命題様相論理における Uniform Lyndon 補間定理

倉橋太志
木更津工業高等専門学校

第 6 回 山陰 基礎論・解析学 研究集会
米子コンベンションセンター
2019 年 2 月 2 日

概要

- いろいろな命題様相論理において **Craig** の補間定理が成立する.

概要

- いろいろな命題様相論理において **Craig** の補間定理が成立する.
- **Craig** の補間定理を強めた **Lyndon** 補間定理や **Uniform** 補間定理がある.

概要

- いろいろな命題様相論理において **Craig** の補間定理が成立する.
- **Craig** の補間定理を強めた **Lyndon** 補間定理や **Uniform** 補間定理がある.
- 今回 **Uniform Lyndon** 補間性の概念を提起し，いろいろな命題様相論理に対して **Uniform Lyndon** 補間定理を証明した.

アウトライン

1. 命題様相論理における補間定理
2. **Uniform Lyndon** 補間定理

アウトライン

1. 命題様相論理における補間定理
2. **Uniform Lyndon** 補間定理

Craig 補間定理

補間定理は **Craig** によって一階述語論理に対して証明されたのが始まり.

Craig (1957)

関数記号をもたない一階述語論理において $\varphi \to \psi$ が証明できれば, φ と ψ に共通の述語記号のみをもつ論理式 θ が存在して, $\varphi \to \theta$ と $\theta \to \psi$ が証明できる.

それ以降, いろいろな論理体系に対して **Craig** 補間定理が成立するかが調べられてきた.

命題様相論理

命題様相論理における **Craig** 補間性は **70** 年代頃から調べられ始めた.

- 命題様相論理の言語は古典命題論理に論理結合子 $\Box$ を加えたもの.

命題様相論理

命題様相論理における **Craig** 補間性は **70** 年代頃から調べられ始めた.

- 命題様相論理の言語は古典命題論理に論理結合子 $\Box$ を加えたもの.
- 様相論理式 φ に対し，$v(\varphi)$ を φ に含まれる命題変数全体の集合とする.

命題様相論理

命題様相論理における **Craig** 補間性は **70** 年代頃から調べられ始めた．

- 命題様相論理の言語は古典命題論理に論理結合子 $\Box$ を加えたもの．
- 様相論理式 φ に対し，$v(\varphi)$ を φ に含まれる命題変数全体の集合とする．

様相論理 K の公理と推論規則

公理 恒真式と $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$．

規則 モダス・ポネンス $\dfrac{A,\ A \to B}{B}$，ネセシテーション $\dfrac{A}{\Box A}$，

一様代入則 $\dfrac{\varphi(p)}{\varphi(\psi)}$．

命題様相論理

命題様相論理における **Craig** 補間性は **70** 年代頃から調べられ始めた.

- 命題様相論理の言語は古典命題論理に論理結合子 $\Box$ を加えたもの.
- 様相論理式 φ に対し, $v(\varphi)$ を φ に含まれる命題変数全体の集合とする.

様相論理 **K** の公理と推論規則

公理 恒真式と $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$.

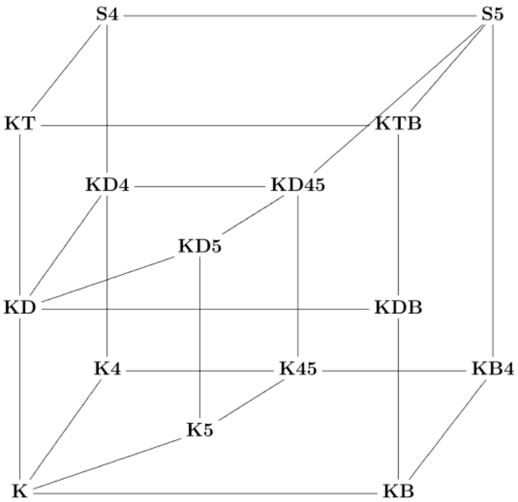
規則 モダス・ポネンス $\dfrac{A, \quad A \to B}{B}$, ネセシテーション $\dfrac{A}{\Box A}$,
一様代入則 $\dfrac{\varphi(p)}{\varphi(\psi)}$.

K に公理を加えることでいろいろな様相論理が得られる.

- $\mathbf{KD} = \mathbf{K} + \{\neg\Box\bot\}$
- $\mathbf{KT} = \mathbf{K} + \{\Box p \to p\}$
- $\mathbf{K4} = \mathbf{K} + \{\Box p \to \Box\Box p\}$
- $\mathbf{KD4} = \mathbf{K} + \{\neg\Box\bot, \Box p \to \Box\Box p\}$
- $\mathbf{S4} = \mathbf{K} + \{\Box p \to p, \Box p \to \Box\Box p\}$
- $\mathbf{K5} = \mathbf{K} + \{\Diamond p \to \Box\Diamond p\}$
- $\mathbf{KD5} = \mathbf{K} + \{\neg\Box\bot, \Diamond p \to \Box\Diamond p\}$
- $\mathbf{K45} = \mathbf{K} + \{\Box p \to \Box\Box p, \Diamond p \to \Box\Diamond p\}$
- $\mathbf{KD45} = \mathbf{K} + \{\neg\Box\bot, \Box p \to \Box\Box p, \Diamond p \to \Box\Diamond p\}$
- $\mathbf{KB} = \mathbf{K} + \{p \to \Box\Diamond p\}$
- $\mathbf{KDB} = \mathbf{K} + \{\neg\Box\bot, p \to \Box\Diamond p\}$
- $\mathbf{KTB} = \mathbf{K} + \{\Box p \to p, p \to \Box\Diamond p\}$
- $\mathbf{KB4} = \mathbf{K} + \{p \to \Box\Diamond p, \Box p \to \Box\Box p\}$
- $\mathbf{S5} = \mathbf{K} + \{\Box p \to p, \Diamond p \to \Box\Diamond p\}$
- $\mathbf{GL} = \mathbf{K} + \{\Box(\Box p \to p) \to \Box p\}$
- $\mathbf{Grz} = \mathbf{K} + \{\Box(\Box(p \to \Box p) \to p) \to p\}$

GL と Grz 以外はいわゆる modal cube の様相論理.

