

命題様相論理における uniform Lyndon interpolation property

倉橋太志
木更津工業高等専門学校

日本数学会 2019 年度年会
東京工業大学
2019 年 3 月 17 日

アウトライン

- ① 動機 (GL と Grz の補間定理)
- ② CIP, LIP, UIP
- ③ Uniform Lyndon 補間定理

アウトライン

- ① 動機 (GL と Grz の補間定理)
- ② CIP, LIP, UIP
- ③ Uniform Lyndon 補間定理

GL と Grz

- $\mathbf{GL} = \mathbf{K} + \Box(\Box p \rightarrow p) \rightarrow \Box p$
Gödel-Löb の論理
- $\mathbf{Grz} = \mathbf{K} + \Box(\Box(p \rightarrow \Box p) \rightarrow p) \rightarrow p$
Grzegorczyk の論理

GL と Grz

- $GL = K + \Box(\Box p \rightarrow p) \rightarrow \Box p$

Gödel-Löb の論理

- $Grz = K + \Box(\Box(p \rightarrow \Box p) \rightarrow p) \rightarrow p$

Grzegorczyk の論理

- 不完全性定理について分析するためにこれらの様相論理が非常に有用.

GL と Grz

- $GL = K + \Box(\Box p \rightarrow p) \rightarrow \Box p$

Gödel-Löb の論理

- $Grz = K + \Box(\Box(p \rightarrow \Box p) \rightarrow p) \rightarrow p$

Grzegorczyk の論理

- 不完全性定理について分析するためにこれらの様相論理が非常に有用.
- 特に GL の不動点定理が Craig 補間性を用いて証明できる (Smoryński (1978)).

GL と Grz

- $GL = K + \Box(\Box p \rightarrow p) \rightarrow \Box p$

Gödel-Löb の論理

- $Grz = K + \Box(\Box(p \rightarrow \Box p) \rightarrow p) \rightarrow p$

Grzegorczyk の論理

- 不完全性定理について分析するためにこれらの様相論理が非常に有用.
- 特に GL の不動点定理が Craig 補間性を用いて証明できる (Smoryński (1978)).
- Craig 補間性 (CIP) を強めたものに Lyndon 補間性 (LIP) と uniform 補間性 (UIP) がある.

GL と Grz

- $GL = K + \Box(\Box p \rightarrow p) \rightarrow \Box p$

Gödel-Löb の論理

- $Grz = K + \Box(\Box(p \rightarrow \Box p) \rightarrow p) \rightarrow p$

Grzegorczyk の論理

- 不完全性定理について分析するためにこれらの様相論理が非常に有用。
- 特に GL の不動点定理が Craig 補間性を用いて証明できる (Smoryński (1978))。
- Craig 補間性 (CIP) を強めたものに Lyndon 補間性 (LIP) と uniform 補間性 (UIP) がある。

GL と Grz の補間定理

	CIP	LIP	UIP
GL	Smoryński (1978) Boolos (1979)	Shamkanov (2011)	Shavrukov (1993)
Grz	Boolos (1980)	Maksimova (2014)	Visser (1996)

動機

動機

特に LIP と UIP が個別に議論されている現状がある.

動機

動機

特に LIP と UIP が個別に議論されている現状がある.

