Guaspari and Solovay, Rosser sentences, 1979.

Arai, Derivability conditions on Rosser's provability predicates, 1990.

導出可能性条件と第二不完全性定理

- 特に D2 や D3 を満たす $\text{Pr}_T^R(x)$ の存在は次の意味で非常に重要.

系

Σ_1 証明可能性述語 $\text{Pr}_T(x)$ であっても

- D2 だけでは $T \not\vdash \neg \text{Pr}_T(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$ は導けない.
- D3 だけでは $T \not\vdash \neg \text{Pr}_T(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$ は導けない.

いろいろな条件を満たす Rosser 証明可能性述語の存在を示せば、それらの条件だけでは第二不完全性定理が導けないことが示せる.

単調性

$\text{Pr}_T(x)$ が D2 を満たせば、次の単調性条件 M を満たす。

単調性

M: $T \vdash \varphi \rightarrow \psi$ ならば $T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner)$.

定理 (K., 2021)

M と D3 を共に満たす Rosser 証明可能性述語が存在する。

系

M と D3 では $T \not\vdash \neg \text{Pr}_T(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$ は導けない。

一方、M と D3 については、次の形の第二不完全性定理が成立する。

定理 (K., 2021)

証明可能性述語 $\text{Pr}_T(x)$ が M と D3 を満たすなら、
ある論理式 φ が存在して $T \not\vdash \neg(\text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \wedge \text{Pr}_T(\ulcorner \neg \varphi \urcorner))$ 。

K., Rosser provability and the second incompleteness theorem, 2021.

無矛盾性の異なる定式化

理論 T が無矛盾であることの定義として

- ① $T \not\vdash 0 = 1$
- ② 全ての論理式 φ について, ' $T \vdash \varphi$ かつ $T \vdash \neg\varphi$ ' となることはない
のどちらを採用しても同値である.

それぞれの形式化は次の通り:

- ① $\text{Con}_T := \neg \text{Pr}_T(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$
- ② $\text{Con}_T^S := \{ \neg(\text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \wedge \text{Pr}_T(\ulcorner \neg\varphi \urcorner)) \mid \varphi \text{ は論理式} \}$

事実

証明可能性述語 $\text{Pr}_T(x)$ が D2 を満たせば, T 上で Con_T と Con_T^S は同値.

無矛盾性の違い

他方, D2 のない状況においては, M と D3 を共に満たす Rosser 証明可能性述語の存在から, 次が分かる.

系

$T \vdash \text{Con}_T$ かつ $T \not\vdash \text{Con}_T^S$ となる Σ_1 証明可能性述語が存在する.

ただし, このこと自体は次の結果からも分かる.

定理 (Jeroslow, 1973)

Σ_1 証明可能性述語 $\text{Pr}_T(x)$ が $\Sigma_1 C$ を満たせば, $T \not\vdash \text{Con}_T^S$.

定理 (Mostowski, 1965)

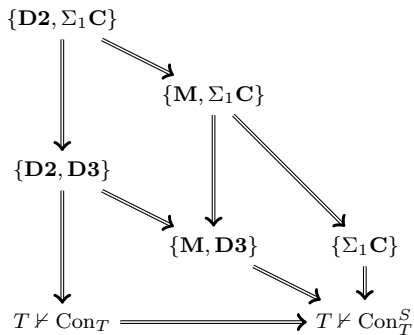
$\Sigma_1 C$ を満たし, $T \vdash \text{Con}_T$ となるような Σ_1 証明可能性述語 $\text{Pr}_T(x)$ が存在する.

Jeroslow, Redundancies in the Hilbert-Bernays derivability conditions for Gödel's second incompleteness theorem, 1973.

Mostowski, Thirty years of foundational studies, 1965.

