

様相算術における選言・存在特性

倉橋太志（神戸大学）

奥田幹（神戸大学 M2）との共同研究

2021 年 3 月 26 日（金）

2020 年度数学基礎論若手の会（オンライン）

発表の概要

選言特性

選言特性

$\vdash \varphi \vee \psi$ ならば $\vdash \varphi$ または $\vdash \psi$

は

- 直観主義論理ではその構成性を表し、
- 古典論理ではその完全性を表す。

概要

- 直観主義論理と様相論理には結びつきがある。
- ペアノ算術と様相論理を組み合わせた**様相算術**の分析は、直観主義算術の分析のために有用。
- 様相算術における選言特性について、不完全性定理などを絡めながら分析を行う。

内容

- ① 直観主義論理と様相論理
- ② 不完全性定理と選言特性と様相論理
- ③ 今回の研究

内容

- ① 直観主義論理と様相論理
- ② 不完全性定理と選言特性と様相論理
- ③ 今回の研究

はじめに

様相

- 様相論理は命題の真偽だけではなく，
 - 必然的に真
 - 真であることが可能
 - 真であると信じている
 - 真であることを知っている
 - 未来永劫真

など、命題の正しさのあり方（様相）について扱う論理。
 （どの様相を扱うかで、考える論理体系も変化）

- $\Box p$, $\Diamond p$ をそれぞれ「 p は必然的に真」, 「 p は真であることが可能」と読めば，
 - $\Box p \iff \neg \Diamond \neg p$
 - $\Diamond p \iff \neg \Box \neg p$

証明可能性

- **証明可能性**は、命題の正しさを与えるという点で一種の様相。
- $\Box p$ を「 p は証明可能」と読めば、 $\Diamond p$ は「 p は無矛盾」に対応。

はじめに

Gödel (1933) の分析

- ① $\Box p$ を「 p は証明可能」と読んだときに対応するのは様相論理 S4.
- ② 直観主義命題論理 IPC について,

$$\text{IPC} \vdash \varphi \Rightarrow \text{S4} \vdash g(\varphi)$$

となる変換 g がある.

- ③ $\Box p$ を「理論 T で p は証明可能」と読んだときには S4 ではダメ.

- ① 何をしたいのか? (証明可能性, 直観主義論理, 様相論理の関係?)
- ② S4 ならなぜダメで, 何が良いのか?

今からこれらを詳しく紹介していく.

直観主義命題論理 IPC

直観主義命題論理の言語は

- 命題変数 $p_0, p_1, \dots$
- 命題定数 $\perp$
- 論理結合子 $\wedge, \vee, \rightarrow$

$\neg\varphi$ と $\varphi \leftrightarrow \psi$ はそれぞれ $\varphi \rightarrow \perp$ と $(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$ の略記

IPC の公理と推論規則

公理

- $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$
- $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow [(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \gamma)]$
- $\varphi \wedge \psi \rightarrow \varphi, \quad \varphi \wedge \psi \rightarrow \psi$
- $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi \wedge \psi)$
- $\varphi \rightarrow \varphi \vee \psi, \quad \psi \rightarrow \varphi \vee \psi$
- $(\varphi \rightarrow \gamma) \rightarrow [(\psi \rightarrow \gamma) \rightarrow (\varphi \vee \psi \rightarrow \gamma)]$
- $\perp \rightarrow \varphi$

推論規則

$$\text{MP} \quad \frac{\varphi \quad \varphi \rightarrow \psi}{\psi}$$

BHK 解釈

直観主義論理は、

φ が正しい : $\iff \varphi$ は次の意味で証明をもつ

とする、非形式的な解釈 (BHK 解釈) をもつ。

BHK 解釈 (Kreisel による修正版)

- ① 命題変数 p_i の証明とは何か、は文脈から判断できるとする
- ② $\perp$ の証明はない
- ③ $\varphi \wedge \psi$ の証明とは φ の証明 P と ψ の証明 Q の組 (P, Q)
- ④ $\varphi \vee \psi$ の証明とは組 (i, P) で、 $i = 0$ かつ P が φ の証明、か、 $i = 1$ かつ P が ψ の証明のどちらか
- ⑤ $\varphi \rightarrow \psi$ の証明とは組 (f, Q) で、 f は
 φ の任意の証明 P に対して $f(P)$ は ψ の証明
 を満たす変換で、 Q はそのことの証明。

$\text{IPC} \vdash \varphi$ ならば φ は BHK 解釈で正しい。

選言特性

定理 (Gödel, 1932)

$IPC \vdash \varphi \vee \psi$ ならば $IPC \vdash \varphi$ または $IPC \vdash \psi$.