LIP と UIP を統一的に扱えないか？

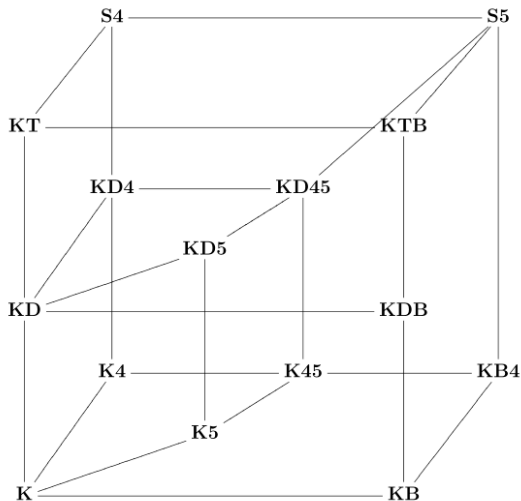
アウトライン

- ① 動機 (GL と Grz の補間定理)
- ② **CIP, LIP, UIP**
- ③ Uniform Lyndon 補間定理

- $\mathbf{KD} = \mathbf{K} + \{\neg\Box\perp\}$
- $\mathbf{KT} = \mathbf{K} + \{\Box p \rightarrow p\}$
- $\mathbf{K4} = \mathbf{K} + \{\Box p \rightarrow \Box\Box p\}$
- $\mathbf{KD4} = \mathbf{K} + \{\neg\Box\perp, \Box p \rightarrow \Box\Box p\}$
- $\mathbf{S4} = \mathbf{K} + \{\Box p \rightarrow p, \Box p \rightarrow \Box\Box p\}$
- $\mathbf{K5} = \mathbf{K} + \{\Diamond p \rightarrow \Box\Diamond p\}$
- $\mathbf{KD5} = \mathbf{K} + \{\neg\Box\perp, \Diamond p \rightarrow \Box\Diamond p\}$
- $\mathbf{K45} = \mathbf{K} + \{\Box p \rightarrow \Box\Box p, \Diamond p \rightarrow \Box\Diamond p\}$
- $\mathbf{KD45} = \mathbf{K} + \{\neg\Box\perp, \Box p \rightarrow \Box\Box p, \Diamond p \rightarrow \Box\Diamond p\}$
- $\mathbf{KB} = \mathbf{K} + \{p \rightarrow \Box\Diamond p\}$
- $\mathbf{KDB} = \mathbf{K} + \{\neg\Box\perp, p \rightarrow \Box\Diamond p\}$
- $\mathbf{KTB} = \mathbf{K} + \{\Box p \rightarrow p, p \rightarrow \Box\Diamond p\}$
- $\mathbf{KB4} = \mathbf{K} + \{p \rightarrow \Box\Diamond p, \Box p \rightarrow \Box\Box p\}$
- $\mathbf{S5} = \mathbf{K} + \{\Box p \rightarrow p, \Diamond p \rightarrow \Box\Diamond p\}$
- $\mathbf{GL} = \mathbf{K} + \{\Box(\Box p \rightarrow p) \rightarrow \Box p\}$
- $\mathbf{Grz} = \mathbf{K} + \{\Box(\Box(p \rightarrow \Box p) \rightarrow p) \rightarrow p\}$

GL と Grz 以外はいわゆる modal cube の様相論理.

Modal cube



CIP

様相論理式 φ に対し, $v(\varphi)$ を φ に含まれる命題変数全体の集合とする.

CIP

様相論理式 φ に対し, $v(\varphi)$ を φ に含まれる命題変数全体の集合とする.

定義

様相命題論理 L が **Craig 補間性 (CIP)** をもつとは, 任意の論理式 φ, ψ について, $L \vdash \varphi \rightarrow \psi$ ならば, ある論理式 θ があって, 次を満たすことをいう:

- ① $v(\theta) \subseteq v(\varphi) \cap v(\psi)$;
- ② $L \vdash \varphi \rightarrow \theta$;
- ③ $L \vdash \theta \rightarrow \psi$.

この θ を L における $\varphi \rightarrow \psi$ の **Craig interpolant** という.

CIP

様相論理式 φ に対し, $v(\varphi)$ を φ に含まれる命題変数全体の集合とする.

定義

様相命題論理 L が **Craig 補間性 (CIP)** をもつとは, 任意の論理式 φ, ψ について, $L \vdash \varphi \rightarrow \psi$ ならば, ある論理式 θ があって, 次を満たすことをいう:

- ① $v(\theta) \subseteq v(\varphi) \cap v(\psi)$;
- ② $L \vdash \varphi \rightarrow \theta$;
- ③ $L \vdash \theta \rightarrow \psi$.

この θ を L における $\varphi \rightarrow \psi$ の **Craig interpolant** という.

事実 (Gabbay (1972) など)

Modal cube の様相論理, GL, Grz は CIP をもつ.

LIP

様相論理式 φ の中に

- **positive** に現れる命題変数全体の集合を $v^+(\varphi)$
- **negative** に現れる命題変数全体の集合を $v^-(\varphi)$

とかく.