Modal cube



命題様相論理における Craig 補間定理

定義

命題様相論理 L が **Craig 補間性** (**CIP**) をもつとは，任意の論理式 φ, ψ について，$L \vdash \varphi \to \psi$ ならば，ある論理式 θ があって，次を満たすことをいう：

1. $v(\theta) \subseteq v(\varphi) \cap v(\psi)$;
2. $L \vdash \varphi \to \theta$;
3. $L \vdash \theta \to \psi$.

この θ を L における $\varphi \to \psi$ の **Craig interpolant** という.

命題様相論理における Craig 補間定理

定義

命題様相論理 L が **Craig 補間性** (**CIP**) をもつとは，任意の論理式 φ, ψ について，$L \vdash \varphi \to \psi$ ならば，ある論理式 θ があって，次を満たすことをいう：

1. $v(\theta) \subseteq v(\varphi) \cap v(\psi)$;
2. $L \vdash \varphi \to \theta$;
3. $L \vdash \theta \to \psi$.

この θ を L における $\varphi \to \psi$ の **Craig interpolant** という．

Gabbay (1972)

K, **KT**, **K4**, **S4** は **CIP** をもつ．

Schumm (1975)

S5 は **CIP** をもつ．

Rautenberg (1983)

KB, **KTB** は **CIP** をもつ．
また L が **CIP** をもてば $L + \neg\Box\bot$ も **CIP** をもつ．

Lyndon 補間定理

Craig 補間定理を拡張したものに **Lyndon** 補間定理がある.

Lyndon (1959)

関数記号をもたない一階述語論理において $\varphi \to \psi$ が証明できれば，論理式 θ が存在して，$\varphi \to \theta$ と $\theta \to \psi$ が証明でき，更に次が成り立つ：

1. θ において **positive** に現れる述語記号は φ と ψ に共に **positive** に現れる.
2. θ において **negative** に現れる述語記号は φ と ψ に共に **negative** に現れる.

Lyndon 補間定理

Craig 補間定理を拡張したものに **Lyndon** 補間定理がある.

Lyndon (1959)

関数記号をもたない一階述語論理において $\varphi \to \psi$ が証明できれば，論理式 θ が存在して，$\varphi \to \theta$ と $\theta \to \psi$ が証明でき，更に次が成り立つ：

1. θ において **positive** に現れる述語記号は φ と ψ に共に **positive** に現れる.
2. θ において **negative** に現れる述語記号は φ と ψ に共に **negative** に現れる.

命題様相論理における **Lyndon** 補間定理は **80** 年代から調べられ始めた.

Lyndon 補間定理

Craig 補間定理を拡張したものに **Lyndon** 補間定理がある.

Lyndon (1959)

関数記号をもたない一階述語論理において $\varphi \to \psi$ が証明できれば，論理式 θ が存在して，$\varphi \to \theta$ と $\theta \to \psi$ が証明でき，更に次が成り立つ：

1. θ において **positive** に現れる述語記号は φ と ψ に共に **positive** に現れる.
2. θ において **negative** に現れる述語記号は φ と ψ に共に **negative** に現れる.

命題様相論理における **Lyndon** 補間定理は **80** 年代から調べられ始めた.

定義

様相論理式 φ の中に **positive** に現れる命題変数全体の集合 $v^+(\varphi)$ と **negative** に現れる命題変数全体の集合 $v^-(\varphi)$ を次で定める：

- $v^+(p_i) = \{p_i\}$ **and** $v^-(p_i) = \emptyset$;
- $v^+(\bot) = v^-(\bot) = \emptyset$;
- $v^+(\psi \to \theta) = v^-(\psi) \cup v^+(\theta)$ **and** $v^-(\psi \to \theta) = v^+(\psi) \cup v^-(\theta)$;
- $v^+(\Box\psi) = v^+(\psi)$ **and** $v^-(\Box\psi) = v^-(\psi)$.

命題様相論理における Lyndon 補間定理

定義

命題様相論理 L が **Lyndon 補間性** (**LIP**) をもつとは，任意の論理式 φ, ψ について，$L \vdash \varphi \to \psi$ ならば，ある論理式 θ があって，次が成り立つことをいう：

1. $v^+(\theta) \subseteq v^+(\varphi) \cap v^+(\psi)$;
2. $v^-(\theta) \subseteq v^-(\varphi) \cap v^-(\psi)$;
3. $L \vdash \varphi \to \theta$;
4. $L \vdash \theta \to \psi$.

この θ を L における $\varphi \to \psi$ の **Lyndon interpolant** という．

命題様相論理における Lyndon 補間定理

定義

命題様相論理 L が **Lyndon 補間性** (**LIP**) をもつとは，任意の論理式 φ, ψ について，$L \vdash \varphi \to \psi$ ならば，ある論理式 θ があって，次が成り立つことをいう：

1. $v^+(\theta) \subseteq v^+(\varphi) \cap v^+(\psi)$;
2. $v^-(\theta) \subseteq v^-(\varphi) \cap v^-(\psi)$;
3. $L \vdash \varphi \to \theta$;
4. $L \vdash \theta \to \psi$.

この θ を L における $\varphi \to \psi$ の **Lyndon interpolant** という．

Maksimova (1982); Fitting (1983)

K, **KT**, **K4**, **S4**, **S5** は **LIP** をもつ．

命題様相論理における Lyndon 補間定理

定義

命題様相論理 L が **Lyndon 補間性** (**LIP**) をもつとは，任意の論理式 φ, ψ について，$L \vdash \varphi \to \psi$ ならば，ある論理式 θ があって，次が成り立つことをいう：

1. $v^+(\theta) \subseteq v^+(\varphi) \cap v^+(\psi)$;
2. $v^-(\theta) \subseteq v^-(\varphi) \cap v^-(\psi)$;
3. $L \vdash \varphi \to \theta$;
4. $L \vdash \theta \to \psi$.