- この定理から、IPC が BHK 解釈の精神をうまく反映していることが読みとれる。
- この性質を選言特性という。

定義 (選言特性 DP)

論理 L が**選言特性 (DP)**を持つ

: $\iff$ 全ての論理式 φ, ψ について,

$L \vdash \varphi \vee \psi$ ならば $L \vdash \varphi$ または $L \vdash \psi$

を満たす.

- Gödel は（おそらく BHK 解釈を念頭に置いて）直観主義論理の論理式を，証明可能性の様相 $\Box$ を用いて書き換える方法を与えた．

定義（Gödel 変換）

- $g(p_i) \equiv \Box p_i$
 - $g(\perp) \equiv \perp$
 - $g(\varphi \wedge \psi) \equiv g(\varphi) \wedge g(\psi)$
 - $g(\varphi \vee \psi) \equiv g(\varphi) \vee g(\psi)$
 - $g(\varphi \rightarrow \psi) \equiv \Box(g(\varphi) \rightarrow g(\psi))$
- $\Box$ が証明可能性を表す，という状況をうまく設定できれば
 φ が直観主義の観点で正しい $\iff g(\varphi)$ が古典的な観点で正しい
 が成り立つはず．

形式的な問い

$\text{IPC} \vdash \varphi \iff M \vdash g(\varphi)$
 となる様相論理 M は何か？

様相命題論理

- 様相命題論理の言語は、直観主義命題論理の言語に 1 項様相演算子 $\Box$ を加えたもの。
- $\Diamond\varphi$ は $\neg\Box\neg\varphi$ の略記とする。

定義（様相論理 K の公理と推論規則）

公理

- 様相命題論理の言語のトートロジー（つまり古典論理）
- $\Box(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\varphi \rightarrow \Box\psi)$

推論規則

$$\text{MP} \quad \frac{\varphi \quad \varphi \rightarrow \psi}{\psi}$$

$$\text{N} \quad \frac{\varphi}{\Box\varphi}$$

定義（正規様相論理）

K を含み, MP, N, 代入で閉じている様相論理を **正規様相論理** という。

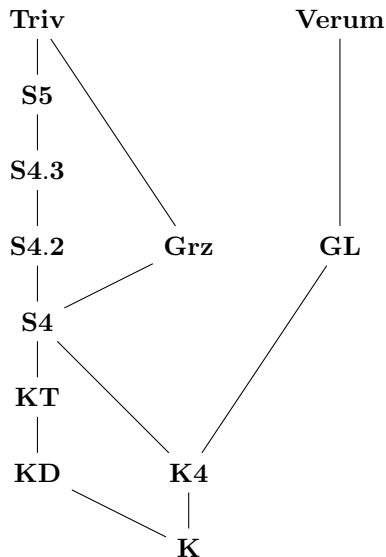
正規様相論理

K に公理図式を加えることで、いろいろな正規様相論理が得られる。

定義 (いろいろな正規様相論理)

- $\mathbf{KD} = \mathbf{K} + \neg \Box \perp$
- $\mathbf{KT} = \mathbf{K} + \Box \varphi \rightarrow \varphi$
- $\mathbf{K4} = \mathbf{K} + \Box \varphi \rightarrow \Box \Box \varphi$
- $\mathbf{S4} = \mathbf{KT} + \Box \varphi \rightarrow \Box \Box \varphi$
- $\mathbf{S4.2} = \mathbf{S4} + \Diamond \Box \varphi \rightarrow \Box \Diamond \varphi$
- $\mathbf{S4.3} = \mathbf{S4} + \Box(\Box \varphi \rightarrow \psi) \vee \Box(\Box \psi \rightarrow \varphi)$
- $\mathbf{S5} = \mathbf{KT} + \Diamond \varphi \rightarrow \Box \Diamond \varphi$
- $\mathbf{Triv} = \mathbf{K} + \Box \varphi \leftrightarrow \varphi$
- $\mathbf{Grz} = \mathbf{K} + \Box(\Box(\varphi \rightarrow \Box \varphi) \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi$
- $\mathbf{GL} = \mathbf{K} + \Box(\Box \varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \Box \varphi$
- $\mathbf{Verum} = \mathbf{K} + \Box \perp$

