様相算術における選言特性と存在特性

倉橋太志（神戸大学 システム情報学研究科）
奥田幹との共同研究

2021 年 9 月 16 日（木）
日本数学会　2021 年度秋季総合分科会

内容

内容

Gödel–McKinsey–Tarski の定理

直観主義命題論理 **IPC** を様相命題論理 **S4** に埋め込むことができる．

定義（Gödel の変換）

直観主義命題論理の論理式から様相命題論理の論理式への変換 T を次で定める：

- $\mathsf{T}(p_i) \equiv \Box p_i$
- $\mathsf{T}(\bot) \equiv \bot$
- $\mathsf{T}(\varphi \land \psi) \equiv \mathsf{T}(\varphi) \land \mathsf{T}(\psi)$
- $\mathsf{T}(\varphi \lor \psi) \equiv \mathsf{T}(\varphi) \lor \mathsf{T}(\psi)$
- $\mathsf{T}(\varphi \to \psi) \equiv \Box(\mathsf{T}(\varphi) \to \mathsf{T}(\psi))$

定理 (Gödel, 1933; McKinsey and Tarski, 1948)

直観主義命題論理の任意の論理式 φ について，

$$\mathbf{IPC} \vdash \varphi \iff \mathbf{S4} \vdash \mathsf{T}(\varphi).$$

様相算術 EA

Gödel–McKinsey–Tarski の定理は算術に拡張できる．
Shapiro は PA に S4 を加えることで得られる様相算術 EA (Epistemic Arithmetic) を導入した．

EA (Shapiro, 1985)

- 様相算術の言語 $\mathcal{L}_A(\Box)$ は $\mathcal{L}_A$ に $\Box$ を加えたもの．
- EA の公理は PA の公理に $\mathcal{L}_A(\Box)$ の論理公理と帰納法公理，$\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$, $\Box\varphi \to \varphi$, $\Box\varphi \to \Box\Box\varphi$ を加えたもの
- EA の推論規則は MP $\dfrac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi}$, GEN $\dfrac{\varphi}{\forall x \varphi}$, N $\dfrac{\varphi}{\Box\varphi}$

Shapiro–Goodman の定理

Gödel の変換 T を次のように述語論理のものに拡張する．

- $\mathsf{T}(\forall x \varphi) \equiv \Box \forall x \mathsf{T}(\varphi)$
- $\mathsf{T}(\exists x \varphi) \equiv \exists x \mathsf{T}(\varphi)$

このとき次が成り立つ．

定理（Shapiro, 1985; Goodman, 1984）

任意の $\mathcal{L}_A$ 文 φ について，

$$\mathbf{HA} \vdash \varphi \iff \mathbf{EA} \vdash \mathsf{T}(\varphi).$$

EA は HA と PA の両方に関係をもつ興味深い理論．

内容

選言特性と存在特性

定義（選言特性 DP）

理論 T が**選言特性（DP）**を持つ
$:\Longleftrightarrow$ 全ての文 φ, ψ について，
$T \vdash \varphi \lor \psi$ ならば $T \vdash \varphi$ または $T \vdash \psi$.

定義（存在特性 EP）

$\mathcal{L}_A$-理論 T が**存在特性（EP）**を持つ
$:\Longleftrightarrow$ x 以外を自由変数に持たない論理式 $\varphi(x)$ について，
$T \vdash \exists x \varphi(x)$ ならば，ある自然数 n があって $T \vdash \varphi(\overline{n})$.

HA における DP と EP

HA については次が知られている．

定理（Kleene, 1945）

HA は DP と EP を持つ．

定理（Friedman, 1975）

HA の任意の RE 拡大 $\mathcal{L}_A$-理論 T について，
T は DP を持つ $\iff$ T は EP を持つ．

MDP と MEP

こうした状況は様相算術においても見出すことができる．

定義（様相選言特性 MDP）

様相算術 T が**様相選言特性（MDP）**を持つ
$:\Longleftrightarrow$ 全ての文 φ, ψ について，
$T \vdash \Box\varphi \vee \Box\psi$ ならば $T \vdash \varphi$ または $T \vdash \psi$.