この θ を L における $\varphi \to \psi$ の **Lyndon interpolant** という．

Maksimova (1982); Fitting (1983)

K, KT, K4, S4, S5 は **LIP** をもつ．

もちろん L が **LIP** をもてば **CIP** をもつが，一般に逆は必ずしも成り立つわけではない．

Maksimova (1982)

CIP をもつが **LIP** をもたない正規様相論理がある．

GL と Grz

自分が興味があるのは様相論理 **GL** と **Grz**.

- $\mathbf{GL} = \mathbf{K} + \Box(\Box p \to p) \to \Box p$
  Gödel-Löb の論理
- $\mathbf{Grz} = \mathbf{K} + \Box(\Box(p \to \Box p) \to p) \to p$
  Grzegorczyk の論理

GL と Grz

自分が興味があるのは様相論理 **GL** と **Grz.**

- $\mathbf{GL} = \mathbf{K} + \Box(\Box p \to p) \to \Box p$
  Gödel-Löb の論理
- $\mathbf{Grz} = \mathbf{K} + \Box(\Box(p \to \Box p) \to p) \to p$
  Grzegorczyk の論理

算術の証明可能性について分析するためにこれらの様相論理が非常に有用.

GL と Grz

自分が興味があるのは様相論理 **GL** と **Grz**.

- $\mathbf{GL} = \mathbf{K} + \Box(\Box p \to p) \to \Box p$
  Gödel-Löb の論理
- $\mathbf{Grz} = \mathbf{K} + \Box(\Box(p \to \Box p) \to p) \to p$
  Grzegorczyk の論理

算術の証明可能性について分析するためにこれらの様相論理が非常に有用.
$\mathrm{Pr}_{\mathsf{PA}}(x)$ を算術 PA の証明可能性述語とする.

GL と Grz

自分が興味があるのは様相論理 **GL** と **Grz**.

- $\mathbf{GL} = \mathbf{K} + \Box(\Box p \to p) \to \Box p$
  Gödel-Löb の論理
- $\mathbf{Grz} = \mathbf{K} + \Box(\Box(p \to \Box p) \to p) \to p$
  Grzegorczyk の論理

算術の証明可能性について分析するためにこれらの様相論理が非常に有用.
$\mathrm{Pr}_{\mathsf{PA}}(x)$ を算術 PA の証明可能性述語とする.

Solovay (1976)

GL は $\Box$ を $\mathrm{Pr}_{\mathsf{PA}}(\ulcorner \varphi \urcorner)$ で解釈した場合に対応する論理.

GL と Grz

自分が興味があるのは様相論理 **GL** と **Grz**.

- $\mathbf{GL} = \mathbf{K} + \Box(\Box p \to p) \to \Box p$
  Gödel-Löb の論理
- $\mathbf{Grz} = \mathbf{K} + \Box(\Box(p \to \Box p) \to p) \to p$
  Grzegorczyk の論理

算術の証明可能性について分析するためにこれらの様相論理が非常に有用.
$\mathrm{Pr}_{\mathsf{PA}}(x)$ を算術 PA の証明可能性述語とする.

Solovay (1976)

GL は $\Box$ を $\mathrm{Pr}_{\mathsf{PA}}(\ulcorner\varphi\urcorner)$ で解釈した場合に対応する論理.

Goldblatt (1978); Boolos (1980)

Grz は $\Box$ を $\mathrm{Pr}_{\mathsf{PA}}(\ulcorner\varphi\urcorner) \land \varphi$ で解釈した場合に対応する論理.

GL と Grz

Gödel の不完全性定理の証明の鍵は次の定理.

不動点定理

任意の算術の 1 変数論理式 $\varphi(x)$ に対して，ある算術の文 ψ が存在して，
PA $\vdash \psi \leftrightarrow \varphi(\ulcorner \psi \urcorner)$.

GL と Grz

Gödel の不完全性定理の証明の鍵は次の定理.

不動点定理

任意の算術の 1 変数論理式 $\varphi(x)$ に対して，ある算術の文 ψ が存在して，
$\mathsf{PA} \vdash \psi \leftrightarrow \varphi(\ulcorner \psi \urcorner)$.

これに相当する主張が **GL** において成立する.

不動点定理 (de Jongh; Sambin (1976))

任意の命題変数 p と，p がすべて $\Box$ の中にある様相論理式 $\varphi(p)$ について，ある様相論理式 ψ が存在して，$v(\psi) \subseteq v(\varphi) \setminus \{p\}$ かつ $\mathbf{GL} \vdash \psi \leftrightarrow \varphi(\psi)$.

GL と Grz

Gödel の不完全性定理の証明の鍵は次の定理.

不動点定理

任意の算術の 1 変数論理式 $\varphi(x)$ に対して，ある算術の文 ψ が存在して，
$\mathsf{PA} \vdash \psi \leftrightarrow \varphi(\ulcorner \psi \urcorner)$.

これに相当する主張が **GL** において成立する.

不動点定理 (de Jongh; Sambin (1976))

任意の命題変数 p と，p がすべて $\Box$ の中にある様相論理式 $\varphi(p)$ について，ある様相論理式 ψ が存在して，$v(\psi) \subseteq v(\varphi) \setminus \{p\}$ かつ $\mathbf{GL} \vdash \psi \leftrightarrow \varphi(\psi)$.

更に特筆すべきは次の不動点の一意性．これにより例えば **Gödel** 文の **provable equivalence** が導ける.

不動点定理の一意性 (Bernardi (1976))

命題変数 p, q と，p がすべて $\Box$ の中にある様相論理式 $\varphi(p)$ について，
$\mathbf{GL} \vdash \boxdot(p \leftrightarrow \varphi(p)) \land \boxdot(q \leftrightarrow \varphi(q)) \to (p \leftrightarrow q)$.

ただし $\boxdot\varphi \equiv \Box\varphi \land \varphi$.

GL と Grz の CIP

GL と Grz は CIP をもつ.