正規様相論理の強さ



Gödel–Tarski–McKinsey の定理

$\Box\varphi$ を「 φ は何らかの正しい手法で証明できる」と読めば

- $\Box(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\varphi \rightarrow \Box\psi)$ は MP
- $\Box\varphi \rightarrow \varphi$ は健全性
- $\Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi$ は証明の有限性より成立

なので, S4 が対応しそう.

定理

- (Gödel, 1933) $\text{IPC} \vdash \varphi \Rightarrow \text{S4} \vdash g(\varphi)$
- (McKinsey and Tarski, 1948) $\text{S4} \vdash g(\varphi) \Rightarrow \text{IPC} \vdash \varphi$

更に次も成り立つ.

定理 (Grzegorczyk, 1967)

$$\text{IPC} \vdash \varphi \iff \text{Grz} \vdash g(\varphi)$$

McKinsey and Tarski, “Some theorems about the sentential calculi of Lewis and Heyting”, 1948

Grzegorczyk, “Some relational systems and the associated topological spaces”, 1967

Modal companion

定義 (超直観主義論理)

IPC を含み, MP と代入で閉じている論理を **超直観主義論理** という.

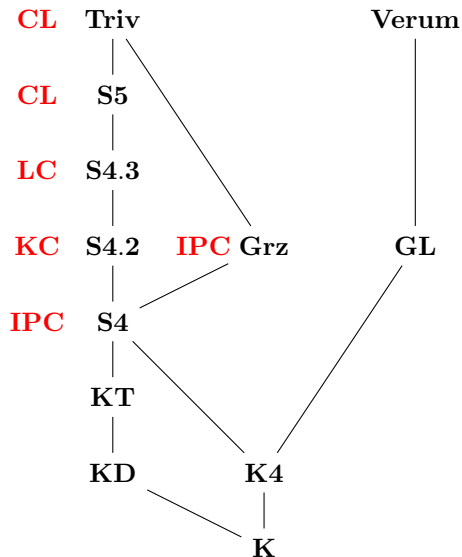
定義 (Modal companion)

正規様相論理 M が超直観主義論理 L の **modal companion**

: $\Longleftrightarrow M$ は S4 を含み, 全ての論理式 φ について
 $L \vdash \varphi \Longleftrightarrow M \vdash g(\varphi)$.

超直観主義論理	modal companions
CL = IPC + $\varphi \vee \neg\varphi$	S5, Triv
LC = IPC + $(\varphi \rightarrow \psi) \vee (\psi \rightarrow \varphi)$	S4.3
KC = IPC + $\neg\varphi \vee \neg\neg\varphi$	S4.2
IPC	S4, Grz

S4 の拡大と modal companions



様相選言特性

様相論理の分析が超直観主義論理の分析につながる！

定義（様相選言特性 MDP）

様相論理 M が**様相選言特性 (MDP)**を持つ

: $\iff$ 全ての論理式 φ, ψ について,

$M \vdash \Box\varphi \vee \Box\psi$ ならば $M \vdash \varphi$ または $M \vdash \psi$.

命題

超直観主義論理 L が MDP を持つ modal companion を持つなら,
 L は DP を持つ.

Proof.

$L \vdash \varphi \vee \psi$ なら $M \vdash g(\varphi) \vee g(\psi)$.

$S4 \vdash g(\gamma) \rightarrow \Box g(\gamma)$ なので $M \vdash \Box g(\varphi) \vee \Box g(\psi)$.

MDP より $M \vdash g(\varphi)$ または $M \vdash g(\psi)$.

