第二不完全性定理について

倉橋太志
木更津工業高等専門学校

日本数学会 2019 年度秋季総合分科会
金沢大学
2019 年 9 月 20 日

アウトライン

1. 背景
2. 導出可能性条件
3. 結果

アウトライン

1. 背景
   1. Gödel (1931)
   2. Hilbert and Bernays (1939)
   3. Löb (1955)
   4. Jeroslow (1973)
   5. Montagna (1979)
   6. Buchholz (1993)
2. 導出可能性条件
3. 結果

- 以降，T を PA の無矛盾な再帰的拡大理論とする．
- $\mathrm{Pr}_T(x)$ を T の Σ_1 証明可能性述語とする．
  つまり，$\forall n \in \omega$ ($\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Pr}_T(\overline{n}) \iff n$ は T のある定理の Gödel 数)．

- 以降，T を PA の無矛盾な再帰的拡大理論とする．
- $\mathrm{Pr}_T(x)$ を T の Σ_1 証明可能性述語とする．
  つまり，$\forall n \in \omega$ ($\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Pr}_T(\overline{n}) \iff n$ は T のある定理の Gödel 数)．

Gödel (1931)

第二不完全性定理 (G2)

$T \nvdash \exists x(\mathrm{Fml}(x) \land \neg \mathrm{Pr}_T(x))$

- ただし Gödel の証明は，第一不完全性定理の証明を形式化すればよい，という程度のもので，肝心の形式化は実行していない．
- それらの詳細を記述したものを続いて出版すると論文には書いてあるが，結局は出版されることはなかった．

Hilbert and Bernays (1939)

- **G2 の最初の詳細な証明は Hilbert and Bernays による本 *Grundlagen der Mathematik* の第二巻で与えられた．**
- **特に彼らは，$\mathrm{Pr}_T(x)$ が次の条件 HB1, HB2, HB3 を満たすならば $T \nvdash \forall x(\mathrm{Fml}(x) \land \mathrm{Pr}_T(x) \to \neg\mathrm{Pr}_T(\dot{\neg} x))$ となることを示した．**

Hilbert-Bernays の導出可能性条件 (derivability conditions)

- **HB1** $T \vdash \varphi \to \psi \Rightarrow T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner)$.
- **HB2** $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \neg\varphi(x) \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \neg\varphi(\dot{x}) \urcorner)$.
- **HB3** 全ての原始再帰的な項 $t(x)$ について $T \vdash t(x) = 0 \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner t(\dot{x}) = 0 \urcorner)$.

ここで $\ulcorner \varphi(\dot{x}) \urcorner$ は n から $\varphi(\overline{n})$ の Gödel 数を計算する原始再帰的関数に対応する項．

Hilbert and Bernays (1939)

- **G2 の最初の詳細な証明は Hilbert and Bernays による本 *Grundlagen der Mathematik* の第二巻で与えられた．**
- **特に彼らは，$\mathrm{Pr}_T(x)$ が次の条件 $\mathbf{HB1}$, $\mathbf{HB2}$, $\mathbf{HB3}$ を満たすならば $T \nvdash \forall x(\mathrm{Fml}(x) \land \mathrm{Pr}_T(x) \to \neg\mathrm{Pr}_T(\dot{\neg} x))$ となることを示した．**

Hilbert-Bernays の導出可能性条件 (derivability conditions)

HB1 $T \vdash \varphi \to \psi \Rightarrow T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner)$.

HB2 $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \neg\varphi(x) \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \neg\varphi(\dot{x}) \urcorner)$.

HB3 **全ての原始再帰的な項 $t(x)$ について**
$T \vdash t(x) = 0 \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner t(\dot{x}) = 0 \urcorner)$.

ここで $\ulcorner \varphi(\dot{x}) \urcorner$ は n から $\varphi(\overline{n})$ の Gödel 数を計算する原始再帰的関数に対応する項．

Löb (1955)

- **Löb は** $\mathrm{Pr}_T(x)$ **が次の条件 D1，D2，D3 を満たすなら，Löb の定理**

$$T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \varphi \Rightarrow T \vdash \varphi$$

が成立することを証明した．

- **このとき** $T \nvdash \neg \mathrm{Pr}_T(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$ **となる（G2 の最もよく知られた形）．**

Löb の導出可能性条件

D1 $T \vdash \varphi \Rightarrow T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$.

D2 $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \to \psi \urcorner) \to (\mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner))$.

D3 $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \urcorner)$.

