

R と無矛盾な理論の不完全性と決定不可能性

倉橋 太志
神戸大学システム情報学研究科

証明論シンポジウム 2022 (2022/12/19 (月) ~21 (水))
2022 年 12 月 19 日

概要

概要

- 第一不完全性定理は弱い算術 R に対して成立する.
- 第一不完全性定理は理論の決定不可能性と密接に関わり, 特に R の本質的決定不可能性が分かる.
- 有限かつ本質的決定不可能な理論はより強い性質を持つ.
- 今回は, R が有限公理化不可能であるにも関わらずこの性質を持つ, という Cobham の定理および, それを導く Vaught の定理について調べる.

本発表は次の論文に基づく.

T. Kurahashi. “Incompleteness and undecidability of theories consistent with R ”, arXiv:2211.15455, 2022.

Albert Visser 氏の次の論文はほとんど同じ主題でもっとたくさん話題を扱っている.

A. Visser. “Essential hereditary undecidability”, arXiv:2212.03565, 2022.

内容

- ① 背景 (Cobham と Vaught の定理)
- ② 研究結果
- ③ 強再帰的分離不可能性

内容

- ① 背景 (Cobham と Vaught の定理)
- ② 研究結果
- ③ 強再帰的分離不可能性

第一不完全性定理

今回は算術の言語 $\mathcal{L}_A = \{0, s, +, \times, \leq\}$ の理論を考える.

Gödel–Rosser の第一不完全性定理 (1931; 1936)

T を PA の無矛盾な RE 拡大理論とすると, T は不完全.

定義

理論 T が**本質的不完全** : $\iff T$ の任意の無矛盾な RE 拡大理論が不完全.

Gödel–Rosser の第一不完全性定理の言い換え

PA は本質的不完全.

- PA の不完全性から, PA の部分理論もまた不完全なのは当たり前.
- PA の部分理論が本質的不完全かどうかは非自明.
- 本質的不完全なできるだけ弱い PA の部分理論を探す研究は古くから行われてきた.

Robinson 算術 Q

Robinson (1952) によって導入された理論 Q は非常に弱い。

定義

理論 Q は次の公理からなる：

$$\mathbf{Q1} \quad \forall x (s(x) \neq 0)$$

$$\mathbf{Q2} \quad \forall x \forall y (s(x) = s(y) \rightarrow x = y)$$

$$\mathbf{Q3} \quad \forall x \exists y (x \neq 0 \rightarrow x = s(y))$$

$$\mathbf{Q4} \quad \forall x (x + 0 = x)$$

$$\mathbf{Q5} \quad \forall x \forall y (x + s(y) = s(x + y))$$

$$\mathbf{Q6} \quad \forall x (x \times 0 = 0)$$

$$\mathbf{Q7} \quad \forall x \forall y (x \times s(y) = (x \times y) + x)$$

$$\mathbf{Q8} \quad \forall x \forall y (\exists z (z + x = y) \leftrightarrow x \leq y)$$

$\text{PA} \vdash \text{Q}$. ($\text{PA} = \text{Q} +$ 帰納法公理図式)

定理 (Robinson, 1952)

Q は本質的不完全。

Tarski, Mostowski, and Robinson の算術 R

Q より弱い次の理論 R は Tarski, Mostowski, and Robinson (1953) によって導入された。

各自然数 n に対して, $\mathcal{L}_A$ -項 $\bar{n}$ を $s(\cdots s(0)\cdots)$ (n 個の s) とする。

定義

理論 R は次の公理からなる：

$$\mathbf{R1} \quad \overline{m} + \bar{n} = \overline{m + n}$$

$$\mathbf{R2} \quad \overline{m} \times \bar{n} = \overline{m \times n}$$

$$\mathbf{R3} \quad \overline{m} \neq \bar{n} \quad (m \neq n \text{ のとき})$$

$$\mathbf{R4} \quad \forall x (x \leq \bar{n} \rightarrow \bigvee_{i \leq n} x = \bar{i})$$

$$\mathbf{R5} \quad \forall x (x \leq \bar{n} \vee \bar{n} \leq x)$$

$Q \vdash R$.

