

部分保存的な文に対する Bennet の結果の一般化

発表者: 大川裕矢 (千葉大学大学院融合理工学府)
共同発表者: 倉橋太志 (神戸大学大学院システム情報学研究科)

日本数学会 2020 年度秋季総合分科会 9 月

Γ -保存性

以降 T, T_i, U を PA を含む無矛盾な r.e. 理論とし,

$\Gamma \in \{\Sigma_n, \Pi_n : n \geq 1\}$,

$\Gamma^d := \begin{cases} \Pi_n & (\Gamma = \Sigma_n) \\ \Sigma_n & (\Gamma = \Pi_n) \end{cases}$ とする.

定義

文 φ が T 上 **Γ -保存的**である.

$\Leftrightarrow$ 任意の Γ 文 ψ について $T + \varphi \vdash \psi$ ならば $T \vdash \psi$.

- Γ -保存的な文は不完全性定理の文脈において古くから扱われている.
- 例えば, $\neg \text{Con}_T$ は T 上 Π_1 -保存的であることが, Kreisel (1962) によって示されている (第二不完全性定理の拡張).

Guaspari の定理と問

定義

- $\text{Cons}(\Gamma, T) := \{\varphi : \varphi \text{ は } \Gamma^d \text{ 文で } T \text{ 上 } \Gamma\text{-保存的}\}.$
- $\text{Th}(T) := \{\varphi : \varphi \text{ は文で } T \vdash \varphi\}.$

$\varphi \in \Gamma^d$ が $\varphi \in \text{Th}(T)$ なら自明に $\varphi \in \text{Cons}(\Gamma, T)$.

定理 (Guaspari: 1979)

非自明な $\varphi \in \text{Cons}(\Gamma, T)$ がある.
つまり $\text{Cons}(\Gamma, T) \setminus \text{Th}(T) \neq \emptyset$.

また Guaspari は「**複数の理論で同時に非自明に Γ -保存的な Γ^d 文は存在するか?**」という問を残している.

問題 (Guaspari: 1979)

任意の理論の r.e. 列 $\{T_i\}_{i \in \omega}$ に対して,
 $\bigcap_{i \in \omega} (\text{Cons}(\Gamma, T_i) \setminus \text{Th}(T_i)) \neq \emptyset?$

Bennet の分析 1

Bennet は特に 2 つの理論に対する Guaspari の問題について分析を行い，次の結果を得た．

定理 1 (Bennet: 1986)

理論 T_0, T_1 について，以下は同値．

- (i) $\bigcap_{i \leq 1} (\text{Cons}(\Gamma, T_i) \setminus \text{Th}(T_i)) \neq \emptyset$
- (ii) $\text{Cons}(\Gamma, T_0) \setminus \text{Th}(T_1) \neq \emptyset$ かつ $\text{Cons}(\Gamma, T_1) \setminus \text{Th}(T_0) \neq \emptyset$.

つまり，(i) の条件は，

$$\text{Cons}(\Gamma, T) \setminus \text{Th}(U) \neq \emptyset$$

という条件を考えることに帰着される．

Bennet の分析 2

$\text{Th}_\Gamma(T) := \text{Th}(T) \cap \Gamma$ とする.

条件「 $\text{Cons}(\Gamma, T) \setminus \text{Th}(U) \neq \emptyset$ 」は次のような十分条件を持つ.

定理 2 (Bennet: 1986)

$\text{Th}_{\Gamma^d}(T) \not\subseteq \text{Th}(U)$ または $\text{Th}_\Gamma(T) + U$ は無矛盾.

$\Rightarrow \text{Cons}(\Gamma, T) \setminus \text{Th}(U) \neq \emptyset$.

Γ が Σ_n なら, これらは同値.

定理 3 (Bennet: 1986)

$\text{Th}_{\Pi_n}(T) \not\subseteq \text{Th}(U)$ または $\text{Th}_{\Sigma_n}(T) + U$ は無矛盾.

$\Leftrightarrow \text{Cons}(\Sigma_n, T) \setminus \text{Th}(U) \neq \emptyset$.

$\text{Th}_{\Pi_n}(T) \subseteq \text{Th}(U)$ かつ $\text{Th}_{\Sigma_n}(T) + U$ が矛盾となる T, U は比較的容易に構成できる. これは, $\Gamma = \Sigma_n$ かつ有限個の理論における Guaspari の問に対して, 否定的な解答を与えている.

得られた結果 1 と問

Bennet の 2 つの理論に対する分析を, 任意有限個の理論に対するものに拡張した. 次は Bennet の定理 1 の一般化.

定理

任意の自然数 $k \geq 1$ と $T_0, \dots, T_k$ について, 以下は同値.