全ての $\mathrm{Pr}_T(x)$ **は自動的に D1 を満たす．**

Jeroslow (1973)

- **Jeroslow は Löb の条件の $\mathbf{D3}$ を次の $\mathbf{\Sigma_1 C}$ に強めれば，$\mathbf{D2}$ が不要となることを示した．**

形式化された Σ_1-完全性

$\mathbf{\Sigma_1 C}$ φ **が** Σ_1 **文ならば** $T \vdash \varphi \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$.

- **すなわち，**$\mathrm{Pr}_T(x)$ **が** $\mathbf{D1}$ **と** $\mathbf{\Sigma_1 C}$ **を満たせば** $T \nvdash \forall x(\mathrm{Fml}(x) \land \mathrm{Pr}_T(x) \to \neg \mathrm{Pr}_T(\dot{\neg} x))$ **となる．**

Montagna (1979)

- **Montagna は** $\mathrm{Pr}_T(x)$ **が次の 2 条件を満たせば Löb の定理が成り立つことを示した．**
- **このとき特に** $T \nvdash \exists x(\mathrm{Fml}(x) \land \neg \mathrm{Pr}_T(x))$ **である．**

Montagna の条件

- $T \vdash \forall x($“x **は論理公理**” $\to \mathrm{Pr}_T(x))$.
- $T \vdash \forall x \forall y(\mathrm{Fml}(x) \land \mathrm{Fml}(y) \to (\mathrm{Pr}_T(x \dot{\to} y) \to (\mathrm{Pr}_T(x) \to \mathrm{Pr}_T(y))))$.

Buchholz (1993)

- Buchholz の講義テキストにおいて，$\mathrm{Pr}_T(x)$ が次の $\mathbf{D1^U}$ と $\mathbf{D2^U}$ を満たせば $\mathbf{\Sigma_1C^U}$ が成立することが示されている．
- このとき $T \nvdash \neg\mathrm{Pr}_T(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$ となる．

Buchholz の条件

$\mathbf{D1^U}$ $T \vdash \varphi(x) \Rightarrow T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi(\dot{x}) \urcorner)$.

$\mathbf{D2^U}$ $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi(\dot{x}) \to \psi(\dot{x}) \urcorner) \to (\mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi(\dot{x}) \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \psi(\dot{x}) \urcorner))$.

$\mathbf{\Sigma_1C^U}$ $\varphi(x)$ が Σ_1 論理式ならば $T \vdash \varphi(x) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi(\dot{x}) \urcorner)$.

これらの異なる G2 たちは異なる結論を持っている．

無矛盾性を表す異なる文

- $\mathrm{Con}_T^H :\equiv \forall x(\mathrm{Fml}(x) \wedge \mathrm{Pr}_T(x) \to \neg \mathrm{Pr}_T(\dot{\neg} x))$
- $\mathrm{Con}_T^L :\equiv \neg \mathrm{Pr}_T(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$
- $\mathrm{Con}_T^G :\equiv \exists x(\mathrm{Fml}(x) \wedge \neg \mathrm{Pr}_T(x))$

異なる結論

Gödel $T \nvdash \mathrm{Con}_T^G$

Hilbert-Bernays $T \nvdash \mathrm{Con}_T^H$

Löb $T \nvdash \mathrm{Con}_T^L$

Jeroslow $T \nvdash \mathrm{Con}_T^H$

Montagna $T \nvdash \mathrm{Con}_T^G$

Buchholz $T \nvdash \mathrm{Con}_T^L$

- $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Con}_T^H \to \mathrm{Con}_T^L$ と $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Con}_T^L \to \mathrm{Con}_T^G$.
- これらをとりまく状況を明らかにしたい．

これらの異なる G2 たちは異なる結論を持っている．

無矛盾性を表す異なる文

- $\mathrm{Con}_T^H :\equiv \forall x(\mathrm{Fml}(x) \land \mathrm{Pr}_T(x) \to \neg \mathrm{Pr}_T(\dot{\neg} x))$
- $\mathrm{Con}_T^L :\equiv \neg \mathrm{Pr}_T(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$
- $\mathrm{Con}_T^G :\equiv \exists x(\mathrm{Fml}(x) \land \neg \mathrm{Pr}_T(x))$

異なる結論

Gödel	$T \nvdash \mathrm{Con}_T^G$
Hilbert-Bernays	$T \nvdash \mathrm{Con}_T^H$
Löb	$T \nvdash \mathrm{Con}_T^L$
Jeroslow	$T \nvdash \mathrm{Con}_T^H$
Montagna	$T \nvdash \mathrm{Con}_T^G$
Buchholz	$T \nvdash \mathrm{Con}_T^L$

- $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Con}_T^H \to \mathrm{Con}_T^L$ と $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Con}_T^L \to \mathrm{Con}_T^G$.
- これらをとりまく状況を明らかにしたい．

Local な導出可能性条件

Local な導出可能性条件

D1 $T \vdash \varphi \Rightarrow T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$.

