

解釈可能性論理 IL の部分論理

倉橋太志（神戸大学システム情報学研究科）
大川裕矢（千葉大学大学院融合理工学府）

2020 年 9 月 24 日（木）
日本数学会 2020 年度 秋季総合分科会

証明可能性論理 GL

公理 恒真式, $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$, $\Box(\Box A \rightarrow A) \rightarrow \Box A$.

規則 モダス・ポネンス $\frac{A \quad A \rightarrow B}{B}$, ネセシテーション $\frac{A}{\Box A}$.

- GL は $\Box$ を理論 T の証明可能性述語 $\text{Pr}_T(x)$ とする解釈について健全かつ完全 (Solovay の定理, 1976) .
- 解釈可能性論理の言語は $\Box$ 以外に 2 変数様相演算子 $\triangleright$ をもち, 論理式 $A \triangleright B$ は「 $T + B$ は $T + A$ において解釈可能」を意味する.

解釈可能性論理 IL

公理 GL の公理及び次の J1~J5 :

J1: $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow A \triangleright B$

J2: $(A \triangleright B) \wedge (B \triangleright C) \rightarrow A \triangleright C$

J3: $(A \triangleright C) \wedge (B \triangleright C) \rightarrow (A \vee B) \triangleright C$

J4: $A \triangleright B \rightarrow (\Diamond A \rightarrow \Diamond B)$

J5: $\Diamond A \triangleright A$

規則 モダス・ポネンス $\frac{A \quad A \rightarrow B}{B}$, ネセシテーション $\frac{A}{\Box A}$.

IL そのものは算術的に完全ではないが, IL の拡大論理である ILP や ILM が算術的に完全であることが知られている.

解釈可能性論理は Kripke 意味論を拡張した意味論を持つ。

定義 (Veltman フレーム, Veltman モデル)

- 組 $\langle W, R, \{S_x\}_{x \in W} \rangle$ が **Veltman フレーム** : $\iff$
 - $\langle W, R \rangle$ は GL の Kripke フレーム (つまり推移的かつ逆整礎的),
 - 各 $x \in W$ に対して S_x は $\uparrow(x) = \{y \in W \mid xRy\}$ 上の推移的かつ反射的な 2 項関係,
 - 各 $x \in W$ に対して $\forall y, z \in W (xRy \ \& \ yRz \Rightarrow yS_xz)$ を満たす.
- 組 $\langle W, R, \{S_x\}_{x \in W}, \Vdash \rangle$ が **Veltman モデル** : $\iff$
 - $\langle W, R, \{S_x\}_{x \in W} \rangle$ が Veltman フレーム,
 - $\Vdash$ は W の各要素における論理式の充足関係で, 各 $x \in W$ について

$$x \Vdash A \triangleright B \iff \forall y (xRy \ \& \ y \Vdash A \Rightarrow \exists z \in W (yS_xz \ \& \ z \Vdash B))$$

を満たす.

定理 (de Jongh and Veltman, 1990)

IL は (有限) Veltman フレームに関して健全かつ完全.

- Veltman フレームの定義における関係 S_x の諸条件は, IL の各公理を妥当とするために要請されている.
- これらの条件を除いた構造を考えれば, IL の各公理の役割がより詳しく分析できるだろう.

定義 (IL⁻ フレーム)

組 $\langle W, R, \{S_x\}_{x \in W} \rangle$ が **IL⁻ フレーム** : $\iff$

- $\langle W, R \rangle$ は GL の Kripke フレーム,
- 各 $x \in W$ に対して $S_x \subseteq \uparrow(x) \times W$.

IL⁻ フレームに関する先行研究

命題 (Visser, 1988)

$F = \langle W, R, \{S_x\}_{x \in W} \rangle$ を IL⁻ フレームとする.

- ① F で J1 が妥当 $\iff$ 各 S_x は反射的.
- ② F で J2 が妥当 $\iff$ F で J4 が妥当かつ各 S_x は推移的.
- ③ F で J3 は妥当.
- ④ F で J4 が妥当 $\iff$ 各 $x \in W$ について
 $\forall y, z \in W (yS_x z \Rightarrow xRz).$
- ⑤ F で J5 が妥当 $\iff$ 各 $x \in W$ について
 $\forall y, z \in W (xRy \ \& \ yRz \Rightarrow yS_x z).$

IL から J5 を除いて得られる論理は保存性論理 CL と呼ばれる.

定理 (Ignatiev, 1991)

CL は CL の公理を妥当とする (有限) IL⁻ フレームに関して完全.