定義

様相命題論理 L が **Lyndon 補間性 (LIP)** をもつとは, 任意の論理式 φ, ψ について, $L \vdash \varphi \rightarrow \psi$ ならば, ある論理式 θ があって, 次が成り立つことをいう:

- ① $v^+(\theta) \subseteq v^+(\varphi) \cap v^+(\psi);$
- ② $v^-(\theta) \subseteq v^-(\varphi) \cap v^-(\psi);$
- ③ $L \vdash \varphi \rightarrow \theta;$
- ④ $L \vdash \theta \rightarrow \psi.$

この θ を L における $\varphi \rightarrow \psi$ の **Lyndon interpolant** という.

LIP

様相論理式 φ の中に

- **positive** に現れる命題変数全体の集合を $v^+(\varphi)$
- **negative** に現れる命題変数全体の集合を $v^-(\varphi)$

とかく.

定義

様相命題論理 L が **Lyndon 補間性 (LIP)** をもつとは, 任意の論理式 φ, ψ について, $L \vdash \varphi \rightarrow \psi$ ならば, ある論理式 θ があって, 次が成り立つことをいう:

- ① $v^+(\theta) \subseteq v^+(\varphi) \cap v^+(\psi)$;
- ② $v^-(\theta) \subseteq v^-(\varphi) \cap v^-(\psi)$;
- ③ $L \vdash \varphi \rightarrow \theta$;
- ④ $L \vdash \theta \rightarrow \psi$.

この θ を L における $\varphi \rightarrow \psi$ の **Lyndon interpolant** という.

事実 (Maksimova (1982), Fitting (1983), Kuznets (2016) など)

Modal cube の様相論理, **GL**, **Grz** は **LIP** をもつ.

UIP (1)

定義

様相命題論理 L が **uniform 補間性 (UIP)** をもつとは、任意の論理式 φ と任意の命題変数の有限集合 P について、ある論理式 θ があって、次が成り立つことをいう：

- ① $v(\theta) \subseteq v(\varphi) \setminus P$;
- ② $L \vdash \varphi \rightarrow \theta$;
- ③ $L \vdash \varphi \rightarrow \psi$ かつ $v(\psi) \cap P = \emptyset$ を満たす全ての論理式 ψ について $L \vdash \theta \rightarrow \psi$.

この θ を L における (φ, P) の **uniform interpolant** という。

UIP (1)

定義

様相命題論理 L が **uniform 補間性 (UIP)** をもつとは、任意の論理式 φ と任意の命題変数の有限集合 P について、ある論理式 θ があって、次が成り立つことをいう：

- ① $v(\theta) \subseteq v(\varphi) \setminus P$;
- ② $L \vdash \varphi \rightarrow \theta$;
- ③ $L \vdash \varphi \rightarrow \psi$ かつ $v(\psi) \cap P = \emptyset$ を満たす全ての論理式 ψ について $L \vdash \theta \rightarrow \psi$.

この θ を L における (φ, P) の **uniform interpolant** という。

命題

L が UIP をもてば CIP をもつ。

UIP (1)

定義

様相命題論理 L が **uniform 補間性 (UIP)** をもつとは、任意の論理式 φ と任意の命題変数の有限集合 P について、ある論理式 θ があって、次が成り立つことをいう：

- ① $v(\theta) \subseteq v(\varphi) \setminus P$;
- ② $L \vdash \varphi \rightarrow \theta$;
- ③ $L \vdash \varphi \rightarrow \psi$ かつ $v(\psi) \cap P = \emptyset$ を満たす全ての論理式 ψ について $L \vdash \theta \rightarrow \psi$.

この θ を L における (φ, P) の **uniform interpolant** という。

命題

L が UIP をもてば CIP をもつ。

Shavrukov (1993), Visser (1996)

GL と Grz は UIP をもつ。

UIP (1)

定義

様相命題論理 L が **uniform 補間性 (UIP)** をもつとは、任意の論理式 φ と任意の命題変数の有限集合 P について、ある論理式 θ があって、次が成り立つことをいう：

- ① $v(\theta) \subseteq v(\varphi) \setminus P$;
- ② $L \vdash \varphi \rightarrow \theta$;
- ③ $L \vdash \varphi \rightarrow \psi$ かつ $v(\psi) \cap P = \emptyset$ を満たす全ての論理式 ψ について $L \vdash \theta \rightarrow \psi$.