D2 $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \to \psi \urcorner) \to (\mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner))$.

D3 $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \urcorner)$.

ΓC φ が Γ 文ならば $T \vdash \varphi \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$.

$\mathbf{B_2}$ $T \vdash \varphi \to \psi \Rightarrow T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner)$.

PC $T \vdash \mathrm{Pr}_\emptyset(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$.

Uniform な導出可能性条件

Uniform な導出可能性条件

$\mathbf{D1^U}$ $T \vdash \varphi(x) \Rightarrow T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi(\dot{x}) \urcorner)$.

$\mathbf{D2^U}$ $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi(\dot{x}) \to \psi(\dot{x}) \urcorner) \to (\mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi(\dot{x}) \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \psi(\dot{x}) \urcorner))$.

$\mathbf{D3^U}$ $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi(\dot{x}) \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi(\dot{x}) \urcorner) \urcorner)$.

$\mathbf{\Gamma C^U}$ $\varphi(x)$ が Γ 論理式ならば $T \vdash \varphi(x) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi(\dot{x}) \urcorner)$.

$\mathbf{B_2^U}$ $T \vdash \varphi(x) \to \psi(x) \Rightarrow T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi(\dot{x}) \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \psi(\dot{x}) \urcorner)$.

$\mathbf{PC^U}$ $T \vdash \mathrm{Pr}_\emptyset(\ulcorner \varphi(\dot{x}) \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi(\dot{x}) \urcorner)$.

$\mathbf{CB}$ $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \forall x\, \varphi(x) \urcorner) \to \forall x\, \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi(\dot{x}) \urcorner)$.

Global な導出可能性条件

Global な導出可能性条件

$$\mathbf{D2^G} \quad T \vdash \forall x \forall y (\mathrm{Fml}(x) \land \mathrm{Fml}(y) \\ \to (\mathrm{Pr}_T(x \dot{\to} y) \to (\mathrm{Pr}_T(x) \to \mathrm{Pr}_T(y)))).$$

$$\mathbf{\Gamma C^G} \quad T \vdash \forall x (\mathsf{True}_\Gamma(x) \to \mathrm{Pr}_T(x)).$$

$$\mathbf{PC^G} \quad T \vdash \forall x (\mathrm{Fml}(x) \to (\mathrm{Pr}_\emptyset(x) \to \mathrm{Pr}_T(x))).$$

注意

Global $\Rightarrow$ **Uniform** $\Rightarrow$ **Local.**

背景で紹介した諸結果

Hilbert-Bernays $\mathbf{B_2}, \mathbf{CB}, \mathbf{\Delta_0 C^U} \Rightarrow T \nvdash \mathrm{Con}_T^H$

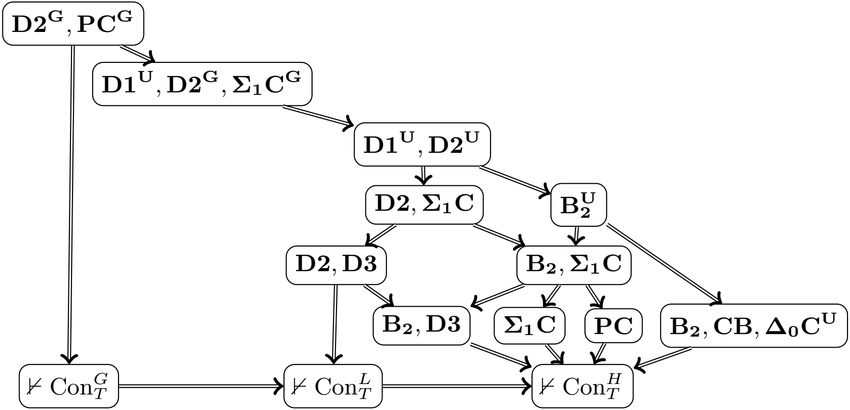
Löb $\mathbf{D2}, \mathbf{D3} \Rightarrow T \nvdash \mathrm{Con}_T^L$