$L \vdash \varphi$ または $L \vdash \psi$. □

- S4 の MDP から IPC の DP が従う

述語論理への拡張

定義 (述語論理の Gödel 変換)

述語論理における Gödel 変換 g は命題論理のものに次を加えたもの:

- $g(\forall x\varphi) \equiv \Box\forall xg(\varphi)$
- $g(\exists x\varphi) \equiv \exists xg(\varphi)$

- IQC: 直観主義述語論理
- QS4: S4 の述語論理版

定理 (Rasiowa and Sikorski, 1953; Maehara, 1954)

QS4 は IQC の modal companion.

更にこれを算術に拡張する.

Heyting 算術

Heyting 算術は言語 $\mathcal{L}_A = \{0, S, +, \times, =\}$ をもつ, IQC 上の理論:

Heyting 算術 HA の公理

- 等号公理
- $\forall x \neg (S(x) = 0)$
- $\forall x \forall y (S(x) = S(y) \rightarrow x = y)$
- $\forall x (x + 0 = x)$
- $\forall x \forall y (x + S(y) = S(x + y))$
- $\forall x (x \times 0 = 0)$
- $\forall x \forall y (x \times S(y) = (x \times y) + x)$
- $\varphi(0) \wedge \forall x (\varphi(x) \rightarrow \varphi(S(x))) \rightarrow \forall x \varphi(x)$ ($\varphi(x)$ は $\mathcal{L}_A$ -論理式)

存在特性

$\bar{n}$ を $\mathcal{L}_A$ -項 $S(S(\cdots S(0)\cdots))$ とする (S を n 個) .

定義 (存在特性 EP)

$\mathcal{L}_A$ -理論 T が**存在特性 (EP)**を持つ

: $\Longleftrightarrow x$ 以外を自由変数に持たない論理式 $\varphi(x)$ について,
 $T \vdash \exists x \varphi(x)$ ならば, ある自然数 n があって $T \vdash \varphi(\bar{n})$.

定理 (Kleene, 1945)

HA は DP と EP を持つ.

定理 (Friedman, 1975)

HA の RE 拡大理論に対して, $DP \Longleftrightarrow EP$.

問い

- これらの状況を, 様相論理の観点から分析できないか?
- HA の modal companion は何?

PA と EA

- Peano 算術 PA は $HA + \varphi \vee \neg\varphi$ (排中律)
- Shapiro は, PA に S4 を加えることで得られる様相算術 EA (Epistemic Arithmetic) を導入した.

EA (Shapiro, 1985)

- 様相算術の言語 $\mathcal{L}_A(\Box)$ は $\mathcal{L}_A$ に $\Box$ を加えたもの.
- EA の公理は PA の公理に $\mathcal{L}_A(\Box)$ の論理公理と帰納法公理, $\Box(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\varphi \rightarrow \Box\psi)$, $\Box\varphi \rightarrow \varphi$, $\Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi$ を加えたもの
- EA の推論規則は MP $\frac{\varphi \quad \varphi \rightarrow \psi}{\psi}$, GEN $\frac{\varphi}{\forall x\varphi}$, N $\frac{\varphi}{\Box\varphi}$
- EA は PA に加えて, 数学者が算術について何を証明しうるのか, について推論する枠組み.

定理 (Shapiro, 1985; Goodman, 1984)

EA は HA の modal companion.

Goodman, "Epistemic arithmetic is a conservative extension of intuitionistic arithmetic", 1984.

Shapiro, "Epistemic and intuitionistic arithmetic", 1985.

様相存在特性

EA の性質を分析することも HA の分析につながる。

定義（様相存在特性 MEP）

$\mathcal{L}_A(\Box)$ -理論 T が様相存在特性 (MEP) を持つ

: $\iff x$ 以外を自由変数に持たない論理式 $\varphi(x)$ について,
 $T \vdash \exists x \Box \varphi(x)$ ならば, ある自然数 n があって $T \vdash \varphi(\bar{n})$

定理 (Shapiro, 1985)

EA は MDP と MEP を持つ。

- EA は HA の modal companion なので, これから HA の DP と EP も導ける。
- Friedman の定理のアナロジーも成立。

定理 (Friedman and Sheard, 1989)

EA の RE 拡大理論に対して, $MDP \iff MEP$.