定理 (Tarski, Mostowski, and Robinson, 1953)

R は本質的不完全。

R の本質的決定不可能

不完全性は決定不可能性と密接な関係を持つ。

定義

- 理論 T が**決定可能** : $\iff \text{Th}(T) = \{\varphi \mid T \vdash \varphi \text{ \& } \varphi \text{ は文} \}$ が再帰的 (計算可能) .
- 理論 T が**本質的決定不可能** : $\iff T$ の任意の無矛盾な拡大理論は決定不可能.

事実

理論 T は本質的不完全 $\iff T$ は本質的決定不可能.

Proof.

($\Rightarrow$): 決定可能かつ無矛盾な理論は決定可能かつ無矛盾な完全拡大理論を持つので.

($\Leftarrow$): RE かつ完全な理論は決定可能なので. □

第一不完全性定理の言い換え

R は本質的決定不可能.

本質的遺伝的決定不可能性

- PA と R は有限公理化不可能.
- 理論 Q は有限個の公理からなるが、これが重要.

定義

- 理論 T が**遺伝的決定不可能** : $\iff$ 同じ言語の T の任意の部分理論は決定不可能.
- 理論 T が**本質的遺伝的決定不可能**
: $\iff T$ の任意の無矛盾な拡大理論は遺伝的決定不可能.

本質的遺伝的決定不可能という用語は Visser (2022) による.

命題 (Visser, 2022)

T は本質的遺伝的決定不可能 $\iff T + U$ が無矛盾な理論 U は決定不可能.

Proof.

($\Rightarrow$): U は T の無矛盾な拡大 $T + U$ の部分理論なので.

($\Leftarrow$): T の無矛盾な拡大理論 S について, $T + S$ は無矛盾.
 S の部分理論 U について, $T + U$ は無矛盾.



本質的遺伝的決定不可能性と本質的決定不可能性

本質的遺伝的決定不可能性は本質的決定不可能性より真に強い。

定理 (Ehrenfeucht, 1957; Putnum, 1957)

本質的決定不可能だが遺伝的決定不可能ではない RE 理論が存在する。
(ただしこの例は $\mathcal{L}_A$ -理論ではない)

他方、理論が有限であれば逆が成立する。

命題 (Tarski, Mostowski, and Robinson, 1953)

T が有限かつ本質的決定不可能 $\Rightarrow T$ は本質的遺伝的決定不可能。

Proof.

$T + U$ が無矛盾とすると、 $T + U$ は決定不可能。

$T + U \vdash \varphi \iff U \vdash \bigwedge T \rightarrow \varphi$ より、 U が決定可能なら $T + U$ が決定可能。 $\square$

A. Ehrenfeucht. "Two theories with axioms built by means of pleonasms". *The Journal of Symbolic Logic*, 22:36–38, 1957.

H. Putnam. "Decidability and essential undecidability". *The Journal of Symbolic Logic*, 22:39–54, 1957.

Q の本質的遺伝的決定不可能性

Q は有限かつ本質的決定不可能なので、次が成り立つ。

系

Q は本質的遺伝的決定不可能。

Q の本質的遺伝的決定不可能性から、いろいろな理論の決定不可能性が導ける。

系

言語 $\mathcal{L}_A$ の述語論理は決定不可能。

解釈可能性を通じて、 $\mathcal{L}_A$ 以外の言語の理論の決定不可能性の議論ができる。

系

T のある無矛盾拡大理論 が Q を解釈するなら、 T は遺伝的決定不可能。

例えば、群の理論はある無矛盾拡大で Q を解釈できるので遺伝的決定不可能。

R の本質的遺伝的決定不可能性

- R は有限公理化可能ではない Q の部分理論なので、その本質的遺伝的決定不可能性は非自明.
- Cobham は Tarski と Vaught との間の書簡において次の定理の証明を行った.

定理 (Cobham, 1957)

R は本質的遺伝的決定不可能.

- Cobham による証明は残されていない.
- Cobham の定理は Vaught による論文において紹介されており、更に Vaught は Cobham の定理を導く 2 個の定理を述べている.
- まずは 1 個目が次の主張 (2 個目は後ほど紹介する).

定理 (Vaught, 1962)

$R + U$ が無矛盾である RE 理論 U に対し、有限理論 S が存在して、 $S \vdash R$ かつ $S + U$ が無矛盾となる.

R. L. Vaught. "On a theorem of Cobham concerning undecidable theories". Logic, Methodology and Philosophy of Science, Proc. 1960 Int. Congr. 14–25 (1962).