Smoryński (1978); Boolos (1979)

GL は CIP をもつ.

Boolos (1980)

Grz は CIP をもつ.

GL と Grz の CIP

GL と Grz は CIP をもつ.

Smoryński (1978); Boolos (1979)

GL は CIP をもつ.

Boolos (1980)

Grz は CIP をもつ.

GL の CIP を用いて不動点定理が証明できる (Smoryński (1978)).

不動点の一意性から得られる

$$\mathbf{GL} \vdash (\boxdot(p \leftrightarrow \varphi(p)) \land p) \to (\boxdot(q \leftrightarrow \varphi(q)) \to q)$$

に **CIP** を適用して得られる θ は $\mathbf{GL} \vdash \theta \leftrightarrow \varphi(\theta)$ を満たす.

補間性は何らかのよい性質をもつ論理式の存在を示すのに有用.

Uniform 補間定理

Shavrukov (1993) は **GL** と算術との結びつきに関する更なる性質を調べるために，**GL** に対する **uniform** 補間定理を証明した．

定義

命題様相論理 L が **uniform 補間性** (**UIP**) をもつとは，任意の論理式 φ と任意の命題変数の有限集合 P について，ある論理式 θ があって，次が成り立つことをいう：

1. $v(\theta) \subseteq v(\varphi) \setminus P$;
2. $L \vdash \varphi \to \theta$;
3. $L \vdash \varphi \to \psi$ かつ $v(\psi) \cap P = \emptyset$ を満たす全ての論理式 ψ について $L \vdash \theta \to \psi$.

この θ を L における (φ, P) の **uniform interpolant** という．

Uniform 補間定理

Shavrukov (1993) は **GL** と算術との結びつきに関する更なる性質を調べるために, **GL** に対する **uniform** 補間定理を証明した.

定義

命題様相論理 L が **uniform 補間性** (**UIP**) をもつとは, 任意の論理式 φ と任意の命題変数の有限集合 P について, ある論理式 θ があって, 次が成り立つことをいう：

1. $v(\theta) \subseteq v(\varphi) \setminus P$;
2. $L \vdash \varphi \to \theta$;
3. $L \vdash \varphi \to \psi$ かつ $v(\psi) \cap P = \emptyset$ を満たす全ての論理式 ψ について $L \vdash \theta \to \psi$.

この θ を L における (φ, P) の **uniform interpolant** という.

Shavrukov (1993)

GL は **UIP** をもつ.

Uniform 補間定理

Shavrukov (1993) は **GL** と算術との結びつきに関する更なる性質を調べるために，**GL** に対する **uniform** 補間定理を証明した．

定義

命題様相論理 L が **uniform** 補間性 (**UIP**) をもつとは，任意の論理式 φ と任意の命題変数の有限集合 P について，ある論理式 θ があって，次が成り立つことをいう：

1. $v(\theta) \subseteq v(\varphi) \setminus P$;
2. $L \vdash \varphi \to \theta$;
3. $L \vdash \varphi \to \psi$ かつ $v(\psi) \cap P = \emptyset$ を満たす全ての論理式 ψ について $L \vdash \theta \to \psi$.

この θ を L における (φ, P) の **uniform interpolant** という．

Shavrukov (1993)

GL は **UIP** をもつ．

同時期に **Pitts (1992)** が直観主義命題論理が **UIP** をもつことを示している．

命題様相論理における uniform 補間定理

命題

L が **UIP** をもてば **CIP** をもつ．

Proof.

$L \vdash \varphi \to \psi$ とする．$P = v(\varphi) \setminus v(\psi)$ とすれば，**UIP** より (φ, P) の **uniform interpolant** θ がとれる．

- $v(\theta) \subseteq v(\varphi) \setminus P = v(\varphi) \cap v(\psi)$;
- $L \vdash \varphi \to \theta$;
- $L \vdash \varphi \to \psi$ かつ $v(\psi) \cap P = \emptyset$ なので $L \vdash \theta \to \psi$.

□

命題様相論理における uniform 補間定理

Ghilardi (1995); Visser (1996)

K は UIP をもつ.

Visser (1996)

Grz は UIP をもつ.

Bílková (2007)

KT は UIP をもつ.

命題様相論理における uniform 補間定理

Ghilardi (1995); Visser (1996)

K は **UIP** をもつ.

Visser (1996)

Grz は **UIP** をもつ.

Bílková (2007)

KT は **UIP** をもつ.

UIP $\Rightarrow$ **CIP** の逆は一般には成立しない.

Ghilardi and Zawadowski (1995)

S4 は **UIP** をもたない.

Bílková (2007)

K4 は **UIP** をもたない.

個人的な背景

GL と **Grz** に関して，**LIP** は実は長らく未解決であった.

問題 (Maksimova 1991)

GL と **Grz** は **LIP** を満たすか？

個人的な背景

GL と **Grz** に関して，**LIP** は実は長らく未解決であった.

問題 (Maksimova 1991)

GL と **Grz** は **LIP** を満たすか？

特に **GL** については証明可能性論理の重要なサーベイ論文 **Artemov and Beklemishev (2005)** にも未解決として取り上げられており，**2010** 年ごろ（修士の頃）にそれ見て，アタックしてみようと考えた.

個人的な背景

GL と **Grz** に関して，**LIP** は実は長らく未解決であった.

問題 (Maksimova 1991)

GL と **Grz** は **LIP** を満たすか？

特に **GL** については証明可能性論理の重要なサーベイ論文 **Artemov and Beklemishev (2005)** にも未解決として取り上げられており，**2010** 年ごろ（修士の頃）にそれ見て，アタックしてみようと考えた.

そんな矢先…

個人的な背景

GL と **Grz** に関して，**LIP** は実は長らく未解決であった.

問題 (Maksimova 1991)

GL と **Grz** は **LIP** を満たすか？

特に **GL** については証明可能性論理の重要なサーベイ論文 **Artemov and Beklemishev (2005)** にも未解決として取り上げられており，**2010** 年ごろ（修士の頃）にそれ見て，アタックしてみようと考えた.