Jeroslow $\mathbf{\Sigma_1 C} \Rightarrow T \nvdash \mathrm{Con}_T^H$

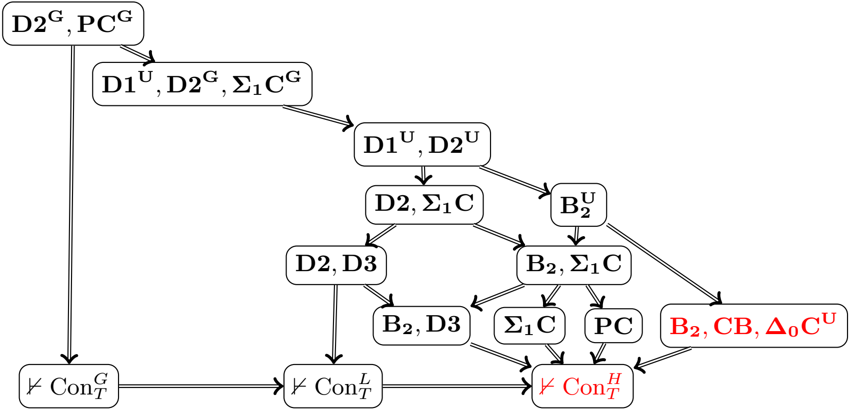
Montagna $\mathbf{D2^G}, \mathbf{PC^G} \Rightarrow T \nvdash \mathrm{Con}_T^G$

Buchholz $\mathbf{D1^U}, \mathbf{D2^U} \Rightarrow \mathbf{\Sigma_1 C^U}$

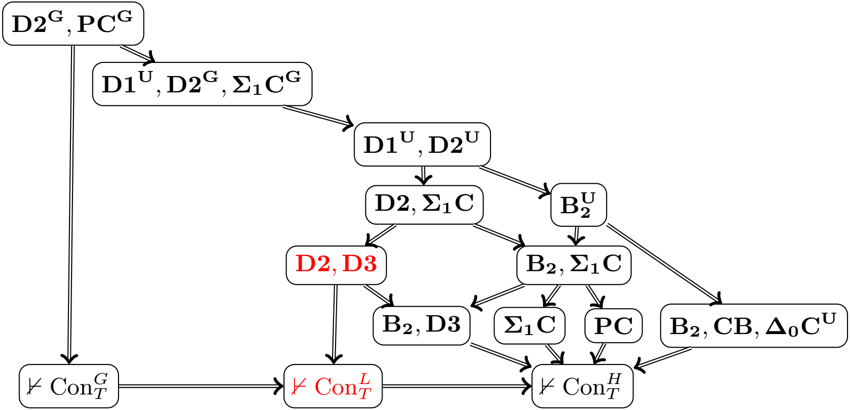
条件の組の間の関係


$\mathbf{D2}^{\mathbf{G}}, \mathbf{PC}^{\mathbf{G}}$
$\mathbf{D1}^{\mathbf{U}}, \mathbf{D2}^{\mathbf{G}}, \mathbf{\Sigma_1 C}^{\mathbf{G}}$
$\mathbf{D1}^{\mathbf{U}}, \mathbf{D2}^{\mathbf{U}}$
$\mathbf{D2}, \mathbf{\Sigma_1 C}$
$\mathbf{B}_2^{\mathbf{U}}$
$\mathbf{D2}, \mathbf{D3}$
$\mathbf{B_2}, \mathbf{\Sigma_1 C}$
$\mathbf{B_2}, \mathbf{D3}$
$\mathbf{\Sigma_1 C}$
$\mathbf{PC}$
$\mathbf{B_2}, \mathbf{CB}, \mathbf{\Delta_0 C}^{\mathbf{U}}$
$\nvdash \mathrm{Con}_T^G$
$\nvdash \mathrm{Con}_T^L$
$\nvdash \mathrm{Con}_T^H$