最初の結果

定義

HA の RE 拡大理論 T に対して,
 $\tau T := \text{EA} + \{g(\varphi) \mid T \vdash \varphi \text{ かつ } \varphi \text{ は文}\}$

定理 (K. & O.)

HA の RE 拡大理論 T に対して,
 T は DP をもつ $\iff \tau T$ は MDP をもつ.

- 命題論理に対する Zakharyashchev (1991) の結果の算術版.
- この意味で, HA の DP と EA の MDP は同値.

目標

様相算術における MDP や MEP 周辺の状況を分析し, 整理する!

目標を急がず, 一度不完全性定理の話に移行する.

Zakharyashchev, "Modal companions of superintuitionistic logics: Syntax, semantics, and preservation theorems", 1991.

内容

- ① 直観主義論理と様相論理
- ② 不完全性定理と選言特性と様相論理
- ③ 今回の研究

不完全性定理

第 1 不完全性定理 (Gödel, 1931; Rosser, 1936)

PA の無矛盾な RE 拡大理論 T は不完全.

すなわち $T \not\vdash \varphi$ かつ $T \not\vdash \neg\varphi$ となる文 φ が存在する.

第 2 不完全性定理 (Gödel, 1931)

PA の無矛盾な RE 拡大理論 T は T の無矛盾性を証明できない.

- 第 1 不完全性定理は選言特性と関係がある.
- 第 2 不完全性定理は様相論理と関係がある.

Gödel, "Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme, I", 1931.

Rosser, "Extensions of some theorems of Gödel and Church", 1936.

内容

- ① 直観主義論理と様相論理
- ② 不完全性定理と選言特性と様相論理
 - 第 1 不完全性定理と選言特性
 - 第 2 不完全性定理と様相論理
- ③ 今回の研究

古典論理における選言特性

古典論理では選言特性は完全性と同値.

命題

古典論理の無矛盾な理論 T が DP を持つ $\iff T$ は完全.

Proof.

$(\Rightarrow)$: φ を任意の文とすると, $T \vdash \varphi \vee \neg\varphi$.

DP より $T \vdash \varphi$ または $T \vdash \neg\varphi$.

$(\Leftarrow)$: 対偶を示す.

$T \not\vdash \varphi$ かつ $T \not\vdash \psi$ とする.

完全性より $T \vdash \neg\varphi$ かつ $T \vdash \neg\psi$.

$T \vdash \neg\varphi \wedge \neg\psi$ すなわち $T \vdash \neg(\varphi \vee \psi)$ なので T の無矛盾性より

$T \not\vdash \varphi \vee \psi$. □

第 1 不完全性定理の言い換え (Gödel, 1931; Rosser, 1936)

PA の無矛盾な RE 拡大理論 T は DP を持たない.

第 1 不完全性定理の拡張

第 1 不完全性定理は次のように拡張できる。

定義 (Γ -DP, Γ -EP)

- 理論 T が **Γ -DP** を持つ : $\iff$ 任意の Γ 文 φ, ψ について,
 $T \vdash \varphi \vee \psi$ ならば $T \vdash \varphi$ または $T \vdash \psi$.
- 理論 T が **Γ -EP** を持つ : $\iff x$ 以外を自由変数に持たない任意
の Γ 論理式 $\varphi(x)$ について,
 $T \vdash \exists x \varphi(x)$ ならば, ある自然数 n があって $T \vdash \varphi(\bar{n})$.

定理 (Jensen and Ehrenfeucht, 1976)

PA の無矛盾な RE 拡大理論 T は Π_1 -DP を持たない。

Σ_1 -DP

Σ_1 -DP については、持つ理論と持たない理論がある。

定義 (Γ -健全性)

理論 T が Γ -健全 : $\iff$

任意の Γ 文 φ について, $T \vdash \varphi$ ならば $\mathbb{N} \models \varphi$.