導出可能性条件と第二不完全性定理

次は Σ_1 証明可能性述語に関する状況をまとめた図。



未解決問題

M と $\Sigma_1 C$ を共に満たし、 $T \vdash \text{Con}_T$ となるような Σ_1 証明可能性述語は存在するか？

内容

- ① 証明可能性述語と第二不完全性定理
- ② 証明可能性論理と Solovay の定理
 - ① 証明可能性論理
 - ② 考えたい問題
- ③ 証明可能性述語の正規様相論理
- ④ 証明可能性述語の非正規様相論理

証明可能性述語としての様相

Löb の定理 (再掲)

証明可能性述語 $\text{Pr}_T(x)$ が次の D2 と D3 を満たすとする：

$$\text{D2: } T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \rightarrow \psi \urcorner) \rightarrow (\text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner)).$$

$$\text{D3: } T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \urcorner).$$

このとき、任意の論理式 φ について

$$T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner).$$

T を弱表現する Σ_1 論理式 $\tau(v)$ に対して、 $\text{Pr}_\tau(x)$ は D2 と D3 を満たすため、Löb の定理を適用できた。

Q. $\text{Pr}_\tau(x)$ に対して成立する、Löb の定理以外の新しい原理はあるか？

A. ない！

様相論理を用いて示す。

D2 と D3 はそれぞれ様相論理における公理 K と 4 に対応する：

$$\text{K: } \Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$$

$$4: \Box A \rightarrow \Box \Box A$$

算術的解釈と証明可能性論理

様相論理式と算術の論理式の間に正確な対応を与える。

算術的解釈

様相論理式から算術の文への写像 f が $\text{Pr}_T(x)$ に基づく **算術的解釈** $\stackrel{\text{def.}}{\iff}$

- $f(\perp)$ は $0 = 1$
- $f(\neg A)$ は $\neg f(A)$
- $f(A \circ B)$ は $f(A) \circ f(B)$ (ただし $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$)
- $f(\Box A)$ は $\text{Pr}_T(\ulcorner f(A) \urcorner)$

証明可能性論理

$\text{PL}(\text{Pr}_T) = \{A \mid A \text{ は様相論理式で } \forall f: \text{Pr}_T(x) \text{ に基づく算術的解釈, } T \vdash f(A)\}$
を $\text{Pr}_T(x)$ の**証明可能性論理**という。

- $\text{PL}(\text{Pr}_T)$ は $\text{Pr}_T(x)$ に関して T において証明できる原理の集合
- $\text{PL}(\text{Pr}_T)$ はどんな様相論理か？

様々な様相論理

様相論理 K の公理と推論規則

公理 恒真式と公理 $K : \Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$

規則 モダス・ポネンス $\frac{A \quad A \rightarrow B}{B}$ とネセシテーション $\frac{A}{\Box A}$

K にいろいろな公理を加えることで、様々な様相論理が得られる。

様々な様相論理

- $KD = K + \neg\Box\perp$
- $KT = K + (\Box A \rightarrow A)$
- $K4 = K + (\Box A \rightarrow \Box\Box A)$
- $K5 = K + (\Diamond A \rightarrow \Box\Diamond A)$
- $KB = K + (A \rightarrow \Box\Diamond A)$
- $GL = K + (\Box(\Box A \rightarrow A) \rightarrow \Box A)$

Solovay の算術的完全性定理

様相論理 GL は、導出可能性条件や、Löb の定理に対応する公理や規則を持つため、次は容易に分かる。

算術的健全性定理

$\tau(v)$ を Σ_1 論理式とする。

$GL \vdash A$ ならば、 $\text{Pr}_\tau(x)$ に基づく任意の算術的解釈 f について、 $T \vdash f(A)$ 。

すなわち、 $GL \subseteq \text{PL}(\text{Pr}_\tau)$ 。

T が Σ_1 -健全、すなわち、 T で証明できる Σ_1 文がすべて標準モデル $\mathbb{N}$ で正しい場合に、Solovay はその逆を証明した。

算術的完全性定理 (Solovay, 1976)

T が Σ_1 -健全で $\tau(v)$ が Σ_1 ならば、 $\text{PL}(\text{Pr}_\tau) = GL$ 。

したがって、 $\text{Pr}_\tau(x)$ に関して T において証明できる原理は GL で尽くされる。

Solovay, Provability interpretations of modal logic, 1976.

