

述語証明可能性論理の包含関係について

倉橋太志（神戸大学 システム情報学研究科）

2021 年 9 月 16 日（木）
日本数学会 2021 年度秋季総合分科会

内容

- ① 証明可能性論理と Solovay の定理
- ② 述語証明可能性論理
- ③ 今回の研究
 - ① 包含関係の帰結
 - ② Σ_1 証明可能性論理

内容

- ① 証明可能性論理と Solovay の定理
- ② 述語証明可能性論理
- ③ 今回の研究

証明可能性述語と導出可能性条件

- 以降, T, T_i は IS_1 を含む再帰的公理化された, 算術の言語 $\mathcal{L}_A$ の理論とする.

定義 (Σ_1 定義)

論理式 $\sigma(v)$ が理論 T を**定義する**とは, 任意の自然数 n について

$$\mathbb{N} \models \sigma(\bar{n}) \iff n \text{ は } T \text{ の公理の Gödel 数}$$

を満たすことをいう.

T を定義する Σ_1 論理式を, T の **Σ_1 定義**という.

- T の Σ_1 定義 $\sigma(v)$ について, $\text{Pr}_\sigma(x)$ を
 “ x は σ によって定義される理論で証明可能”
 を意味する Σ_1 論理式とする ($\sigma(v)$ を用いて定められる T の**証明可能性述語**).

導出可能性条件と Löb の定理

定理

T の Σ_1 定義 $\sigma(v)$ と論理式 φ, ψ について,

- $T \vdash \varphi \Rightarrow \mathbf{I}\Sigma_1 \vdash \text{Pr}_\sigma(\ulcorner \varphi \urcorner)$
- $\mathbf{I}\Sigma_1 \vdash \text{Pr}_\sigma(\ulcorner \varphi \rightarrow \psi \urcorner) \rightarrow (\text{Pr}_\sigma(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_\sigma(\ulcorner \psi \urcorner))$
- $\mathbf{I}\Sigma_1 \vdash \text{Pr}_\sigma(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_\sigma(\ulcorner \text{Pr}_\sigma(\ulcorner \varphi \urcorner) \urcorner)$
- $\mathbf{I}\Sigma_1 \vdash \text{Pr}_\sigma(\ulcorner \text{Pr}_\sigma(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_\sigma(\ulcorner \varphi \urcorner)$ (Löb の定理)

- $\text{Pr}_\sigma(x)$ の満たすこれらの性質を, 様相論理を用いて分析する.

様相命題論理 GL

様相命題論理 GL

様相命題論理 GL の公理と推論規則は次の通り：

A1 恒真式

A2 $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$

A3 $\Box(\Box A \rightarrow A) \rightarrow \Box A$

R1
$$\frac{A \quad A \rightarrow B}{B} \quad (\text{モダスポネンス})$$

R2
$$\frac{A}{\Box A} \quad (\text{ネセシテーション})$$

算術的解釈

算術と様相論理を正確に結び付けるために、算術的解釈を導入する。

定義（算術的解釈）

命題変数全体の集合から、算術の文の集合への写像 f を**算術的解釈**という。

$\sigma(v)$ を T の Σ_1 定義とする。

算術的解釈 f は次を満たすように、様相論理式全体の集合から算術の文の集合への写像 f_σ に一意に拡張できる：

- $f_\sigma(\perp)$ は $0 = 1$;
- f_σ は結合子を保存;
- $f_\sigma(\Box A)$ は $\text{Pr}_\sigma(\ulcorner f_\sigma(A) \urcorner)$.

命題（算術的健全性）

$\text{GL} \vdash A$ ならば、任意の算術的解釈 f について $T \vdash f_\sigma(A)$.

証明可能性論理

定義（証明可能性論理）

T の Σ_1 定義 $\sigma(v)$ について

$\text{PL}_\sigma(T) := \{A \mid \forall f: \text{算術的解釈}, T \vdash f_\sigma(A)\}$

を $\sigma(v)$ の証明可能性論理という。

命題（算術的健全性（再掲））

$\text{GL} \subseteq \text{PL}_\sigma(T)$.

算術的完全性定理 (Solovay, 1976; Visser, 1984)

- ① T が Σ_1 -健全ならば $\text{PL}_\sigma(T) = \text{GL}$.
- ② T が Σ_1 -健全でなければ $\text{PL}_\sigma(T) = \text{GL}$
もしくは、ある自然数 n について $\text{PL}_\sigma(T) = \text{GL} + \Box^n \perp$.

- $\text{PL}_\sigma(T)$ は原始再帰的で T や $\sigma(v)$ にはほとんど依存しない。
- 任意の T_0, T_1 について $\text{PL}_{\sigma_0}(T_0) \subseteq \text{PL}_{\sigma_1}(T_1)$ または $\text{PL}_{\sigma_1}(T_1) \subseteq \text{PL}_{\sigma_0}(T_0)$.