定理 (Guaspari, 1979)

PA の無矛盾な RE 拡大理論に対して,

$$\Sigma_1\text{-DP} \iff \Sigma_1\text{-EP} \iff \Sigma_1\text{-健全}.$$

宣伝 Γ -DP や Γ -EP は PA の拡大理論上で肥沃な構造を持っている
(Kurahashi, 2018)

Guaspari, "Partially conservative extensions of arithmetic", 1979.

Kurahashi, "On partial disjunction properties of theories containing Peano arithmetic", 2018.

内容

- ① 直観主義論理と様相論理
- ② 不完全性定理と選言特性と様相論理
 - 第 1 不完全性定理と選言特性
 - 第 2 不完全性定理と様相論理
- ③ 今回の研究

第 2 不完全性定理と様相論理

- 不完全性定理の証明においては、
 “ x は T において証明可能”
 を意味する Σ_1 論理式 $\text{Pr}_T(x)$ (T の証明可能性述語)
 で、導出可能性条件を満たすものを作ることが重要。

導出可能性条件

任意の論理式 φ, ψ について、

$$\mathbf{D1} \quad T \vdash \varphi \Rightarrow \mathbf{PA} \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$$

$$\mathbf{D2} \quad \mathbf{PA} \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \rightarrow \psi \urcorner) \rightarrow (\text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner))$$

$$\Sigma_1\mathbf{C} \quad \varphi \text{ が } \Sigma_1 \text{ 文ならば } \mathbf{PA} \vdash \varphi \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$$

$$\mathbf{D3} \quad \mathbf{PA} \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \urcorner)$$

ただし $\ulcorner \varphi \urcorner$ は φ のコード (Gödel 数) を表す数項。

第 2 不完全性定理

$\mathbf{PA}$ の無矛盾な $\mathbf{RE}$ 拡大理論 T について、 $T \not\vdash \text{Con}_T$ 。

ただし $\text{Con}_T := \neg \text{Pr}_T(\ulcorner 0 = \bar{1} \urcorner)$ 。

S4 は「 T における証明可能性」の様相論理ではない

Gödel (1933) の分析

- $S4 \vdash \Box(\Box\perp \rightarrow \perp)$, つまり $S4 \vdash \Box\neg\Box\perp$
- $\Box p$ を「 p は T において証明可能」と読めば,
 $\neg\Box\perp$ は Con_T を表す
- $\Box\neg\Box\perp$ は $T \vdash Con_T$ を表すので第二不完全性定理に反する
- 従って $S4$ は「 T における証明可能性」の様相論理ではない

問い

「 T における証明可能性」の様相論理は何か？

Löb の定理と算術的完全性定理

第二不完全性定理の拡張ともいえる Löb の定理が重要.

定理 (Löb, 1955)

PA の RE 拡大理論 T について,

- ① $T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \varphi$ ならば $T \vdash \varphi$.
 - ② $\text{PA} \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$
- $\text{GL} = \text{K} + \Box(\Box\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \Box\varphi$ は導出可能性条件と Löb の定理に対応する公理を持つ.

算術的完全性定理 (Solovay, 1976)

T が PA の Σ_1 -健全な RE 拡大理論ならば,
「 T における証明可能性」の様相論理は GL.

Löb, "Solution of a problem of Leon Henkin", 1955.

Solovay, "Provability interpretations of modal logic", 1976.

GL と Grz

- GL は K4 を含むが S4 とは矛盾する.
- しかし, GL は Grz ($\supseteq$ S4) と密接な関わりを持つ.

$\Box\varphi$ を $\varphi \wedge \Box\varphi$ の略記とする.

定義 (boxdot 変換)

様相論理式 φ の中の $\Box$ を全て $\Box\cdot$ で置き換えて得られる論理式を $\varphi^{\Box\cdot}$ とかく.

定理 (Goldblatt, 1978; Boolos, 1980)

$$\text{Grz} \vdash \varphi \iff \text{GL} \vdash \varphi^{\Box\cdot}$$

IPC と GL (つまり証明可能性) には関係が得られた.

