Sacchetti の様相論理に対する不動点定理について

発表者: 大川裕矢 (千葉大学融合理工学府)
共同発表者: 倉橋太志 (木更津工業高等専門学校)

数学会 2019 年 3/17

1 Sacchetti の論理

2 不動点の構成

1. Sacchetti の論理
2. 不動点の構成

wGL$_n$ の導入

定義

$\mathrm{GL} := \mathrm{K} + (\Box(\Box A \to A) \to \Box A)$

wGL_n の導入

定義

$\mathsf{GL} := \mathsf{K} + (\Box(\Box A \to A) \to \Box A)$

定義 (2001: Sacchetti)

$\mathsf{wGL}_n := \mathsf{K} + (\Box(\Box^n A \to A) \to \Box A) \ (n \geq 2)$

wGL_n の導入

定義

$\mathrm{GL} := \mathrm{K} + (\Box(\Box A \to A) \to \Box A)$

定義 (2001: Sacchetti)

$\mathrm{wGL}_n := \mathrm{K} + (\Box(\Box^n A \to A) \to \Box A)$ $(n \geq 2)$

各様相論理はある証明可能性述語を分析できる.
GL の算術的完全性 (Solovay: 1976)
$\mathrm{wGL}_n (n \geq 2)$ の算術的完全性 (Kurahashi: 2018)

不動点定理

定義

様相論理 L で不動点定理が成立する.
:⇔ 全ての p が □ の scope 内にある $A(p)$ を任意にとる.
このとき, 以下を満たす F が存在する.

- $\mathsf{L} \vdash F \leftrightarrow A(F)$
- $Var(F) \subseteq Var(A) \setminus \{p\}$

不動点定理

定義

様相論理 L で不動点定理が成立する.
:⇔ 全ての p が $\Box$ の scope 内にある $A(p)$ を任意にとる.
このとき, 以下を満たす F が存在する.

- $\mathrm{L} \vdash F \leftrightarrow A(F)$
- $Var(F) \subseteq Var(A) \setminus \{p\}$

定理 (de Jongh, Sambin: 1976)

GL で不動点定理が成立し, その不動点は effective に構成できる.

不動点定理

定義

様相論理 L で不動点定理が成立する.
:⇔ 全ての p が $\Box$ の scope 内にある $A(p)$ を任意にとる.
このとき, 以下を満たす F が存在する.

- $\mathrm{L} \vdash F \leftrightarrow A(F)$
- $Var(F) \subseteq Var(A) \setminus \{p\}$

定理 (de Jongh, Sambin: 1976)

GL で不動点定理が成立し, その不動点は effective に構成できる.

定理 (Sacchetti: 2001)

$\mathrm{wGL}_n (n \geq 2)$ で不動点定理が成立する.

問

Problem (Sacchetti: 2001)

不動点は具体的に構成できるか?

問

Problem (Sacchetti: 2001)

不動点は具体的に構成できるか?

Lindström による GL の不動点定理の証明のアイディア (1996) から, $\Box A(p)$ という形の不動点を構成できれば良いことが分かった.

Problem'

wGL_n において, 任意の $\Box A(p)$ という論理式に不動点は構成できるか?

問

Problem (Sacchetti: 2001)

不動点は具体的に構成できるか?

Lindström による GL の不動点定理の証明のアイディア (1996) から, $\Box A(p)$ という形の不動点を構成できれば良いことが分かった.

Problem'

wGL_n において, 任意の $\Box A(p)$ という論理式に不動点は構成できるか?

定理

$\mathsf{GL} \vdash \Box A(\top) \leftrightarrow \Box A(\Box A(\top))$

1 Sacchetti の論理

2 不動点の構成

得られた結果 1

wGL_n 上で $\Box A(p)$ の不動点を考える場合, p の現れ方が関係する.