Σ_1 -健全ではない理論について

- Σ_1 -健全ではない理論には例えば, $T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$ となるようなものがある.
- これは $\Box \perp \in \text{PL}(\text{Pr}_T)$ ということ.

定理 (Visser, 1984)

T を Σ_1 -健全ではないとし, $\tau(v)$ を Σ_1 とする.

このとき, $\text{PL}(\text{Pr}_\tau)$ は GL か, ある $n \geq 1$ について $\text{GL} + \Box^n \perp$ のいずれか.

定理 (Beklemishev, 1989)

T を Σ_1 -健全ではないとする.

このとき, 各 $L \in \{\text{GL}\} \cup \{\text{GL} + \Box^n \perp \mid n \geq 1\}$ について,

$L = \text{PL}(\text{Pr}_\tau)$ となる Σ_1 論理式 $\tau(v)$ がある.

Visser, The provability logics of recursively enumerable theories extending Peano Arithmetic at arbitrary theories extending Peano Arithmetic, 1984.

Beklemishev, On the classification of propositional provability logics, 1989.

考えたい問題

Σ_1 論理式 $\tau(v)$ に基づく Feferman 的な $\text{Pr}_\tau(x)$ の証明可能性論理の状況は分かった.

- しかし, これらの定理だけで証明可能性述語の様相論理的振る舞いの全てが分かったわけではない.

問

- Σ_1 ではない $\tau(v)$ に基づく Feferman 的な $\text{Pr}_\tau(x)$ の証明可能性論理は?
- Feferman 的ではない $\text{Pr}_T(x)$ の証明可能性論理は?
- $L = \text{PL}(\text{Pr}_T)$ となる証明可能性述語 $\text{Pr}_T(x)$ がとれるような様相論理 L とは?

まずは 3 の限界を調べてみる.

証明可能性論理にならない様相論理

証明可能性論理にならない様相論理もある。

定理

任意の証明可能性述語 $\text{Pr}_T(x)$ について：

$$\textcircled{1} \text{ PL}(\text{Pr}_T) \neq \text{K4} = \text{K} + (\Box A \rightarrow \Box \Box A).$$

$$\textcircled{2} \text{ PL}(\text{Pr}_T) \not\supseteq \text{KT} = \text{K} + (\Box A \rightarrow A).$$

(Montague, 1963)

Proof.

1. $\text{K4} \subseteq \text{PL}(\text{Pr}_T)$ とすると, $\text{Pr}_T(x)$ は D2 と D3 を満たすから, Löb の定理より $\text{GL} \subseteq \text{PL}(\text{Pr}_T)$ となり $\text{K4} \neq \text{PL}(\text{Pr}_T)$.

2. $\text{KT} \subseteq \text{PL}(\text{Pr}_T)$ とすると, $\text{Pr}_T(x)$ の Gödel 文 φ について $T \vdash \varphi$ となる。 $\square$

算術には不動点定理があるので, 様相論理だけではできないことができてしまう。

Montague, Syntactical treatments of modality, with corollaries on reflexion principles and finite axiomatizability, 1963.

証明可能性論理にならない様相論理

定理 (K., 2018)

$T \not\vdash \text{Pr}_T(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$ となる任意の $\text{Pr}_T(x)$ について：

- ① $\text{PL}(\text{Pr}_T) \not\supseteq \mathbf{K5} = \mathbf{K} + (\Diamond A \rightarrow \Box \Diamond A).$
- ② $\text{PL}(\text{Pr}_T) \not\supseteq \mathbf{KB} = \mathbf{K} + (A \rightarrow \Box \Diamond A).$

Proof.