Vaught $\Rightarrow$ Cobham

定理 (Vaught, 1962) 【再掲】

$R + U$ が無矛盾である RE 理論 U に対し, 有限理論 S が存在して,
 $S \vdash R$ かつ $S + U$ が無矛盾となる.

Vaught の定理は実際に, R の本質的遺伝的決定不可能性を導く.

Proof.

$R + U$ が無矛盾である理論 U をとると, $R + \text{Th}(U)$ も無矛盾.

$\text{Th}(U)$ が RE でなければ U は決定不可能なので, RE と仮定してよい.

Vaught の定理より, 有限理論 S があって, $S \vdash R$ かつ $S + \text{Th}(U)$ が無矛盾となる.

R は本質的決定不可能なので, S もそう.

S は有限なので本質的遺伝的決定不可能.

$S + U$ が無矛盾なので U は決定不可能. □

- Vaught はこの定理の証明を **書いていない**.
- 本研究の目的は Vaught の定理の証明を再発見し, 拡張すること.

内容

- ① 背景 (Cobham と Vaught の定理)
- ② **研究結果**
- ③ 強再帰的分離不可能性

Visser による Cobham の定理の証明

- Cobham の定理の証明は, Visser (2017) によって理解しやすいものが与えられている.
- しかし Visser による証明は解釈可能性を用いており, そのままでは Vaught の定理の証明には使えない.
- 今回は Visser の証明を改良することで Vaught の定理の証明を得た.
- まずは Visser による Cobham の定理の概要を紹介し, 続いて今回の改良点を説明する.

A. Visser. “On Q”. *Soft Computing*, 21(1):39–56, 2017.

Pure な Δ_0 と Σ_1 論理式

Visser のアイディアは、たくさんの有限理論 $[\sigma]$ を用意し、その中から欲しい条件を満たすものを見つけ出すこと。

定義

① Δ_0 論理式が **pure** : $\iff$ 次の条件を満たす：

- $\rightarrow$ を含まない。
- $\neg$ は全て原子論理式についている。
- $t_1 \leq t_2$ という形の原子論理式は t_1 と t_2 が変数。
- $t_1 = t_2$ という形の原子論理式は $0 = x, x = y, s(x) = y, x + y = z, x \times y = z$ (x, y, z は変数) のどれかの形をしている。

② Σ_1 論理式が **pure** : $\iff$

ある pure な Δ_0 論理式 $\varphi(\vec{x})$ について $\exists \vec{x}\varphi(\vec{x})$ という形。

命題 (Visser, 2017)

任意の Σ_1 論理式 $\varphi(\vec{x})$ に対して、pure な Σ_1 論理式 $\varphi^\circ(\vec{x})$ で $\mathbb{N} \models \forall \vec{x}(\varphi(\vec{x}) \leftrightarrow \varphi^\circ(\vec{x}))$ となるものが effective にとれる。

理論 TN

定義

次の公理からなる理論を TN という：

$$\text{TN1 } \forall x (x \neq 0)$$

$$\text{TN2 } \forall x \forall y \forall z (x < y \wedge y < z \rightarrow x < z)$$

$$\text{TN3 } \forall x \forall y (x < y \vee x = y \vee y < x)$$

$$\text{TN4 } \forall x (x \neq 0 \rightarrow \exists y (x = s(y)))$$

$$\text{TN5 } \forall x (s(x) \neq x)$$

$$\text{TN6 } \forall x \forall y (x < y \rightarrow x < s(x) \wedge y \neq s(x))$$

$$\text{TN7 } \forall x (x + 0 = x)$$

$$\text{TN8 } \forall x \forall y (x + s(y) = s(x + y))$$

$$\text{TN9 } \forall x (x \times 0 = 0)$$

$$\text{TN10 } \forall x \forall y (x \times s(y) = (x \times y) + x)$$

- $R \not\models \text{TN}$ だが $R \triangleright \text{TN}$ (TN は R において解釈可能) .
- $\text{TN} \not\models R$.

理論 $[\sigma]$

定義

Pure な Σ_1 文 $\sigma \equiv \exists \vec{x} \varphi(\vec{x})$ について, 理論 $[\sigma]$ を次で定める:

$$[\sigma] := \text{TN} + \exists v \exists \vec{x} < v \varphi(\vec{x})$$

TN に σ の witness をすべて bound する元の存在を主張する公理を加えた有限理論.