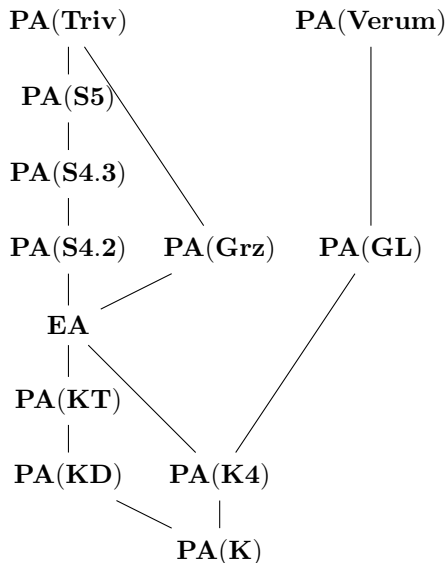
系

$$\text{IPC} \vdash \varphi \iff \text{Grz} \vdash g(\varphi) \iff \text{GL} \vdash (g(\varphi))^{\Box\cdot}$$

内容

- ① 直観主義論理と様相論理
- ② 不完全性定理と様相論理
- ③ 今回の研究

- PA に様相論理 M を加えて得られる理論を $PA(M)$ とする.
- $EA = PA(S4)$ であり, それ以外は全然研究されていない.



- 第 2 不完全性定理の証明における重要ポイントは形式化された Σ_1 完全性

$$\text{PA} \vdash \varphi \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \quad (\varphi \text{ は } \Sigma_1 \text{ 文})$$

を証明すること．

- その証明を様相算術において実行すれば次が得られる．

定理 (K. & O.)

φ を Σ_1 論理式とすると, $\text{PA}(\text{K}) \vdash \varphi \rightarrow \Box \varphi$.

- 不完全性定理周辺の議論が様相算術の分析に活かそう！
- これを使うと, Friedman and Sheard の結果を拡張できる．

定理 (K. & O.)

$\text{PA}(\text{K4})$ の RE 拡大理論に対して, $\text{MDP} \iff \text{MEP}$.

GL 側の理論も射程に入ってきた．

- PA(K4) の拡大理論に対する MDP と MEP とその周辺について分析するために、次の Guaspari の結果を思い出す。

Guaspari の結果 (再掲)

PA の無矛盾な RE 拡大理論に対して、

$$\Sigma_1\text{-DP} \iff \Sigma_1\text{-EP} \iff \Sigma_1\text{-健全}.$$

問い

PA(K4) の無矛盾な RE 拡大理論について、

$$\text{MDP} \iff \text{MEP} \iff \Gamma\text{-健全}$$

となる Γ はあるか？

$\Sigma_1^\square$ 論理式

$\Box$ を $\text{Pr}_T(x)$ だと思えば, これも Σ_1 だろう.

定義 ($\Sigma_1^\square$ 論理式)

$\mathcal{L}_A(\Box)$ -論理式が $\Sigma_1^\square$ 論理式であることを次で定める:

- Σ_1 論理式は $\Sigma_1^\square$ 論理式.
- 任意の $\mathcal{L}_A(\Box)$ -論理式 φ について $\Box\varphi$ は $\Sigma_1^\square$ 論理式.
- φ, ψ が $\Sigma_1^\square$ 論理式なら, $\varphi \wedge \psi, \varphi \vee \psi, \exists x\varphi, \forall x < t\varphi$ もそう.

K4 があれば Σ_1 -完全性を $\Sigma_1^\square$ -完全性に拡張できる.

命題

φ を $\Sigma_1^\square$ 論理式とすると, $\text{PA}(\text{K4}) \vdash \varphi \rightarrow \Box\varphi$.

$\Sigma_1^\square$ -健全性

- を含む文が自然数の標準モデル $\mathbb{N}$ の上で正しい、という概念をうまく定義する必要がある。

定義 ($\mathbb{N} \models_T \varphi$)