- ① $T \vdash \varphi \leftrightarrow \neg \text{Pr}_T(\ulcorner \neg \text{Pr}_T(\ulcorner \neg \varphi \urcorner) \urcorner)$ となる φ を考えればよい.
- ② $T \vdash \varphi \leftrightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \neg \varphi \urcorner)$ となる φ を考えればよい.



証明可能性論理になり得る様相論理は意外と限られていそう。

K., Arithmetical soundness and completeness for Σ_2 numerations, 2018.

内容

- ① 証明可能性述語と第二不完全性定理
- ② 証明可能性論理と Solovay の定理
- ③ **証明可能性述語の正規様相論理**
 - ① Feferman 的な証明可能性述語
 - ② Feferman 的でない証明可能性述語
 - ③ 証明可能性論理になる様相論理
- ④ 証明可能性述語の非正規様相論理

Feferman 的な証明可能性述語 (1/2)

まずは最初の問について考えてみる。

Σ_1 ではない $\tau(v)$ に基づく Feferman 的な $\text{Pr}_\tau(x)$ の証明可能性論理は？

Feferman 的な証明可能性述語は必ず D2 を満たすので、次が成立する。

事実

任意の $\tau(v)$ について、 $K \subseteq \text{PL}(\text{Pr}_\tau)$ 。

すなわち $\text{PL}(\text{Pr}_\tau)$ は**正規様相論理**。

Feferman による、 $T \vdash \neg \text{Pr}_\pi(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$ となる $\pi(v)$ の存在から、ただちに次もわかる。

事実

Π_1 論理式 $\pi(v)$ があって、 $\text{PL}(\text{Pr}_\pi) \supseteq \text{KD} = K + \neg \Box \perp$ となる。

ただし、このような証明可能性論理についてはほとんど分かっていない。

未解決問題

- ① Feferman の $\text{Pr}_\pi(x)$ について、 $\text{PL}(\text{Pr}_\pi)$ を公理化せよ。
- ② $\text{PL}(\text{Pr}_\tau) = \text{KD}$ となる $\tau(v)$ は存在するか？

Feferman 的な証明可能性述語 (2/2)

ただし, Feferman 的な証明可能性述語について, 分かっていることもある.

定理 (K., 2018)

$K = \bigcap \{ \text{PL}(\text{Pr}_\tau) \mid \tau(v) \text{ は } T \text{ を弱表現する論理式} \}.$

特に $K = \text{PL}(\text{Pr}_\tau)$ となる Σ_2 論理式 $\tau(v)$ がある.

次は Sacchetti (2001) によって導入された, GL より真に弱い論理たち.

- $\text{wGL}_n = K + (\Box(\Box^n A \rightarrow A) \rightarrow \Box A)$

定理 (K., 2018)

各 $n \geq 1$ について, $\text{wGL}_n = \text{PL}(\text{Pr}_\tau)$ となる Σ_2 論理式 $\tau(v)$ がある.

Σ_1 のみの $\tau(v)$ を考えるときと Σ_2 のみのときでは $\text{PL}(\text{Pr}_\tau)$ 全体の状況は異なる.

未解決問題

各 $n \geq 2$ について, $\tau(v)$ が Σ_n か Σ_{n+1} かで $\text{PL}(\text{Pr}_\tau)$ 全体の状況は異なるか?

Sacchetti, The fixed point property in modal logic, 2001.

K., Arithmetical completeness for modal logic K, 2018.

Feferman 的でない証明可能性述語 (1/2)

続いて 2 個目の問いを考える。

Feferman 的ではない $\text{Pr}_T(x)$ の証明可能性論理は？

Feferman 的でない証明可能性述語はいろいろあるが、2つ紹介する。

Σ_1 論理式 $\tau(v)$ を固定する。

Parikh 証明可能性

算術に規則 $\frac{\text{Pr}_\tau(\ulcorner \varphi \urcorner)}{\varphi}$ を加えて証明可能であることを **Parikh 証明可能**であるという。

- T が Σ_1 -健全なら、 T における Parikh 証明可能性の形式化である $\text{Pr}_\tau^{\text{Pa}}(x)$ は T の Σ_1 証明可能性述語。

定理 (Lindström, 1996)

T が Σ_1 -健全ならば $\text{PL}(\text{Pr}_\tau^{\text{Pa}}) = \text{GL}$.