定義（様相存在特性 MEP）

様相算術 T が**様相存在特性（MEP）**を持つ
$:\Longleftrightarrow$ x 以外を自由変数に持たない論理式 $\varphi(x)$ について，
$T \vdash \exists x \Box\varphi(x)$ ならば，ある自然数 n があって $T \vdash \varphi(\overline{n})$

定理（Shapiro, 1985）

EA は **MDP** と **MEP** を持つ．

定理（Friedman and Sheard, 1989）

EA の任意の **RE** 拡大 $\mathcal{L}_A(\Box)$-理論 T について，
T は **MDP** を持つ $\Longleftrightarrow$ T は **MEP** を持つ．

第 1 不完全性定理と DP

古典論理の無矛盾な理論 T について，**DP** は完全性と同値．

第 1 不完全性定理の言い換え（Gödel, 1931; Rosser, 1936）

PA の無矛盾な **RE** 拡大理論 T は **DP** を持たない．

第 1 不完全性定理は次のように拡張できる．

定義（Γ-DP, Γ-EP）

- 理論 T が **Γ-DP** を持つ $:\iff$ 任意の Γ 文 φ, ψ について，$T \vdash \varphi \lor \psi$ ならば $T \vdash \varphi$ または $T \vdash \psi$.
- 理論 T が **Γ-EP** を持つ $:\iff$ x 以外を自由変数に持たない任意の Γ 論理式 $\varphi(x)$ について，$T \vdash \exists x \varphi(x)$ ならば，ある自然数 n があって $T \vdash \varphi(\overline{n})$.

定理（Jensen and Ehrenfeucht, 1976）

PA の無矛盾な **RE** 拡大理論 T は Π_1-**DP** を持たない．

Σ_1-DP の特徴づけ

Σ_1-DP については，持つ理論と持たない理論がある．

定義（Γ-健全性）

理論 T が **Γ-健全** $:\Longleftrightarrow$
任意の Γ 文 φ について，$T \vdash \varphi$ ならば $\mathbb{N} \models \varphi$.

定理（Guaspari, 1979）

PA の無矛盾な RE 拡大理論に対して，

$$\Sigma_1\text{-DP} \iff \Sigma_1\text{-EP} \iff \Sigma_1\text{-健全}.$$

内容

1. 様相算術 EA
2. 選言特性と存在特性
3. 今回の研究

最初の結果

定義

HA の RE 拡大理論 T に対して，
$\tau T := \mathbf{EA} + \{\mathsf{T}(\varphi) \mid T \vdash \varphi$ かつ φ は文$\}$

定理（K. & O.）

HA の RE 拡大理論 T に対して，
T は DP をもつ $\iff$ τT は MDP をもつ．

- $\tau\mathbf{HA} = \mathbf{EA}$ なので，HA の DP と EA の MDP は同値．
- 様相算術の分析が HA の拡大理論の分析につながる．

- 様相算術に対する MDP と MEP とその周辺について分析するために，次の Guaspari の結果を思い出す．

Guaspari の結果（再掲）

PA の無矛盾な RE 拡大理論に対して，

$$\Sigma_1\text{-DP} \iff \Sigma_1\text{-EP} \iff \Sigma_1\text{-健全}.$$

問い

様相算術について，

$$\text{MDP} \iff \text{MEP} \iff \Gamma\text{-健全}$$

となる Γ はあるか？

$\Sigma_1^{\Box}$ 論理式

$\Box$ を $\mathrm{Pr}_T(x)$ だと思えば，これも Σ_1 だろう．

定義（$\Sigma_1^{\Box}$ 論理式）

$\mathcal{L}_A(\Box)$-論理式が $\Sigma_1^{\Box}$ 論理式であることを次で定める：

- Σ_1 論理式は $\Sigma_1^{\Box}$ 論理式．
- 任意の $\mathcal{L}_A(\Box)$-論理式 φ について $\Box\varphi$ は $\Sigma_1^{\Box}$ 論理式．
- φ, ψ が $\Sigma_1^{\Box}$ 論理式なら，$\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\exists x\varphi$, $\forall x < t\varphi$ もそう．