　そんな矢先…

Shamkanov (2011)

GL は **LIP** を満たす.

すぐに先を越されてしまった.

個人的な背景

当時は **Maksimova (1991)** を知らず，**Grz** の **LIP** が未解決かどうかは知らなかった．

個人的な背景

当時は **Maksimova (1991)** を知らず，**Grz** の **LIP** が未解決かどうかは知らなかった.
それからはあまり補間性のことを考えていなかったが，最近 **Maksimova (1991)** を読んで，**Grz** の **LIP** が未解決であることを知り，アタックしてみようと考えた.

個人的な背景

当時は **Maksimova (1991)** を知らず，**Grz** の **LIP** が未解決かどうかは知らなかった.

それからはあまり補間性のことを考えていなかったが，最近 **Maksimova (1991)** を読んで，**Grz** の **LIP** が未解決であることを知り，アタックしてみようと考えた.

すると…

個人的な背景

当時は **Maksimova (1991)** を知らず，**Grz** の **LIP** が未解決かどうかは知らなかった．
それからはあまり補間性のことを考えていなかったが，最近 **Maksimova (1991)** を読んで，**Grz** の **LIP** が未解決であることを知り，アタックしてみようと考えた．
　すると…

Maksimova (2014)

Grz は **LIP** を満たす．

すでに先を越されていた．

個人的な背景

LIP, UIP についていろいろと分かってきている.

Maksimova (2014)

L が **K5** を含むならば, L の **CIP** と **UIP** は同値.
つまり **K5, K45, KB4, KB4, S5** は **UIP** をもつ.

個人的な背景

LIP, UIP についていろいろと分かってきている.

Maksimova (2014)

L が **K5** を含むならば，L の **CIP** と **UIP** は同値.
つまり **K5, K45, KB4, KB4, S5** は **UIP** をもつ.

Kuznets (2016)

Modal cube の全ての様相論理について，**LIP** が成立する.

個人的な背景

LIP, UIP についていろいろと分かってきている.

Maksimova (2014)

L が **K5** を含むならば，L の **CIP** と **UIP** は同値.
つまり **K5, K45, KB4, KB4, S5** は **UIP** をもつ.

Kuznets (2016)

Modal cube の全ての様相論理について，**LIP** が成立する.

LIP と **UIP** は個別に議論されている.

個人的な背景

LIP, UIP についていろいろと分かってきている.

Maksimova (2014)

L が **K5** を含むならば, L の **CIP** と **UIP** は同値.
つまり **K5, K45, KB4, KB4, S5** は **UIP** をもつ.

Kuznets (2016)

Modal cube の全ての様相論理について, **LIP** が成立する.

LIP と **UIP** は個別に議論されている.

モチベーション

LIP と **UIP** を統一的に扱えないだろうか？

個人的な背景

LIP, UIP についていろいろと分かってきている.

Maksimova (2014)

L が **K5** を含むならば，L の **CIP** と **UIP** は同値.
つまり **K5, K45, KB4, KB4, S5** は **UIP** をもつ.

Kuznets (2016)

Modal cube の全ての様相論理について，**LIP** が成立する.

LIP と **UIP** は個別に議論されている.

モチベーション

LIP と **UIP** を統一的に扱えないだろうか？
そして **GL** と **Grz** の **LIP** を系として含む結果をだしてリベンジ！

アウトライン

1. 命題様相論理における補間定理
2. **Uniform Lyndon 補間定理**

Uniform Lyndon 補間性

次の概念が自然に導入できる．

定義

命題様相論理 L が **uniform Lyndon 補間性** (**ULIP**) をもつとは，任意の論理式 φ と任意の命題変数の有限集合 P, Q について，ある論理式 θ があって，次の条件を満たすことをいう：

1. $v^+(\theta) \subseteq v^+(\varphi) \setminus P$ かつ $v^-(\theta) \subseteq v^-(\varphi) \setminus Q$;
2. $L \vdash \varphi \to \theta$;
3. $L \vdash \varphi \to \psi$ かつ $v^+(\psi) \cap P = v^-(\psi) \cap Q = \emptyset$ を満たす全ての論理式 ψ について $L \vdash \theta \to \psi$.

この θ を (φ, P, Q) の **uniform Lyndon interpolant** という．

ULIP の基本性質 1

命題

L が **ULIP をもつならば，** L **は UIP と LIP をもつ．**

Proof.

- **(UIP):** (φ, P, P) **の uniform Lyndon interpolant は** (φ, P) **の uniform interpolant となる．**
- $L \vdash \varphi \to \psi$ **のとき，** $P = v^{+}(\varphi) \setminus v^{-}(\psi)$**,** $Q = v^{-}(\varphi) \setminus v^{-}(\psi)$ **とすれば，** (φ, P, Q) **の uniform Lyndon interpolant が** $\varphi \to \psi$ **の Lyndon interpolant となる．**

$\square$

ULIP の基本性質 1

命題

L が **ULIP** をもつならば，L は **UIP** と **LIP** をもつ．

Proof.

- **(UIP):** (φ, P, P) の **uniform Lyndon interpolant** は (φ, P) の **uniform interpolant** となる．
- $L \vdash \varphi \to \psi$ のとき，$P = v^+(\varphi) \setminus v^-(\psi)$, $Q = v^-(\varphi) \setminus v^-(\psi)$ とすれば，(φ, P, Q) の **uniform Lyndon interpolant** が $\varphi \to \psi$ の **Lyndon interpolant** となる．

□

系

K4, KD4, S4 は **ULIP** をもたない．

ULIP の基本性質 2

命題

L が **ULIP** をもてば $L + \neg\Box\bot$ も **ULIP** をもつ.

ULIP の基本性質 2

命題

L が **ULIP** をもてば $L + \neg\Box\bot$ も **ULIP** をもつ.

命題

L が **K5** を含むならば, L の **LIP** と **ULIP** は同値.