Parikh, Existence and feasibility, 1971.

Lindström, Provability logic—a short introduction, 1996.

Feferman 的でない証明可能性述語 (2/2)

$\text{Pr}_{\text{PA}}^{\text{Sh}}(x)$ を, Σ_2 論理式 $\exists y(\text{Pr}_{I\Sigma_y}(x) \wedge \neg \text{Pr}_{I\Sigma_y}(\ulcorner 0 = 1 \urcorner))$ とする.

- $\text{Pr}_{\text{PA}}^{\text{Sh}}(x)$ は PA の証明可能性述語.
- 更に $\text{PA} \vdash \neg \text{Pr}_{\text{PA}}^{\text{Sh}}(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$ であり, つまり $\text{KD} \subseteq \text{PL}(\text{Pr}_{\text{PA}}^{\text{Sh}})$.

定理 (Shavrukov, 1994)

$\text{PL}(\text{Pr}_{\text{PA}}^{\text{Sh}}) = \text{KD} + (\Box A \rightarrow \Box((\Box B \rightarrow B) \vee \Box A)).$

- 通常の $\text{Pr}_T(x)$ と新しい $\text{Pr}_T^*(x)$ それぞれに対応する, 様相演算子を二つもつ様相論理が考えられる.
- Lindström と Shavrukov は二重様相論理の公理化も与えている.
- いろいろな証明可能性述語の二重様相論理の研究が多く行われている.

Shavrukov, A smart child of Peano's, 1994.

証明可能性論理になる様相論理 (1/2)

3 個目の問いについて考える。

$L = \text{PL}(\text{Pr}_T)$ となる証明可能性述語 $\text{Pr}_T(x)$ がとれるような様相論理 L とは？

- $K = \text{PL}(\text{Pr}_T)$ となる Feferman 的な Σ_2 証明可能性述語 $\text{Pr}_T(x)$ の存在は既に示した。
- 同様のことが Σ_1 証明可能性述語についても成立する。

定理 (K.)

$K = \text{PL}(\text{Pr}_T)$ となる Σ_1 証明可能性述語 $\text{Pr}_T(x)$ がある。

未解決問題

各 $n \geq 2$ について, $\text{PL}(\text{Pr}_T) = \text{wGL}_n$ となる Σ_1 証明可能性述語 $\text{Pr}_T(x)$ は存在するか？

証明可能性論理になる様相論理 (2/2)

- D2 を満たす Rosser 証明可能性述語 $\text{Pr}_T^R(x)$ が存在する.
- $T \vdash \neg \text{Pr}_T^R(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$ なので, このとき $\text{KD} \subseteq \text{PL}(\text{Pr}_T^R)$.

定理 (K., 2020)

$\text{PL}(\text{Pr}_T^R) = \text{KD}$ となる Rosser 証明可能性述語 $\text{Pr}_T^R(x)$ がある.

証明可能性論理が KD を真に含むような Rosser 証明可能性述語もある.

定理 (K., 2020)

$\text{PL}(\text{Pr}_T^R) \supseteq \text{KD} + (\Box A \rightarrow \Box \Diamond A)$ となる $\text{Pr}_T^R(x)$ がある.

$\text{KD} + (\Box A \rightarrow \Box \Diamond A) \subseteq \text{KD4} \cap \text{KD5} \cap \text{KT}$ なのだが, 次がいえる.

定理 (K., 2020)

任意の $\text{Pr}_T(x)$ について, $\text{KD4} \cap \text{KD5} \cap \text{KT} \not\subseteq \text{PL}(\text{Pr}_T)$.

未解決問題

$\text{PL}(\text{Pr}_T^R) = \text{KD} + (\Box A \rightarrow \Box \Diamond A)$ となる $\text{Pr}_T^R(x)$ はあるか?