この θ を L における (φ, P) の **uniform interpolant** という。

命題

L が **UIP** をもてば **CIP** をもつ。

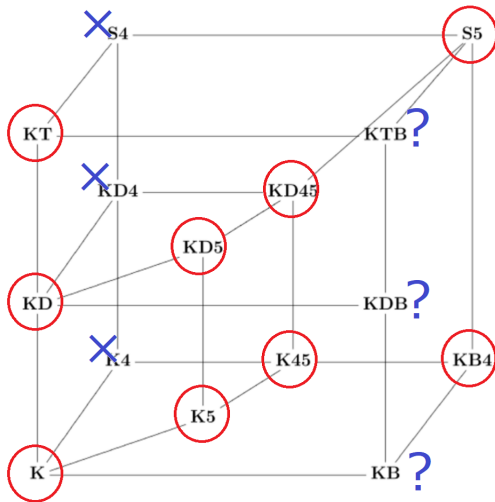
Shavrukov (1993), Visser (1996)

GL と **Grz** は **UIP** をもつ。

同時期に Pitts (1992) が直観主義命題論理が **UIP** をもつことを示している。

UIP (2)

Modal cube の様相論理に対する UIP の状況



アウトライン

- ① 動機 (GL と Grz の補間定理)
- ② CIP, LIP, UIP
- ③ **Uniform Lyndon 補間定理**

ULIP

次の概念が自然に導入できる.

定義

様相命題論理 L が **uniform Lyndon 補間性 (ULIP)** をもつとは, 任意の論理式 φ と任意の命題変数の有限集合 P, Q について, ある論理式 θ があって, 次の条件を満たすことをいう:

- ① $v^+(\theta) \subseteq v^+(\varphi) \setminus P$ かつ $v^-(\theta) \subseteq v^-(\varphi) \setminus Q$;
- ② $L \vdash \varphi \rightarrow \theta$;
- ③ $L \vdash \varphi \rightarrow \psi$ かつ $v^+(\psi) \cap P = v^-(\psi) \cap Q = \emptyset$ を満たす全ての論理式 ψ について $L \vdash \theta \rightarrow \psi$.

この θ を (φ, P, Q) の **uniform Lyndon interpolant** という.

得られた結果 (1)

命題 1

L が **ULIP** をもつならば, L は **UIP** と **LIP** をもつ.

得られた結果 (1)

命題 1

L が **ULIP** をもつならば, L は **UIP** と **LIP** をもつ.

系

K4, **KD4**, **S4** は **ULIP** をもたない.

得られた結果 (1)

命題 1

L が **ULIP** をもつならば, L は **UIP** と **LIP** をもつ.

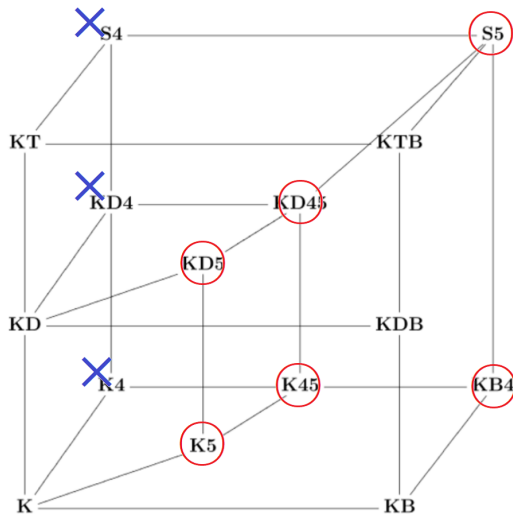
系

K4, **KD4**, **S4** は **ULIP** をもたない.

命題 2

$\mathbf{K5} \subseteq L$ ならば, **ULIP** と **LIP** は同値.

特に **K5**, **KD5**, **K45**, **KD45**, **KB5**, **S5** は **ULIP** をもつ.



あとは K, KD, KT, KB, KDB, KTB, GL, Grz.