ULIP の基本性質 2

命題

L が **ULIP** をもてば $L + \neg\Box\bot$ も **ULIP** をもつ.

命題

L が **K5** を含むならば, L の **LIP** と **ULIP** は同値.

系

K5, K45, KB4, S5 は **ULIP** をもつ.

ULIP の基本性質 2

命題

L が **ULIP** をもてば $L + \neg\Box\bot$ も **ULIP** をもつ.

命題

L が **K5** を含むならば, L の **LIP** と **ULIP** は同値.

系

K5, K45, KB4, S5 は **ULIP** をもつ.

あとは **GL** と **Grz**, そして **modal cube** の中では **K, KT, KB, KTB** の **ULIP** が知りたい.

得られた結果

定義

- 様相論理式 φ の深さ $d(\varphi)$ を次で定める：
  - $d(p) = d(\bot) = 0$;
  - $d(\varphi \to \psi) = \max\{d(\varphi), d(\psi)\}$;
  - $d(\Box\varphi) = d(\varphi) + 1$.

得られた結果

定義

- 様相論理式 φ の深さ $d(\varphi)$ を次で定める：
  - $d(p) = d(\bot) = 0$;
  - $d(\varphi \to \psi) = \max\{d(\varphi), d(\psi)\}$;
  - $d(\Box\varphi) = d(\varphi) + 1$.
- φ に含まれる $\Box$ の個数を $n(\varphi)$ とかく.

定理 1

K, KT, KB, KTB は **ULIP** をもつ.
特に (φ, P, Q) の **uniform Lyndon interpolant** θ は $d(\theta) \leq d(\varphi)$ でとれる.

特に **KB, KTB** の **UIP** は知られていなかった.

得られた結果

定義

- 様相論理式 φ の深さ $d(\varphi)$ を次で定める：
  - $d(p) = d(\bot) = 0$;
  - $d(\varphi \to \psi) = \max\{d(\varphi), d(\psi)\}$;
  - $d(\Box\varphi) = d(\varphi) + 1$.
- φ に含まれる $\Box$ の個数を $n(\varphi)$ とかく.

定理 1

K, KT, KB, KTB は **ULIP** をもつ.
特に (φ, P, Q) の **uniform Lyndon interpolant** θ は $d(\theta) \leq d(\varphi)$ でとれる.

特に **KB, KTB** の **UIP** は知られていなかった.

定理 2

GL と **Grz** は **ULIP** をもつ.
特に (φ, P, Q) の **uniform Lyndon interpolant** θ は $d(\theta) \leq 2n(\varphi) + 2$ でとれる.

これらの証明は **Visser (1996)** による **UIP** の証明の改良.
特に **GL** と **Grz** については **Visser** による $d(\theta) \leq 4n(\varphi) + 1$ を改良できている.

証明の方針に向かう定義

P, Q を命題変数の有限集合とする．

定義

命題様相論理式 φ が (P, Q)-論理式であるとは，$v^+(\varphi) \subseteq P$ かつ $v^-(\varphi) \subseteq Q$ となることをいう．

証明の方針に向かう定義

P, Q を命題変数の有限集合とする．

定義

命題様相論理式 φ が (P, Q)-論理式であるとは，$v^+(\varphi) \subseteq P$ かつ $v^-(\varphi) \subseteq Q$ となることをいう．

(P, Q)-論理式は深さを n に制限すれば $\mathbf{K}$ 上で実質有限個．

定義

$F_n^{(P,Q)}$ を，$d(\varphi) \leq n$ となる (P, Q)-論理式 φ の有限集合で，
そのような任意の ψ がある $F_n^{(P,Q)}$ の論理式と $\mathbf{K}$ 上で同値となるものとする．

証明の方針に向かう定義

P, Q を命題変数の有限集合とする.

定義

命題様相論理式 φ が (P,Q)-論理式であるとは，$v^+(\varphi) \subseteq P$ かつ $v^-(\varphi) \subseteq Q$ となることをいう.

(P,Q)-論理式は深さを n に制限すれば $\mathbf{K}$ 上で実質有限個.

定義

$F_n^{(P,Q)}$ を，$d(\varphi) \leq n$ となる (P,Q)-論理式 φ の有限集合で，
そのような任意の ψ がある $F_n^{(P,Q)}$ の論理式と $\mathbf{K}$ 上で同値となるものとする.

定義

$M = (W, \prec, \Vdash)$ をクリプキモデル，$w \in W$ とする.
$T_n^{(P,Q)}(w) := \bigwedge\{\varphi \in F_n^{(P,Q)} : w \Vdash \varphi\}$.

証明の方針 1

(φ, P, Q) の **uniform Lyndon interpolant** θ を取りたい.

証明の方針 1

(φ, P, Q) の **uniform Lyndon interpolant** θ を取りたい.

$P_1 = v^+(\varphi) \setminus P$, $Q_1 = v^-(\varphi) \setminus Q$ とする.
φ に依存した何らかの自然数 k について

$$\theta \equiv \bigwedge \{\delta \in F_k^{(P_1, Q_1)} : L \vdash \varphi \to \delta\}$$

証明の方針 1

(φ, P, Q) の **uniform Lyndon interpolant** θ を取りたい.

$P_1 = v^+(\varphi) \setminus P$, $Q_1 = v^-(\varphi) \setminus Q$ とする.
φ に依存した何らかの自然数 k について

$$\theta \equiv \bigwedge \{\delta \in F_k^{(P_1, Q_1)} : L \vdash \varphi \to \delta\}$$

とすれば次が成り立つ：

- $d(\theta) \leq k$
- $v^+(\theta) \subseteq P_1 = v^+(\varphi) \setminus P$, $v^-(\theta) \subseteq Q_1 = v^-(\varphi) \setminus Q$
- $L \vdash \varphi \to \theta$.

証明の方針 1

(φ, P, Q) の **uniform Lyndon interpolant** θ を取りたい.