内容

- ① 証明可能性述語と第二不完全性定理
- ② 証明可能性論理と Solovay の定理
- ③ 証明可能性述語の正規様相論理
- ④ **証明可能性述語の非正規様相論理**
 - ① 全ての証明可能性述語の様相論理
 - ② 単調な証明可能性述語の様相論理

D2 を満たさない証明可能性述語

- ここまで扱ってきたのは D2 を満たす証明可能性述語ばかり。
- D2 を満たさない証明可能性述語について考える際に大きな問題点がある。

問題点

- D2 を満たさない証明可能性述語 $\text{Pr}_T(x)$ について, $K \not\subseteq \text{PL}(\text{Pr}_T)$ すなわち, $\text{PL}(\text{Pr}_T)$ は正規様相論理ではない。
- つまり, $\text{PL}(\text{Pr}_T)$ を調べるのにクリプキ意味論が使えない。
- Solovay の定理の証明は, 対応するクリプキモデルを算術に埋め込む, というものであり, その証明法をそのまま使用できない。

最近できたこと

クリプキ意味論に類似した関係意味論を持つような非正規様相論理に対して Solovay の手法を拡張し, 問題点を克服。

- ① 全ての証明可能性述語の様相論理 N
- ② 単調性条件 M を満たす証明可能性述語の様相論理 MN

全ての証明可能性述語の様相論理 (1/3)

- 全ての証明可能性述語に共通の性質はおそらく, “ $T \vdash \varphi \Rightarrow T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$ ” のみ.
- つまり様相論理的にはネセシテーションのみで, そのような論理 N が Fitting, Marek, and Truszczyński (1992) によって導入されている.

様相論理 N の公理と推論規則

公理 恒真式のみ.

規則 モダス・ポネンス $\frac{A \quad A \rightarrow B}{B}$ とネセシテーション $\frac{A}{\Box A}$.

命題

全ての証明可能性述語 $\text{Pr}_T(x)$ について, $N \subseteq \text{PL}(\text{Pr}_T)$.

Fitting, Marek, and Truszczyński, The pure logic of necessitation, 1992.

全ての証明可能性述語の様相論理 (2/3)

N は次のような関係意味論を持つ。MFml を様相論理全体の集合とする。

N-モデル

$(W, \{R_A\}_{A \in \text{MFml}}, \Vdash)$ が N-モデルであるとは、次を満たすことをいう：

- W は空でない集合。
- 各 $A \in \text{MFml}$ に対して、 R_A は W 上の二項関係。
- $\Vdash$ は各 $w \in W$ における充足関係で、特に

$$w \Vdash \Box A : \Longleftrightarrow \forall x \in W (w R_A x \Rightarrow x \Vdash A).$$

定理 (Fitting, Marek, and Truszczyński, 1992)

N は N-モデル全体に対して健全かつ完全で、更に有限モデル性を持つ。

これを使って、次が示せた。

定理 (K.)

$N = \text{PL}(\text{Pr}_T)$ となる Σ_1 証明可能性述語 $\text{Pr}_T(x)$ が存在する。

N は全ての証明可能性述語の様相論理。

K., The provability logic of all provability predicates, 準備中。

全ての証明可能性述語の様相論理 (3/3)

N のいろいろな拡大論理を導入する.

 N の拡大論理

- $N4 = N + (\Box A \rightarrow \Box\Box A)$
- $NR = N + \frac{\neg A}{\neg\Box A}$
- $NR4 = NR + (\Box A \rightarrow \Box\Box A)$

それぞれの算術的完全性が示せた.

定理 (K.)

- $N4 = PL(Pr_T)$ となる Σ_1 証明可能性述語 $Pr_T(x)$ が存在する.
- $NR = PL(Pr_T^R)$ となる Rosser 証明可能性述語 $Pr_T^R(x)$ が存在する.
- $NR4 = PL(Pr_T^R)$ となる Rosser 証明可能性述語 $Pr_T^R(x)$ が存在する.