内容

- ① 証明可能性論理と Solovay の定理
- ② 述語証明可能性論理
- ③ 今回の研究

様相述語論理

- 算術的完全性定理を通じて、GL やクリプキモデルなどを用いて算術の証明可能性に関する分析を行うことができる。
- しかし、理論 T に依存した分析はできない。
- 枠組みを様相述語論理に拡張すれば、きめ細かな分析ができるのでは？

様相述語論理の言語

- 様相述語論理の言語は 1 階述語論理の言語に様相記号 $\Box$ と $\Diamond$ を加えたもの。
- ただし議論を単純にするために、定数記号と関数記号は用いないとする。

算術的解釈

算術的解釈の概念も拡張する.

定義 (算術的解釈)

原子論理式全体の集合から、算術の論理式の集合への写像 f を **算術的解釈** という.

ただし $f(P(x_1, \dots, x_n)) \equiv \varphi(x_1, \dots, x_n)$ のとき,
任意の変数 $y_1, \dots, y_n$ について $f(P(y_1, \dots, y_n)) \equiv \varphi(y_1, \dots, y_n)$.

算術的解釈 f は次を満たすように、様相論理式全体の集合から算術の論理式の集合への写像 f_σ に一意に拡張できる:

- $f_\sigma(\perp)$ は $0 = 1$;
- f_σ は結合子, 量化子を保存;
- $f_\sigma(\Box A(x_1, \dots, x_n))$ は $\text{Pr}_\sigma(\ulcorner f_\sigma(A(\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n)) \urcorner)$.

任意の様相論理式 φ について, φ と $f_\sigma(\varphi)$ は等しい自由変数を持つ.

述語証明可能性論理

証明可能性論理の概念を拡張する.

述語証明可能性論理

T の Σ_1 定義 $\sigma(v)$ について

$\text{QPL}_\sigma(T) := \{A \mid A \text{ は様相文で } \forall f: \text{算術的解釈}, T \vdash f_\sigma(A)\}$
 を $\sigma(v)$ の述語証明可能性論理という.

さて, 命題論理のときのような状況が成立するだろうか.

- $\text{QPL}_\sigma(\text{PA}) = \text{QGL}?$ (Avron, 1984)
- $\text{QPL}_\sigma(\text{PA})$ は r.e. か? (Boolos, 1979)

知られている結果

述語論理においては、算術的完全性定理は成立しない。

定理 (Vardanyan, 1985)

$\text{QPL}_\sigma(\text{PA})$ は Π_2^0 -完全．よって再帰的公理化不可能．

しかも $\text{QPL}_\sigma(T)$ は T や $\sigma(v)$ に依存する．

定理

① (Montagna, 1984)

T_1 が有限公理化可能, $T_1 \not\vdash \neg \text{Con}_{\sigma_1}$, $T_0 \vdash \text{Con}_{\sigma_1} \rightarrow \text{Con}_{\sigma_0 + \text{Con}_{\sigma_0}}$ ならば $\text{QPL}_{\sigma_0}(T_0) \not\subseteq \text{QPL}_{\sigma_1}(T_1)$.

② (Artemov, 1986)

Σ_1 -健全な T の任意の Σ_1 定義 $\sigma_0(v)$ に対して,
 T の Σ_1 定義 $\sigma_1(v)$ が存在して, $\text{QPL}_{\sigma_0}(T) \not\subseteq \text{QPL}_{\sigma_1}(T)$.

③ (K., 2013) $0 < i < j$ とする.

$\text{I}\Sigma_i$ の有限公理化の Σ_1 定義 $\sigma_i(v)$ があって,
 $\text{I}\Sigma_j$ の任意の Σ_1 定義 $\sigma_j(v)$ について,
 $\text{QPL}_{\sigma_i}(\text{I}\Sigma_i) \not\subseteq \text{QPL}_{\sigma_j}(\text{I}\Sigma_j)$ かつ $\text{QPL}_{\sigma_j}(\text{I}\Sigma_j) \not\subseteq \text{QPL}_{\sigma_i}(\text{I}\Sigma_i)$.

内容

- ① 証明可能性論理と Solovay の定理
- ② 述語証明可能性論理
- ③ 今回の研究
 - ① 包含関係の帰結
 - ② Σ_1 証明可能性論理

結果

- こうした背景のもと、述語証明可能性論理の間の包含関係の成立状況をより理解するために、包含関係の帰結について分析を行った。

定理 (K.)