$P_1 = v^+(\varphi) \setminus P$, $Q_1 = v^-(\varphi) \setminus Q$ とする.
φ に依存した何らかの自然数 k について

$$\theta \equiv \bigwedge \{\delta \in F_k^{(P_1, Q_1)} : L \vdash \varphi \to \delta\}$$

とすれば次が成り立つ：

- $d(\theta) \leq k$
- $v^+(\theta) \subseteq P_1 = v^+(\varphi) \setminus P$, $v^-(\theta) \subseteq Q_1 = v^-(\varphi) \setminus Q$
- $L \vdash \varphi \to \theta$.

ψ を $v^+(\psi) \cap P = v^-(\psi) \cap Q = \emptyset$ かつ $L \nvdash \theta \to \psi$ とする.
$L \nvdash \varphi \to \psi$ を示せばよい.

証明の方針 2

- L はクリプキモデルの集合 $\mathcal{C}$ に対して健全かつ完全とする.

証明の方針 2

- L はクリプキモデルの集合 $\mathcal{C}$ に対して健全かつ完全とする.
- $L \nvdash \theta \to \psi$ より $M' \in \mathcal{C}$ とその元 w' で $w' \Vdash' \theta$ かつ $w' \nVdash' \psi$ となるものがとれる.

証明の方針 2

- L はクリプキモデルの集合 $\mathcal{C}$ に対して健全かつ完全とする.
- $L \nvdash \theta \to \psi$ より $M' \in \mathcal{C}$ とその元 w' で $w' \Vdash' \theta$ かつ $w' \nVdash' \psi$ となるものがとれる.
- $w' \Vdash' T_k^{(Q_1,P_1)}(w')$ なので $w' \nVdash' \theta \to \neg T_k^{(Q_1,P_1)}(w')$.

証明の方針 2

- L はクリプキモデルの集合 $\mathcal{C}$ に対して健全かつ完全とする.
- $L \nvdash \theta \to \psi$ より $M' \in \mathcal{C}$ とその元 w' で $w' \Vdash' \theta$ かつ $w' \nVdash' \psi$ となるものがとれる.
- $w' \Vdash' T_k^{(Q_1,P_1)}(w')$ なので $w' \nVdash' \theta \to \neg T_k^{(Q_1,P_1)}(w')$.
- $L \nvdash \theta \to \neg T_k^{(Q_1,P_1)}(w')$.

証明の方針 2

- L はクリプキモデルの集合 $\mathcal{C}$ に対して健全かつ完全とする.
- $L \nvdash \theta \to \psi$ より $M' \in \mathcal{C}$ とその元 w' で $w' \Vdash' \theta$ かつ $w' \nVdash' \psi$ となるものがとれる.
- $w' \Vdash' T_k^{(Q_1, P_1)}(w')$ なので $w' \nVdash' \theta \to \neg T_k^{(Q_1, P_1)}(w')$.
- $L \nvdash \theta \to \neg T_k^{(Q_1, P_1)}(w')$.
- θ の取り方より $L \nvdash \varphi \to \neg T_k^{(Q_1, P_1)}(w')$.

証明の方針 2

- L はクリプキモデルの集合 $\mathcal{C}$ に対して健全かつ完全とする.
- $L \nvdash \theta \to \psi$ より $M' \in \mathcal{C}$ とその元 w' で $w' \Vdash' \theta$ かつ $w' \nVdash' \psi$ となるものがとれる.
- $w' \Vdash' T_k^{(Q_1, P_1)}(w')$ なので $w' \nVdash' \theta \to \neg T_k^{(Q_1, P_1)}(w')$.
- $L \nvdash \theta \to \neg T_k^{(Q_1, P_1)}(w')$.
- θ の取り方より $L \nvdash \varphi \to \neg T_k^{(Q_1, P_1)}(w')$.
- $M \in \mathcal{C}$ とその元 w で $w \Vdash \varphi$ かつ $w \Vdash T_k^{(Q_1, P_1)}(w')$ となるものがとれる.

証明の方針 2

- L はクリプキモデルの集合 $\mathcal{C}$ に対して健全かつ完全とする.
- $L \nvdash \theta \to \psi$ より $M' \in \mathcal{C}$ とその元 w' で $w' \Vdash' \theta$ かつ $w' \nVdash' \psi$ となるものがとれる.
- $w' \Vdash' T_k^{(Q_1,P_1)}(w')$ なので $w' \nVdash' \theta \to \neg T_k^{(Q_1,P_1)}(w')$.
- $L \nvdash \theta \to \neg T_k^{(Q_1,P_1)}(w')$.
- θ の取り方より $L \nvdash \varphi \to \neg T_k^{(Q_1,P_1)}(w')$.
- $M \in \mathcal{C}$ とその元 w で $w \Vdash \varphi$ かつ $w \Vdash T_k^{(Q_1,P_1)}(w')$ となるものがとれる.
- つまり $\gamma \in F_k^{(Q_1,P_1)}$ について $w' \Vdash' \gamma \Rightarrow w \Vdash \gamma$.

証明の方針 2

- L はクリプキモデルの集合 $\mathcal{C}$ に対して健全かつ完全とする.
- $L \nvdash \theta \to \psi$ より $M' \in \mathcal{C}$ とその元 w' で $w' \Vdash' \theta$ かつ $w' \nVdash' \psi$ となるものがとれる.
- $w' \Vdash' T_k^{(Q_1,P_1)}(w')$ なので $w' \nVdash' \theta \to \neg T_k^{(Q_1,P_1)}(w')$.
- $L \nvdash \theta \to \neg T_k^{(Q_1,P_1)}(w')$.
- θ の取り方より $L \nvdash \varphi \to \neg T_k^{(Q_1,P_1)}(w')$.
- $M \in \mathcal{C}$ とその元 w で $w \Vdash \varphi$ かつ $w \Vdash T_k^{(Q_1,P_1)}(w')$ となるものがとれる.
- つまり $\gamma \in F_k^{(Q_1,P_1)}$ について $w' \Vdash' \gamma \Rightarrow w \Vdash \gamma$.
- 対偶を取ると $\gamma \in F_k^{(P_1,Q_1)}$ について $w \Vdash \gamma \Rightarrow w' \Vdash' \gamma$.