NR は全ての Rosser 証明可能性述語の様相論理.

単調な証明可能性述語の様相論理 (1/4)

単調性を満たす様相論理もまた、自然な関係意味論を持つ。

様相論理 MN の公理と推論規則

公理 恒真式のみ。

規則 モダス・ポネンス $\frac{A \quad A \rightarrow B}{B}$ と単調性 $\frac{A \rightarrow B}{\Box A \rightarrow \Box B}$ と

ネセシテーション $\frac{A}{\Box A}$ 。

命題

単調性条件 M を満たす全ての証明可能性述語 $\text{Pr}_T(x)$ について, $\text{MN} \subseteq \text{PL}(\text{Pr}_T)$ 。

単調な証明可能性述語の様相論理 (2/4)

MN-モデル

$(W, R, \Vdash)$ が MN-モデルであるとは、次を満たすことをいう：

- W は空でない集合.
- $R \subseteq W \times (\mathcal{P}(W) \setminus \{\emptyset\})$ で次を満たす：

$$wRV \ \& \ V \subseteq U \Rightarrow wRU.$$

- $\Vdash$ は各 $w \in W$ における充足関係で、特に

$$w \Vdash \Box A : \Longleftrightarrow \forall V \in \mathcal{P}(W)(wRV \Rightarrow \exists y \in V(y \Vdash A)).$$

事実 (cf. Chellas, 1980)

MN は MN-モデル全体に対して健全かつ完全で、更に有限モデル性も持つ.

定理 (Kogure and K.)

$L \in \{\text{MN}, \text{MN4}\}$ とすると,

$L = \text{PL}(\text{Pr}_T)$ となる, M を満たす Σ_1 証明可能性述語 $\text{Pr}_T(x)$ が存在する.

Kogure and K., Arithmetical completeness theorems for monotonic modal logics, 準備中.

単調な証明可能性述語の様相論理 (3/4)

- D2 を満たさない $\text{Pr}_T(x)$ に対して, Con_T と Con_T^S が一般には同値ではなかった.
- それぞれに対応する異なる公理 P と D を MN に追加する.

MNP と MND

- $\text{MNP} = \text{MN} + \neg \Box \perp$
- $\text{MND} = \text{MN} + \neg(\Box A \wedge \Box \neg A)$

算術的完全性という観点からも, これらの区別を行うことができた.

定理 (Kogure and K.)

$L \in \{\text{MNP}, \text{MND}, \text{MNP4}\}$ とすると,

$L = \text{PL}(\text{Pr}_T^R)$ となる, M を満たす Rosser 証明可能性述語 $\text{Pr}_T^R(x)$ が存在する.

$\text{Pr}_T(x)$ が条件 M と D3 を満たせば $T \not\vdash \text{Con}_T^S$ だったので, 次が予想される.

予想

任意の $\text{Pr}_T(x)$ について, $\text{PL}(\text{Pr}_T) \not\vdash \text{MND4}$.

今後の研究

今回考えた次の問いはまだまだ分析の余地がある。

問

- ① Σ_1 ではない $\tau(v)$ に基づく Feferman 的な $\text{Pr}_\tau(x)$ の証明可能性論理は？
- ② Feferman 的ではない $\text{Pr}_T(x)$ の証明可能性論理は？
- ③ $L = \text{PL}(\text{Pr}_T)$ となる $\text{Pr}_T(x)$ がとれるような L とは？

未解決問題

関係意味論ではない，例えば近傍意味論を持つ論理（EN とか）に対する算術的完全性を示せるか？

様相論理 EN の公理と推論規則

公理 恒真式のみ。

規則 モダス・ポネンス $\frac{A \quad A \rightarrow B}{B}$ と $\frac{A \leftrightarrow B}{\Box A \leftrightarrow \Box B}$ と

ネセシテーション $\frac{A}{\Box A}$ 。