定義

Pure な Σ_1 文 $\sigma \equiv \exists \vec{x} \varphi(\vec{x})$ について, 文 σ^* を

“ $\{0, 1, \dots, n\} \models [\sigma]$ となる最小の n が存在する”
という $\mathcal{L}_A$ -文とする.

定理 (Visser, 2017)

任意の pure な Σ_1 文 σ について

- ① R の有限部分理論 S があって $(S + \sigma^*) \triangleright [\sigma]$.
- ② $\mathbb{N} \models \sigma \Rightarrow R \vdash \sigma^*$.
- ③ $\mathbb{N} \models \neg \sigma \Rightarrow [\sigma] \vdash R$.

この定理を用いれば Cobham の定理が証明できる.

証明の問題点

- 理論 TN をベースにして $[\sigma]$ が定められており, $R \not\models \text{TN}$ なので $R \not\models [\sigma]$.
- Visser はこれを回避するために文 σ^* を用意している.
- σ^* と $[\sigma]$ をつなぐために解釈可能性を用いている.
- そのために, そのままでは Vaught の証明には使用できない.
- このあたりの状況の無駄を省き, すっきりさせればよい.

証明の改良

定義

次の Δ_0 論理式の conjunction を $\theta(v)$ とかく：

- $0 \leq v$
- $\forall x < v (s(x) \leq v)$
- $\forall x \leq 0 (x = 0)$
- $\forall x \leq v \forall y \leq s(x) (y \leq x \vee y = s(x))$
- $\forall x, y, z \leq v (s((x \times y) + z) \neq 0)$
- $\forall x, y, z, w \leq v (s((x \times y) + z) = s(w) \rightarrow (x \times y) + z = w)$
- $\forall x, y \leq v ((x \times y) + 0 = x \times y)$
- $\forall x, y, z \leq v ((x \times y) + s(z) = s((x \times y) + z))$
- $\forall x \leq v (x \times 0 = 0)$
- $\forall x, y \leq v (x \times s(y) = (x \times y) + x)$
- $\forall x, y, z \leq v (x + y = z \rightarrow y \leq z)$

Pure な Σ_1 文 $\sigma \equiv \exists \vec{x} \varphi(\vec{x})$ について,

$$[\sigma]' := \exists v (\theta(v) \wedge \exists \vec{x} \leq v \varphi(\vec{x}) \wedge \forall x \leq v \forall y (y \leq x \vee x \leq y)).$$

Vaught の定理の別証明

定理 (K.)

任意の pure な Σ_1 文 σ について

- ① $\mathbb{N} \models \sigma \Rightarrow R \vdash [\sigma]'$.
- ② $\mathbb{N} \models \neg\sigma \Rightarrow [\sigma]' \vdash R$.

これを用いれば Visser によるものよりも簡潔に更に Vaught の定理が証明できる。

定理 (Vaught, 1962) 【再掲】

$R + U$ が無矛盾である RE 理論 U に対し, 有限理論 S が存在して,
 $S \vdash R$ かつ $S + U$ が無矛盾となる。

Vaught の定理の別証明.

$R + U$ が無矛盾となる RE 理論 U をとる。

不動点定理より $\mathbb{N} \models \sigma \leftrightarrow \text{Pr}_U(\ulcorner \neg[\sigma]'\urcorner)$ となる pure な Σ_1 文 σ がとれる。

もし $\mathbb{N} \models \sigma$ なら $\mathbb{N} \models \text{Pr}_U(\ulcorner \neg[\sigma]'\urcorner)$ つまり $U \vdash \neg[\sigma]'$ 。

定理 (1) より $R \vdash [\sigma]'$ なので $R + U$ の無矛盾性に反する。

よって $\mathbb{N} \models \neg\sigma$ なので $U \not\vdash \neg[\sigma]'$ で $[\sigma]' + U$ は無矛盾。

定理 (2) より $[\sigma]' \vdash R$.



主定理

証明中の不動点の取り方を工夫すれば, Vaught の定理の拡張も得られた.

主定理 (K.)

$\{U_i\}_{i \in \omega}$ を, 全ての $i \in \omega$ について $R + U_i$ が無矛盾である RE 理論の effective な列とすると, $\mathcal{L}_A$ -文 φ があって,

- ① $\varphi \vdash R$
- ② $i \in \omega$ について $R + U_i \not\vdash \varphi$ かつ $R + U_i \not\vdash \neg\varphi$.