証明の方針 2

- L はクリプキモデルの集合 $\mathcal{C}$ に対して健全かつ完全とする.
- $L \nvdash \theta \to \psi$ より $M' \in \mathcal{C}$ とその元 w' で $w' \Vdash' \theta$ かつ $w' \nVdash' \psi$ となるものがとれる.
- $w' \Vdash' T_k^{(Q_1,P_1)}(w')$ なので $w' \nVdash' \theta \to \neg T_k^{(Q_1,P_1)}(w')$.
- $L \nvdash \theta \to \neg T_k^{(Q_1,P_1)}(w')$.
- θ の取り方より $L \nvdash \varphi \to \neg T_k^{(Q_1,P_1)}(w')$.
- $M \in \mathcal{C}$ とその元 w で $w \Vdash \varphi$ かつ $w \Vdash T_k^{(Q_1,P_1)}(w')$ となるものがとれる.
- つまり $\gamma \in F_k^{(Q_1,P_1)}$ について $w' \Vdash' \gamma \Rightarrow w \Vdash \gamma$.
- 対偶を取ると $\gamma \in F_k^{(P_1,Q_1)}$ について $w \Vdash \gamma \Rightarrow w' \Vdash' \gamma$.

$$\boxed{w \Vdash \varphi} \xRightarrow{\quad F_k^{(P_1,Q_1)} \quad} \boxed{w' \nVdash' \psi}$$

証明の方針 3

$M^* \in \mathcal{C}$ とその元 w^* で
$w^* \Vdash^* T_{d(\varphi)}^{(v^+(\varphi), v^-(\varphi))}(w) \wedge T_{d(\psi)}^{(v^-(\psi), v^+(\psi))}(w')$ となるものがとれれば
$w^* \Vdash^* \varphi$ かつ $w^* \nVdash^* \psi$ で $L \nvdash \varphi \to \psi$ が結論できる.

$$
\begin{tikzcd}
w \Vdash \varphi \arrow[rr, Rightarrow, "F_k^{(P_1, Q_1)}"] \arrow[dr, Rightarrow, "F_{d(\varphi)}^{(v^+(\varphi), v^-(\varphi))}"'] & & w' \nVdash' \psi \\
& w^* \nVdash^* \varphi \to \psi \arrow[ur, Rightarrow, "F_{d(\psi)}^{(v^+(\psi), v^-(\psi))}"'] &
\end{tikzcd}
$$

証明の方針 3

$M^* \in \mathcal{C}$ とその元 w^* で
$w^* \Vdash^* T_{d(\varphi)}^{(v^+(\varphi),v^-(\varphi))}(w) \wedge T_{d(\psi)}^{(v^-(\psi),v^+(\psi))}(w')$ となるものがとれれば
$w^* \Vdash^* \varphi$ かつ $w^* \nVdash^* \psi$ で $L \nvdash \varphi \to \psi$ が結論できる.

$$\begin{tikzcd}
\boxed{w \Vdash \varphi} \arrow[rr, Rightarrow, "F_k^{(P_1,Q_1)}"] \arrow[dr, Rightarrow, "F_{d(\varphi)}^{(v^+(\varphi),v^-(\varphi))}"'] & & \boxed{w' \nVdash' \psi} \\
& \boxed{w^* \nVdash^* \varphi \to \psi} \arrow[ur, Rightarrow, "F_{d(\psi)}^{(v^+(\psi),v^-(\psi))}"'] &
\end{tikzcd}$$

各 φ に対して，どれだけ大きな k をとれば，条件を満たす任意の ψ に対して上記の w^* が取れるのかを調べればよい.

証明の方針 4

ここまでの流れは **Visser (1996)** と本質的に変わらないが，M と M' から M^* の $\Vdash^*$ を定義するのに **UIP** と **ULIP** では本質的に大きな違いがあった（**ULIP** では **16** 個もの場合分けをして定義）．

結果

- **K, KT, KB, KTB** では $k = d(\varphi)$ でとれる．
- **GL** と **Grz** では $k = 2n(\varphi) + 2$ でとれる．

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{w \Vdash \varphi} \arrow[rr, Rightarrow, "F_k^{(P_1, Q_1)}"] \arrow[dr, Rightarrow, "F_{d(\varphi)}^{(v^+(\varphi), v^-(\varphi))}"'] & & \boxed{w' \nVdash' \psi} \\
& \boxed{w^* \nVdash^* \varphi \to \psi} \arrow[ur, Rightarrow, "F_{d(\psi)}^{(v^+(\psi), v^-(\psi))}"'] &
\end{tikzcd}
$$

参考文献

- **T. Kurahashi, Uniform Lyndon interpolation property in propositional modal logics, arXiv: 1809.00943.**
- **L. Maksimova, The Lyndon interpolation theorem in modal logics, In:** *Mathematical logic and the theory of algorithms*, **pp. 45–55. "Nauka" Sibirsk. Otdel., Novosibirsk (1982).**
- **L. Maksimova, Amalgamation and interpolation in normal modal logics,** *Studia Logica*, **vol. 50, no. 3-4, pp. 457–471 (1991).**
- **L. Maksimova, The Lyndon property and uniform interpolation over the Grzegorczyk logic,** *Siberian Mathematical Journal*, **vol. 55, no. 1, pp. 118–124, (2014).**
- **D. Shamkanov, Interpolation properties for provability logics** *GL* **and** *GLP*, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, **vol. 274, no. 1, pp. 303–316 (2011).**
- **V. Shavrukov, Subalgebras of diagonalizable algebras of theories containing arithmetic,** *Dissertationes Mathematicae*, **vol. 323, pp. 1–82 (1993).**
- **A. Visser, Uniform interpolation and layered bisimulation, In:** *Gödel '96, Logical Foundations of Mathematics, Computer Science and Physics – Kurt Gödel's Legacy*, **pp. 139–164, Springer, Berlin (1996).**