問い

CL 以外の, IL の部分論理についてはどうか?

研究結果

まず、IL⁻ フレームに基づく分析の基盤となる、IL の新たな部分論理 IL⁻ を導入した。

論理 IL⁻

公理 GL の公理, J3: $(A \triangleright C) \wedge (B \triangleright C) \rightarrow (A \vee B) \triangleright C$,
 $\Box A \leftrightarrow (\neg A) \triangleright \perp$,

規則 モダス・ポネンス, ネセシテーション, 次の R1, R2:

$$\text{R1: } \frac{A \rightarrow B}{C \triangleright A \rightarrow C \triangleright B}$$

$$\text{R2: } \frac{A \rightarrow B}{B \triangleright C \rightarrow A \triangleright C}$$

命題

IL⁻ は全ての IL⁻ フレームにおいて妥当。

研究結果

IL⁻ に公理図式 $\Sigma_1, \dots, \Sigma_n$ を加えて得られる論理を $IL^-(\Sigma_1, \dots, \Sigma_n)$ と書く.

命題

- $CL = IL^-(J1, J2).$
- $IL = IL^-(J1, J2, J5).$

新たな公理図式 $J2_+, J4_+$ を導入する:

- $J2_+:$ $(A \triangleright (B \vee C)) \wedge (B \triangleright C) \rightarrow A \triangleright C$
- $J4_+:$ $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (C \triangleright A \rightarrow C \triangleright B)$

命題

F を任意の IL^- フレームとする.

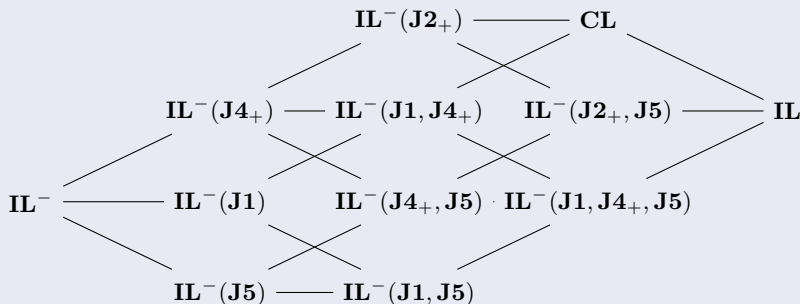
- F で $J2_+$ が妥当 $\iff F$ で $J2$ が妥当.
- F で $J4_+$ が妥当 $\iff F$ で $J4$ が妥当.

研究結果

公理 $J1, J2_+, J4_+, J5$ は対応する IL^- フレームのクラスに関して完全な論理を与えることが分かった。

定理

次の各論理は対応する（有限） IL^- フレームのクラスに関して完全：



この結果より、これらの論理は計算可能である。

研究結果

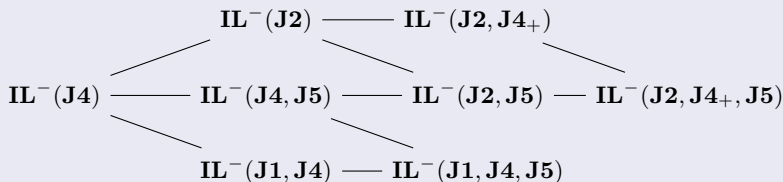
一方, $J2, J4$ は不完全な論理を与えることが分かった.

定理

- ① $IL^-(J2, J4_+, J5) \not\vdash J2_+.$
- ② $IL^-(J1, J4, J5) \not\vdash J4_+.$

系

次の各論理は IL^- フレームに関して不完全:



- 更にこれらの論理が (有限) 一般化 IL^- フレームに関して完全であることも示した.
- したがってこれらの論理も計算可能.

参考文献

- ① D. de Jongh and F. Veltman, Provability logics for relative interpretability, in: *Mathematical logic*, edited by P. Petkov, pp. 31–42 (1990).
- ② K. N. Ignatiev, Partial conservativity and modal logics, *ITLI Publication Series*, X-91-04 (1991).
- ③ T. Kurahashi and Y. Okawa, Modal completeness of sublogics of the interpretability logic IL, 投稿中.
arXiv: 2004.03813.
- ④ A. Visser, Preliminary notes on interpretability logic, Tech. Rep. 29, Department of Philosophy, Utrecht University, (1988).

連絡先

倉橋太志: kurahashi@people.kobe-u.ac.jp

大川裕矢: ahga4770@chiba-u.jp