得られた結果 1

wGL$_n$ 上で $\Box A(p)$ の不動点を考える場合, p の現れ方が関係する.
dep(A, p): 各 p を縛る $\Box$ の個数全体の集合
$\mathrm{dep}_n(A, p) := \{\overline{k}(mod\ \ n) : k \in \mathrm{dep}(A, p)\}$

得られた結果 1

wGL_n 上で $\Box A(p)$ の不動点を考える場合，p の現れ方が関係する．
$\mathrm{dep}(A,p)$: 各 p を縛る $\Box$ の個数全体の集合
$\mathrm{dep}_n(A,p) := \{\bar{k}(mod\ \ n) : k \in \mathrm{dep}(A,p)\}$

例

$\mathrm{dep}(p \wedge \Box(p \to \Box^2 p), p) = \{0,1,3\}$,
$\mathrm{dep}_3(p \wedge \Box(p \to \Box^2 p), p) = \{\bar{0},\bar{1}\}$

得られた結果 1

wGL_n 上で $\Box A(p)$ の不動点を考える場合, p の現れ方が関係する.
$\mathrm{dep}(A, p)$: 各 p を縛る $\Box$ の個数全体の集合
$\mathrm{dep}_n(A, p) := \{\bar{k}(mod\ \ n) : k \in \mathrm{dep}(A, p)\}$

例

$\mathrm{dep}(p \wedge \Box(p \to \Box^2 p), p) = \{0, 1, 3\}$,
$\mathrm{dep}_3(p \wedge \Box(p \to \Box^2 p), p) = \{\bar{0}, \bar{1}\}$

補題 1

$\mathrm{dep}_n(\Box A(p), p) \subseteq \{\bar{0}\}$ のとき,
$\mathrm{wGL}_n \vdash \Box A(\top) \leftrightarrow \Box A(\Box A(\top))$

得られた結果 2

補題 2

$\Box A(p)$ の $\bar{0}$ 個の $\Box$ で縛られている p を全て $\top$ で書き換えた論理式を $\Box A'(p)$ とすると, $\Box A'(p)$ の不動点は $\Box A(p)$ の不動点で,

$$\mathrm{dep}_n(\Box A'(p), p) = \mathrm{dep}_n(\Box A(p), p) \setminus \{\bar{0}\}$$

得られた結果2

補題 2

$\Box A(p)$ の $\bar{0}$ 個の $\Box$ で縛られている p を全て $\top$ で書き換えた論理式を $\Box A'(p)$ とすると, $\Box A'(p)$ の不動点は $\Box A(p)$ の不動点で,

$$\mathrm{dep}_n(\Box A'(p), p) = \mathrm{dep}_n(\Box A(p), p) \setminus \{\bar{0}\}$$

補題 3

任意の $\Box A(p)$ をとる.
$\mathrm{dep}_n(\Box A(p), p) \subseteq \{\bar{1}, \ldots, \bar{k}\} (1 \leq k \leq n-1)$ のとき,
列 $\Box A_0(p), \Box A_1(p), \ldots, \Box A_{n-k}$ を以下でとる.

- $\Box A_0(p) :\equiv \Box A(p)$
- $\Box A_i(p)$ に現れる $\overline{k+i}$ 個の $\Box$ で縛られている p に $\Box A(p)$ を代入した論理式を $\Box A_{i+1}(p)$ とする.

このとき, $\mathrm{dep}_n(\Box A_{n-k}(p), p) \subseteq \{\bar{0}, \ldots, \overline{k-1}\}$ かつ,
$\Box A_{n-k}(p)$ の不動点は, $\Box A(p)$ の不動点となる.

得られた結果3

定理

wGL$_n$ 上で, 各 $\Box A(p)$ の不動点は構成できる

Proof.

不動点を保存	dep$_n$	補題
$\Box A(p)$	$\subseteq \{\overline{0}, \ldots, \overline{n-1}\}$	

$\Box$

得られた結果 3

定理

wGL_n 上で, 各 $\Box A(p)$ の不動点は構成できる

Proof.