- (i) $\bigcap_{i \leq k} (\text{Cons}(\Gamma, T_i) \setminus \text{Th}(T_i)) \neq \emptyset$.
- (ii) 任意の $i \leq k$ について, $\left(\bigcap_{\substack{j \neq i \\ j \leq k}} \text{Cons}(\Gamma, T_j) \right) \setminus \text{Th}(T_i) \neq \emptyset$.

この結果を理論の r.e. 列に対して拡張できるかは分かっていない.

問題

理論の r.e. 列 $\{T_i\}_{i \in \omega}$ について, 以下は同値か?

- 1 $\bigcap_{i \in \omega} (\text{Cons}(\Gamma, T_i) \setminus \text{Th}(T_i)) \neq \emptyset$.
- 2 任意の $i \in \omega$ について, $\left(\bigcap_{j \in \omega, j \neq i} \text{Cons}(\Gamma, T_j) \right) \setminus \text{Th}(T_i) \neq \emptyset$.

得られた結果 2

Bennet の定理 2 における仮定の自然な拡張は,

$$\bigcap_{i \leq k} \text{Th}_{\Gamma^d}(T_i) \not\subseteq \text{Th}(U) \text{ または } \bigcup_{i \leq k} \text{Th}_{\Gamma}(T_i) + U \text{ は無矛盾}$$

であるが, より一般的な十分条件をみつけた.

定理

任意の理論 U と r.e. 列 $\{T_i\}_{i \in \omega}$ について, 以下が成立する.

$$\bigcap_{i \in \omega \setminus X} \text{Th}_{\Gamma^d}(T_i) \not\subseteq \text{Th}\left(\bigcup_{i \in X} \text{Th}_{\Gamma}(T_i) + U\right)$$

となる r.e. 集合 $X \subseteq \omega$ が存在する.

$\Rightarrow \left(\bigcap_{i \in \omega} \text{Cons}(\Gamma, T_i)\right) \setminus \text{Th}(U) \neq \emptyset$.

得られた結果 3

自然数 k について $I_k := \{0, \dots, k\}$ とする.

理論が有限列かつ $\Gamma = \Sigma_n$ の場合は, Bennet の定理 3 のような同値性が得られた.

定理

$U, T_0, \dots, T_k$: 理論とする.

$$\bigcap_{i \in I_k \setminus X} \text{Th}_{\Pi_n}(T_i) \not\subseteq \text{Th}\left(\bigcup_{i \in X} \text{Th}_{\Sigma_n}(T_i) + U\right)$$

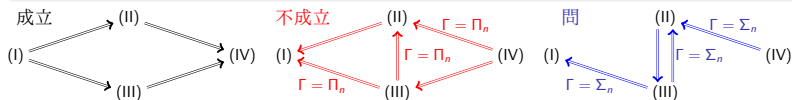
となる集合 $X \subseteq I_k$ が存在する.

$$\Leftrightarrow \left(\bigcap_{i \leq k} \text{Cons}(\Sigma_n, T_i) \right) \setminus \text{Th}(U) \neq \emptyset.$$

得られた結果4 と問

次の条件を考えたとき、図のような状況を得た。

- (I) 次の r.e. 集合 $X \subseteq \omega$ が存在する:
 $\bigcap_{i \in \omega \setminus X} \text{Th}_{\Gamma^d}(T_i) \not\subseteq \text{Th}(\bigcup_{i \in X} \text{Th}_{\Gamma}(T_i) + U).$
- (II) 次の集合 $X \subseteq \omega$ が存在する:
 $\bigcap_{i \in \omega \setminus X} \text{Th}_{\Gamma^d}(T_i) \not\subseteq \text{Th}(\bigcup_{i \in X} \text{Th}_{\Gamma}(T_i) + U).$
- (III) $(\bigcap_{i \in \omega} \text{Cons}(\Gamma, T_i)) \setminus \text{Th}(U) \neq \emptyset.$
- (IV) 任意の $k \in \omega$ について, $(\bigcap_{i \leq k} \text{Cons}(\Gamma, T_i)) \setminus \text{Th}(U) \neq \emptyset.$



参考文献

- [1] C. Bennet, On some orderings of extensions of arithmetic, *Thesis, Dept. of Philosophy, Univ. of Göteborg* (1986).
- [2] D. Guaspari, Partially conservative extensions of arithmetic, *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol.254, pp.47-68 (1979).
- [3] T. Kurahashi, Y. Okawa. On Guaspari's problem about partially conservative sentences. 投稿中. arXiv:1909.02761. (著者に V. Yu. Shavrukov と Albert Visser を加えて改訂中)
- [4] D. Misercque, Answer to a problem by D. Guaspari, in : *Open days in Model Theory and Set Theory*(eds. W Guzicki et al), Poland, pp.181-183 (1983).

連絡先

大川裕矢: ahga4770@chiba-u.jp

倉橋太志: kurahashi@people.kobe-u.ac.jp