- 特に 「 $\varphi \vdash R$ かつ $R + U_i \not\vdash \neg\varphi$ 」 から $\varphi + U_i$ の無矛盾性がいえる.
- またこの定理は第一不完全性定理を RE 理論の effective な列に拡張した Mostowski の定理 (1961) の拡張にもなっている.

A. Mostowski. "A generalization of the incompleteness theorem". *Fundamenta Mathematicae*, 49:205–232, 1961.

内容

- ① 背景 (Cobham と Vaught の定理)
- ② 研究結果
- ③ 強再帰的分離不可能性

再帰的分離不可能性

本質的決定不可能性より強い概念に、再帰的分離不可能性がある。

定義

理論 T が**再帰的分離不可能**

: $\iff \text{Th}(T) \subseteq X$ かつ $\text{Ref}(T) \cap X = \emptyset$ となる再帰的集合 X は存在しない.
 ただし $\text{Th}(T) = \{\varphi \mid T \vdash \varphi \text{ \& } \varphi \text{ は文}\}$ $\text{Ref}(T) = \{\varphi \mid T \vdash \neg\varphi \text{ \& } \varphi \text{ は文}\}.$

事実

T が再帰的分離不可能 $\Rightarrow T$ は本質的決定不可能.

Proof.

T の無矛盾拡大理論 U をとると、 $\text{Th}(T) \subseteq \text{Th}(U)$ かつ $\text{Ref}(T) \cap \text{Th}(U) = \emptyset$ なので、
 $\text{Th}(U)$ は再帰的でない。 □

R の再帰的分離不可能性

定理 (Smullyan, 1958)

無矛盾な理論 T において全ての再帰的集合が表現可能ならば, T は再帰的分離不可能.

系

R は再帰的分離不可能.

また, R の拡大理論も再帰的分離不可能であることもわかる.

R. M. Smullyan. "Undecidability and recursive inseparability". *Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 4: 143–147 (1958).

強再帰的分離不可能性

定義

理論 T が**強再帰的分離不可能**

: $\iff \text{Th}(\emptyset) \subseteq X$ かつ $\text{Ref}(T) \cap X = \emptyset$ となる再帰的集合 X は存在しない。
 ただし, $\text{Th}(\emptyset) = \{\varphi \mid \varphi \text{ は述語論理で証明可能 \& } \varphi \text{ は文}\}$.

- $\text{Th}(\emptyset) \subseteq \text{Th}(T)$ なので, 強再帰的分離不可能ならば再帰的分離不可能.
- 「再帰的分離不可能 $\Rightarrow$ 本質的決定不可能」に対応する次の結果が成立.

事実

T が強再帰的分離不可能 $\Rightarrow T$ は本質的遺伝的決定不可能.

Proof.

$T + U$ が無矛盾とすると, $\text{Th}(\emptyset) \subseteq \text{Th}(U)$ かつ $\text{Ref}(T) \cap \text{Th}(U) = \emptyset$ なので $\text{Th}(U)$ は再帰的ではない. □

事実 (Hanf, 1965 (?))

理論 T が有限かつ再帰的分離不可能ならば T は強再帰的分離不可能.

Vaught の定理

Cobham の定理を導く Vaught による 2 つ目の定理は次の通り.

定理 (Vaught, 1962)

R は強再帰的分離不可能.

主定理は単に Cobham の定理を出すだけではなく, Vaught の 2 個目の定理も導ける.

Vaught の定理の別証明.

$\text{Th}(\emptyset) \subseteq X$ かつ $\text{Ref}(R) \cap X = \emptyset$ となる集合 X をとる.

X が再帰的であるとして矛盾を導く. また X は文の集合としてよい.

X の要素を effective に並べた $\langle \varphi_i \rangle_{i \in \omega}$ について,

$\text{Ref}(R) \cap X = \emptyset$ より $R \not\models \neg \varphi_i$, つまり $R + \varphi_i$ は無矛盾.

主定理より, 有限理論 S があって, $S \vdash R$ かつ全ての $i \in \omega$ について $S + \varphi_i$ は無矛盾.

つまり $\text{Th}(\emptyset) \subseteq X$ かつ $\text{Ref}(S) \cap X = \emptyset$.

S は有限かつ再帰的分離不可能なので, 強再帰的分離不可能.

これは X が再帰的であることに反する.



関係図