不動点を保存	dep_n	補題
$\Box A(p)$	$\subseteq \{\overline{0}, \ldots, \overline{n-1}\}$	
$\Box A'(p)$	$\subseteq \{\overline{1}, \ldots, \overline{n-1}\}$	

$\Box$

得られた結果 3

定理

wGL_n 上で, 各 $\Box A(p)$ の不動点は構成できる

Proof.

不動点を保存	dep_n	補題
$\Box A(p)$	$\subseteq \{\overline{0}, \ldots, \overline{n-1}\}$	
$\uparrow$		
$\Box A'(p)$	$\subseteq \{\overline{1}, \ldots, \overline{n-1}\}$	補題 2

$\Box$

得られた結果 3

定理

wGL_n 上で, 各 $\Box A(p)$ の不動点は構成できる

Proof.

不動点を保存	dep_n	補題
$\Box A(p)$	$\subseteq \{\overline{0}, \ldots, \overline{n-1}\}$	
$\uparrow$		
$\Box A'(p)$	$\subseteq \{\overline{1}, \ldots, \overline{n-1}\}$	補題 2
$\uparrow$		
$\Box A''(p)$	$\subseteq \{\overline{0}, \ldots, \overline{n-2}\}$	補題 3

□

得られた結果 3

定理

wGL_n 上で, 各 $\Box A(p)$ の不動点は構成できる

Proof.

不動点を保存	dep_n	補題
$\Box A(p)$	$\subseteq \{\overline{0}, \ldots, \overline{n-1}\}$	
$\uparrow$		
$\Box A'(p)$	$\subseteq \{\overline{1}, \ldots, \overline{n-1}\}$	補題 2
$\uparrow$		
$\Box A''(p)$	$\subseteq \{\overline{0}, \ldots, \overline{n-2}\}$	補題 3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

$\Box$

得られた結果 3

定理

wGL_n 上で, 各 $\Box A(p)$ の不動点は構成できる

Proof.

不動点を保存	dep_n	補題
$\Box A(p)$	$\subseteq \{\overline{0}, \ldots, \overline{n-1}\}$	
$\uparrow$		
$\Box A'(p)$	$\subseteq \{\overline{1}, \ldots, \overline{n-1}\}$	補題 2
$\uparrow$		
$\Box A''(p)$	$\subseteq \{\overline{0}, \ldots, \overline{n-2}\}$	補題 3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\Box A'''(p)$	$\subseteq \{\overline{0}\}$	補題 3

$\Box$

得られた結果3

定理

wGL_n 上で, 各 $\Box A(p)$ の不動点は構成できる

Proof.

不動点を保存	dep_n	補題
$\Box A(p)$	$\subseteq \{\overline{0}, \ldots, \overline{n-1}\}$	
$\uparrow$		
$\Box A'(p)$	$\subseteq \{\overline{1}, \ldots, \overline{n-1}\}$	補題 2
$\uparrow$		
$\Box A''(p)$	$\subseteq \{\overline{0}, \ldots, \overline{n-2}\}$	補題 3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\Box A'''(p)$	$\subseteq \{\overline{0}\}$	補題 3

$\Box A'''(p)$ の不動点は補題 1 から $\Box A'''(\top)$ となる. $\Box$

wGL_2 の場合

$\Box A(p)$ に現れる p の内,
$\bar{0} \pmod 2$ 個の $\Box$ で縛られている p を p_0,
$\bar{1} \pmod 2$ 個の $\Box$ で縛られている p を p_1, に書き換えた論理式を,
$\Box B(p_0, p_1)$ とする.