$\Sigma_1^{\Box}$-健全性

- $\Box$ を含む文が自然数の標準モデル $\mathbb{N}$ の上で正しい，という概念をうまく定義する必要がある．

定義（$\mathbb{N} \models_T \varphi$）

$\mathcal{L}_A(\Box)$-文 φ について，$\mathbb{N} \models_T \varphi$ であることを次で定める：

- φ が $\mathcal{L}_A$-文ならば，$\mathbb{N} \models_T \varphi :\iff \mathbb{N} \models \varphi$
- $\mathbb{N} \models_T \varphi \land \psi :\iff \mathbb{N} \models_T \varphi$ かつ $\mathbb{N} \models_T \psi$
- $\mathbb{N} \models_T \varphi \lor \psi :\iff \mathbb{N} \models_T \varphi$ または $\mathbb{N} \models_T \psi$
- $\mathbb{N} \models_T \varphi \to \psi :\iff \mathbb{N} \not\models_T \varphi$ または $\mathbb{N} \models_T \psi$
- $\mathbb{N} \models_T \forall x \varphi(x) :\iff$ 全ての自然数 n について $\mathbb{N} \models_T \varphi(\overline{n})$
- $\mathbb{N} \models_T \exists x \varphi(x) :\iff$ ある自然数 n について $\mathbb{N} \models_T \varphi(\overline{n})$
- $\mathbb{N} \models_T \Box\varphi :\iff T \vdash \varphi$

定義（$\Sigma_1^{\Box}$-健全性）

$\mathcal{L}_A(\Box)$-理論 T が $\Sigma_1^{\Box}$-健全 $:\iff$
全ての $\Sigma_1^{\Box}$ 文 φ について，$T \vdash \varphi$ ならば $\mathbb{N} \models_T \varphi$.

周辺概念

- この流れで $\Sigma_1^\Box$-DP や $\Sigma_1^\Box$-EP を考えるのは自然．
- 更に次の概念を考える．

定義（弱様相選言特性と弱様相存在特性）

- $\mathcal{L}_A(\Box)$-理論 T が**弱様相選言特性（wMDP）**を持つ
  $:\Longleftrightarrow$ 全ての文 φ, ψ について，
  $T \vdash \Box\varphi \lor \Box\psi \Rightarrow T \vdash \Box\varphi$ または $T \vdash \Box\psi$．
- $\mathcal{L}_A(\Box)$-理論 T が**弱様相存在特性（wMEP）**を持つ
  $:\Longleftrightarrow$ x 以外を自由変数に持たない論理式 $\varphi(x)$ について，
  $T \vdash \exists x \Box\varphi(x)$ ならば，ある自然数 n があって $T \vdash \Box\varphi(\overline{n})$．

結果

PA に K4 を加えて得られる理論を PA(K4) とかく．

主定理（K. & O.）

PA(K4) の無矛盾な RE 拡大 $\mathcal{L}_A(\Box)$-理論 T が $T \nvdash \Box\bot$ ならば，

$$
\begin{array}{ccccc}
\mathbf{MDP} & \Longleftrightarrow & \mathbf{MEP} & \Longleftrightarrow & \Sigma_1^{\Box}\text{-健全} \\
\Downarrow \ \not\Uparrow & & & & \\
\Sigma_1^{\Box}\text{-}\mathbf{DP} & \Longleftrightarrow & \Sigma_1^{\Box}\text{-}\mathbf{EP} & \Longleftrightarrow & \mathbf{wMEP} \\
\Downarrow & & & & \\
\mathbf{wMDP} & & & & \\
\Downarrow \ \not\Uparrow & & & & \\
\Sigma_1\text{-}\mathbf{DP} & \Longleftrightarrow & \Sigma_1\text{-}\mathbf{EP} & \Longleftrightarrow & \Sigma_1\text{-健全}
\end{array}
$$

MDP と MEP の同値性には $T \nvdash \Box\bot$ という仮定は用いないので，Friedman and Sheard の結果の拡張にもなっている．

系

HA の拡大 T について，T は DP を持つ $\Longleftrightarrow$ τT は $\Sigma_1^{\Box}$-健全．

参考文献

1. H. Friedman and M. Sheard. The equivalence of the disjunction and existence properties for modal arithmetic. *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 54, no. 1, pp. 1456–1459 (1989).
2. S. Shapiro. Epistemic and intuitionistic arithmetic. In *Intentional Mathematics*, vol. 113 of *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, pp. 11–46. Elsevier Science Ltd (1985).
3. T. Kurahashi and M. Okuda. Disjunction and existence properties in modal arithmetic. 準備中.