得られた結果 (2)

定義

- 様相論理式 φ の深さ $d(\varphi)$ を次で定める：
 - $d(p) = d(\perp) = 0$;
 - $d(\varphi \rightarrow \psi) = \max\{d(\varphi), d(\psi)\}$;
 - $d(\Box\varphi) = d(\varphi) + 1$.

得られた結果 (2)

定義

- 様相論理式 φ の深さ $d(\varphi)$ を次で定める：
 - $d(p) = d(\perp) = 0$;
 - $d(\varphi \rightarrow \psi) = \max\{d(\varphi), d(\psi)\}$;
 - $d(\Box\varphi) = d(\varphi) + 1$.
- φ に含まれる $\Box$ の個数を $n(\varphi)$ とかく.

定理 1

K, KD, KT, KB, KDB, KTB は **ULIP** をもつ.

特に (φ, P, Q) の **uniform Lyndon interpolant** θ は $d(\theta) \leq d(\varphi)$ でとれる.

特に **KB, KDB, KTB** の **UIP** も新しい.

得られた結果 (2)

定義

- 様相論理式 φ の深さ $d(\varphi)$ を次で定める：
 - $d(p) = d(\perp) = 0$;
 - $d(\varphi \rightarrow \psi) = \max\{d(\varphi), d(\psi)\}$;
 - $d(\Box\varphi) = d(\varphi) + 1$.
- φ に含まれる $\Box$ の個数を $n(\varphi)$ とかく.

定理 1

K, KD, KT, KB, KDB, KTB は **ULIP** をもつ.

特に (φ, P, Q) の **uniform Lyndon interpolant** θ は $d(\theta) \leq d(\varphi)$ でとれる.

特に **KB, KDB, KTB** の **UIP** も新しい.

定理 2

GL と **Grz** は **ULIP** をもつ.

特に (φ, P, Q) の **uniform Lyndon interpolant** θ は $d(\theta) \leq 3n(\varphi) + 3$ でとれる.

得られた結果 (2)

定義

- 様相論理式 φ の深さ $d(\varphi)$ を次で定める：
 - $d(p) = d(\perp) = 0$;
 - $d(\varphi \rightarrow \psi) = \max\{d(\varphi), d(\psi)\}$;
 - $d(\Box\varphi) = d(\varphi) + 1$.
- φ に含まれる $\Box$ の個数を $n(\varphi)$ とかく.

定理 1

K, KD, KT, KB, KDB, KTB は **ULIP** をもつ.

特に (φ, P, Q) の **uniform Lyndon interpolant** θ は $d(\theta) \leq d(\varphi)$ でとれる.

特に **KB, KDB, KTB** の **UIP** も新しい.

定理 2

GL と **Grz** は **ULIP** をもつ.

特に (φ, P, Q) の **uniform Lyndon interpolant** θ は $d(\theta) \leq 3n(\varphi) + 3$ でとれる.

Visser (1996) によるクリプキモデル間の **bisimulation** を用いた **UIP** の証明を改良して示した.

得られた結果 (2)

定義

- 様相論理式 φ の深さ $d(\varphi)$ を次で定める：
 - $d(p) = d(\perp) = 0$;
 - $d(\varphi \rightarrow \psi) = \max\{d(\varphi), d(\psi)\}$;
 - $d(\Box\varphi) = d(\varphi) + 1$.
- φ に含まれる $\Box$ の個数を $n(\varphi)$ とかく.

定理 1

K, KD, KT, KB, KDB, KTB は **ULIP** をもつ.

特に (φ, P, Q) の **uniform Lyndon interpolant** θ は $d(\theta) \leq d(\varphi)$ でとれる.

特に **KB, KDB, KTB** の **UIP** も新しい.

定理 2

GL と **Grz** は **ULIP** をもつ.

特に (φ, P, Q) の **uniform Lyndon interpolant** θ は $d(\theta) \leq 3n(\varphi) + 3$ でとれる.

Visser (1996) によるクリプキモデル間の **bisimulation** を用いた **UIP** の証明を改良して示した.

特に **GL** と **Grz** については **Visser** による $d(\theta) \leq 4n(\varphi) + 1$ を改良した.

問題

LIP と UIP をもつが ULIP をもたない論理はあるか？

Uniform Lyndon interpolation property in propositional modal logics
arXiv: 1809.00943