$\text{QPL}_{\sigma_0}(T_0) \subseteq \text{QPL}_{\sigma_1}(T_1)$ のとき

- ① $T_1 \vdash \text{Con}_{\sigma_0} \leftrightarrow \text{Con}_{\sigma_1}$;
- ② $T_1 \vdash_{\Sigma_1} T_0$;
- ③ $T_0 \vdash \text{PA}$ ならば、任意の $\mathcal{L}_A$ -論理式 $\varphi(\vec{x})$ について

$$T_1 \vdash \forall \vec{x} \left(\text{Pr}_{\sigma_0 + \text{Con}_{\sigma_0}}(\ulcorner \varphi(\vec{x}) \urcorner) \leftrightarrow \text{Pr}_{\sigma_1 + \text{Con}_{\sigma_1}}(\ulcorner \varphi(\vec{x}) \urcorner) \right);$$

- ④ $T_0 \vdash \text{PA}$ ならば、任意の Π_1 論理式 $\varphi(\vec{x})$ について

$$T_1 \vdash \forall \vec{x} \left(\text{Pr}_{\sigma_1}(\ulcorner \varphi(\vec{x}) \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_{\sigma_0}(\ulcorner \varphi(\vec{x}) \urcorner) \right).$$

項目 3, 4 は、 φ が文であれば $T_0 \vdash \text{PA}$ という仮定は不要。

結果について

結果について

- 述語証明可能性論理の間の包含関係はめったに成立しないことがいえた.
- Montagna, Artemov および自分の過去の結果を強めた主張が系として導ける.
包含関係に関する状況をかなり整理できた.

内容

- ① 証明可能性論理と Solovay の定理
- ② 述語証明可能性論理
- ③ 今回の研究
 - ① Artemov の補題とその帰結
 - ② Σ_1 証明可能性論理

制限された算術的解釈に関する分析もこれまでに行われてきた。

定義 (Σ_1 算術的解釈)

算術的解釈 f が Σ_1 であるとは,

- 命題論理の場合：任意の命題変数 p について $f(p)$ が Σ_1 文
- 述語論理の場合：任意の原子論理式 $P(\vec{x})$ について $f(P(\vec{x}))$ が Σ_1 論理式

であることをいう。

定義 (Σ_1 証明可能性論理)

- $\text{PL}_{\sigma}^{\Sigma_1}(T)$
 $:= \{A \mid A \text{ は命題様相論理式で } \forall f: \Sigma_1 \text{ 算術的解釈, } T \vdash f_{\sigma}(A)\}$
- $\text{QPL}_{\sigma}^{\Sigma_1}(T)$
 $:= \{A \mid A \text{ は様相文で } \forall f: \Sigma_1 \text{ 算術的解釈, } T \vdash f_{\sigma}(A)\}$

Σ_1 証明可能性論理に関する事実

命題論理については再帰的公理化可能.

定理 (Visser, 1981)

T が Σ_1 -健全ならば $\text{PL}_\sigma^{\Sigma_1}(T) = \text{GLV}$.

述語論理については Vardanyan の定理と同様の状況が成立.

定理 (Berarducci, 1989)

$\text{QPL}_\sigma^{\Sigma_1}(\text{PA})$ は Π_2^0 -完全.

Σ_1 証明可能性論理の包含関係

Σ_1 算術的解釈はかなり良い振る舞いをするため、次が証明できた。

定理 (K.)

以下は同値：

- ① $\text{QPL}_{\sigma_0}^{\Sigma_1}(T_0) \subseteq \text{QPL}_{\sigma_1}^{\Sigma_1}(T_1)$.
- ② $T_1 \vdash T_0$ かつ、任意の $\mathcal{L}_A$ -論理式 $\varphi(\vec{x})$ について

$$T_1 \vdash \forall \vec{x} \left(\text{Pr}_{\sigma_0}(\ulcorner \varphi(\vec{x}) \urcorner) \leftrightarrow \text{Pr}_{\sigma_1}(\ulcorner \varphi(\vec{x}) \urcorner) \right).$$

- 述語証明可能性論理の混沌とした状況の中に、一定の秩序を見出すことができた。

問題

$\text{QPL}_{\sigma_0}(T_0) \subseteq \text{QPL}_{\sigma_1}(T_1)$ を特徴付けることはできるか？

参考文献

- ① S. Artemov. Numerically correct logics of provability. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, vol. 290, no. 6, pp. 1289–1292 (1986).
- ② F. Montagna. The predicate modal logic of provability. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, vol. 25, no. 2, pp. 179–189 (1984).
- ③ T. Kurahashi. On predicate provability logics and binumerations of fragments of Peano arithmetic. *Archive for Mathematical Logic*, vol. 52, no. 7-8, pp. 871–880 (2013).
- ④ T. Kurahashi. On inclusions between quantified provability logics. *Studia Logica*. 受理.
- ⑤ A. Visser and M. de Jonge. No escape from Vardanyan's theorem. *Archive for Mathematical Logic*, vol. 45, no. 5, pp. 539–554 (2006).