$\mathcal{L}_A(\square)$ -文 φ について、 $\mathbb{N} \models_T \varphi$ であることを次で定める：

- φ が $\mathcal{L}_A$ -文ならば、 $\mathbb{N} \models_T \varphi : \iff \mathbb{N} \models \varphi$
- $\mathbb{N} \models_T \varphi \wedge \psi : \iff \mathbb{N} \models_T \varphi$ かつ $\mathbb{N} \models_T \psi$
- $\mathbb{N} \models_T \varphi \vee \psi : \iff \mathbb{N} \models_T \varphi$ または $\mathbb{N} \models_T \psi$
- $\mathbb{N} \models_T \varphi \rightarrow \psi : \iff \mathbb{N} \not\models_T \varphi$ または $\mathbb{N} \models_T \psi$
- $\mathbb{N} \models_T \forall x \varphi(x) : \iff$ 全ての自然数 n について $\mathbb{N} \models_T \varphi(\bar{n})$
- $\mathbb{N} \models_T \exists x \varphi(x) : \iff$ ある自然数 n について $\mathbb{N} \models_T \varphi(\bar{n})$
- $\mathbb{N} \models_T \square \varphi : \iff T \vdash \varphi$

定義 ($\Sigma_1^\square$ -健全性)

$\mathcal{L}_A(\square)$ -理論 T が $\Sigma_1^\square$ -健全 : $\iff$
 全ての $\Sigma_1^\square$ 文 φ について、 $T \vdash \varphi$ ならば $\mathbb{N} \models_T \varphi$.

周辺概念

- この流れで $\Sigma_1^\square$ -DP や $\Sigma_1^\square$ -EP を考えるのは自然.
- 更に次の概念を考える.

定義 (弱様相選言特性と弱様相存在特性)

- $\mathcal{L}_A(\Box)$ -理論 T が**弱様相選言特性 (wMDP)**を持つ
: $\iff$ 全ての論理式 φ, ψ について,
 $T \vdash \Box\varphi \vee \Box\psi \Rightarrow T \vdash \Box\varphi$ または $T \vdash \Box\psi$.
- $\mathcal{L}_A(\Box)$ -理論 T が**弱様相存在特性 (wMEP)**を持つ
: $\iff x$ 以外を自由変数に持たない論理式 $\varphi(x)$ について,
 $T \vdash \exists x \Box\varphi(x)$ ならば, ある自然数 n があって $T \vdash \Box\varphi(\bar{n})$.

EA の拡大理論について

- $\text{MDP} \iff \text{wMDP}$
- $\text{MEP} \iff \text{wMEP}$

なのでこれまで MDP と wMDP は同一視されてきた.

今回は $\text{PA}(K4)$ の拡大を考えるのでこれらを区別する.

$T \vdash \Box \perp$ なら wMDP と wMEP は成立するので $T \not\vdash \Box \perp$ とする.

結果

主定理 (K. & O.)

PA(K4) の無矛盾な RE 拡大理論 T で $T \not\vdash \Box \perp$ となるものについて：

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{MDP} & \iff & \text{MEP} & \iff & \Sigma_1^\Box\text{-健全} \\
 \downarrow \text{✂} & & & & \\
 \Sigma_1^\Box\text{-DP} & \iff & \Sigma_1^\Box\text{-EP} & \iff & \text{wMEP} \\
 \downarrow & & & & \\
 \text{wMDP} & & & & \\
 \downarrow \text{✂} & & & & \\
 \Sigma_1\text{-DP} & \iff & \Sigma_1\text{-EP} & \iff & \Sigma_1\text{-健全}
 \end{array}$$

系

HA の拡大 T について, T は DP をもつ $\iff \tau T$ は $\Sigma_1^\Box$ -健全.

問題

wMDP を持つが wMEP を持たないような PA(K4) の RE 拡大理論はあるか？

まとめと今後の課題

まとめ

- ① HA の拡大理論を分析するために様相算術の研究は重要
- ② 様相算術は不完全性定理に関連する手法で分析できる
- ③ 様相算術における様相選言・存在特性は豊かな構造を持つ
- ④ 新たに導入した $\Sigma_1^\square$ 論理式の内容は割と本質的
- ⑤ **証明可能性の概念が統一的な見方を与えてくれる**

今後の課題（たくさん !!）

- ① HA の拡大理論の modal companion
- ② 様相算術のクリプキ意味論
- ③ PA(GL) と証明可能性述語の関係
- ④ 様相算術における boxdot 変換
- ⑤ 算術的階層