補題 2 $\Box B(\top, p)$ の不動点は $\Box A(p)$ の不動点となる.
$\mathrm{dep}(\Box B(\top, p), p) \subseteq \{\bar{1}\}$

補題 3 $\Box B(\top, \Box B(\top, p))$ の不動点は $\Box B(\top, p)$ の不動点となる.
$\mathrm{dep}(\Box B(\top, \Box B(\top, p)), p) \subseteq \{\bar{0}\}$

補題 1 $\Box B(\top, \Box B(\top, p))$ の不動点は, $\Box B(\top, \Box B(\top, \top))$ である.

wGL$_3$ の場合 (結果のみ)

$\Box A(p)$ に現れる p の内,
$\bar{0}(\mathrm{mod}\ 3)$ 個の $\Box$ で縛られている p を p_0,
$\bar{1}(\mathrm{mod}\ 3)$ 個の $\Box$ で縛られている p を p_1,
$\bar{2}(\mathrm{mod}\ 3)$ 個の $\Box$ で縛られている p を p_2, に書き換えた論理式を,
$\Box B(p_0, p_1, p_2)$ とする.

$\Box B'(p) := \Box B(\top, p, \Box B(\top, \top, p))$ とおけば,
$\Box A(p)$ の不動点は, $\Box B'(\Box B'(\Box B'(\top)))$ である.

終わりに

wGL$_2$ で $(\Box\neg\Box\Box\neg p)$ の不動点は, アルゴリズムに依れば $(\Box\neg\Box\Box\neg\Box\neg\Box\Box\neg\top)$ であるが,

終わりに

wGL_2 で $(\Box\neg\Box\Box\neg p)$ の不動点は，アルゴリズムに依れば $(\Box\neg\Box\Box\neg\Box\neg\Box\Box\neg\top)$ であるが，$\Box\bot$ も不動点．

終わりに

wGL$_2$ で $(\Box\neg\Box\Box\neg p)$ の不動点は, アルゴリズムに依れば $(\Box\neg\Box\Box\neg\Box\neg\Box\Box\neg\top)$ であるが, $\Box\bot$ も不動点.
長さという意味で, 一番簡単な不動点を与えているわけではない.

終わりに

wGL_2 で $(\Box\neg\Box\Box\neg p)$ の不動点は, アルゴリズムに依れば $(\Box\neg\Box\Box\neg\Box\neg\Box\Box\neg\top)$ であるが, $\Box\bot$ も不動点.
長さという意味で, 一番簡単な不動点を与えているわけではない.

Problem

より簡潔な wGL_n の不動点を与えるアルゴリズムはあるか.

終わりに

wGL_2 で $(\Box\neg\Box\Box\neg p)$ の不動点は，アルゴリズムに依れば $(\Box\neg\Box\Box\neg\Box\neg\Box\Box\neg\top)$ であるが，$\Box\bot$ も不動点．
長さという意味で，一番簡単な不動点を与えているわけではない．

Problem

より簡潔な wGL_n の不動点を与えるアルゴリズムはあるか．

補題

$\Box A(p)$ が与えられたとして以下の列 $\{\Box A_k(p)\}_{k\in\omega}$ を考える．

1. $\Box A_0(p) := \Box A(p)$
2. $\Box A_k(p)$ に現れる任意の p に $\Box A(p)$ を代入して得られる論理式を $\Box A_{k+1}(p)$ とする．

このとき，任意の $k \in \omega$ について
$\Box A_k(p)$ の不動点は $\Box A(p)$ の不動点である．

参考文献

[1] T. Kurahashi, Arithmetical soundness and completeness for Σ_2 numerartions, *Studia Logica*, vol. 106, no. 6, pp. 1181-1196 (2018).

[2] T. Kurahashi and Y. Okawa, Effectively constructible fixed points in Sacchetti's modal logics of provability, submitted.

[3] P. Lindström, Provability logic-a short introduction, *Theoria*, vol. 62, pp. 19-61 (1996).

[4] L. Sacchetti, The fixed point property in modal logic, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, vol. 42, pp. 65-86 (2001).

[5] G. Sambin, An effective fixed-point theorem in intuitionistic diagonalizable algebras, *Studia Logica*, vol. 35, pp. 345-361 (1976).

[6] R. M. Solovay, Provability interpretations of modal logic, *Israel Journal of Mathematics*, vol. 25, no. 3-4, pp. 287-304 (1976).