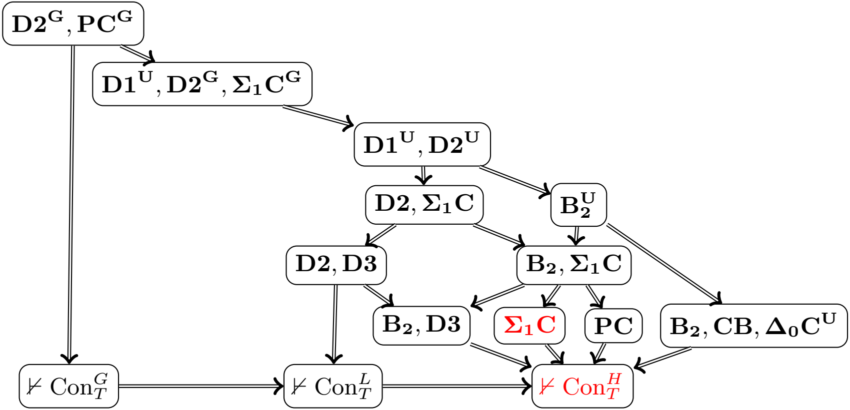
Hilbert and Bernays



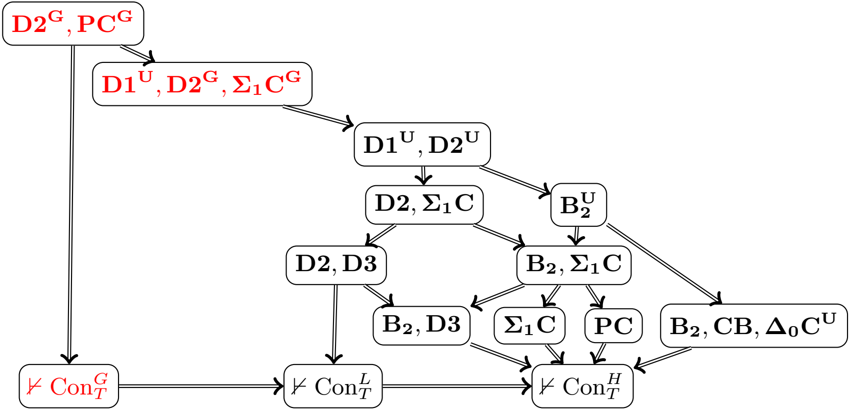
Löb


$\mathbf{D2}^{\mathbf{G}}, \mathbf{PC}^{\mathbf{G}}$
$\mathbf{D1}^{\mathbf{U}}, \mathbf{D2}^{\mathbf{G}}, \mathbf{\Sigma_1 C}^{\mathbf{G}}$
$\mathbf{D1}^{\mathbf{U}}, \mathbf{D2}^{\mathbf{U}}$
$\mathbf{D2}, \mathbf{\Sigma_1 C}$
$\mathbf{B}_2^{\mathbf{U}}$
$\mathbf{D2}, \mathbf{D3}$
$\mathbf{B_2}, \mathbf{\Sigma_1 C}$
$\mathbf{B_2}, \mathbf{D3}$
$\mathbf{\Sigma_1 C}$
$\mathbf{PC}$
$\mathbf{B_2}, \mathbf{CB}, \mathbf{\Delta_0 C}^{\mathbf{U}}$
$\nvdash \mathrm{Con}_T^G$
$\nvdash \mathrm{Con}_T^L$
$\nvdash \mathrm{Con}_T^H$

Jeroslow

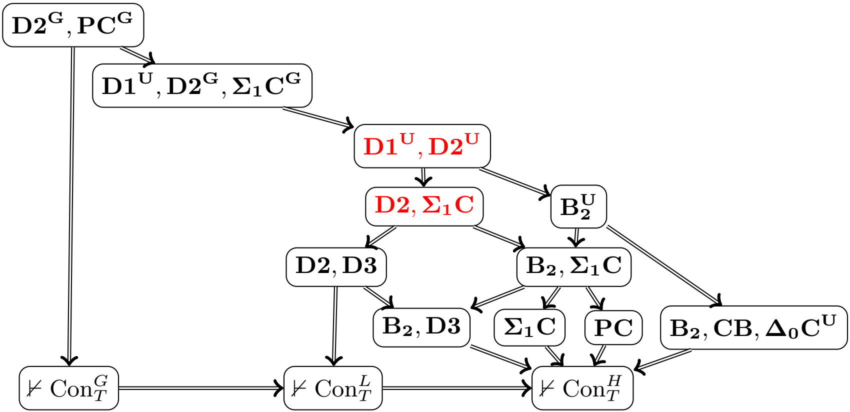

$\mathbf{D2}^{\mathbf{G}}, \mathbf{PC}^{\mathbf{G}}$
$\mathbf{D1}^{\mathbf{U}}, \mathbf{D2}^{\mathbf{G}}, \mathbf{\Sigma_1 C}^{\mathbf{G}}$
$\mathbf{D1}^{\mathbf{U}}, \mathbf{D2}^{\mathbf{U}}$
$\mathbf{D2}, \mathbf{\Sigma_1 C}$
$\mathbf{B}_2^{\mathbf{U}}$
$\mathbf{D2}, \mathbf{D3}$
$\mathbf{B_2}, \mathbf{\Sigma_1 C}$
$\mathbf{B_2}, \mathbf{D3}$
$\mathbf{\Sigma_1 C}$
$\mathbf{PC}$
$\mathbf{B_2}, \mathbf{CB}, \mathbf{\Delta_0 C}^{\mathbf{U}}$
$\nvdash \mathrm{Con}_T^G$
$\nvdash \mathrm{Con}_T^L$
$\nvdash \mathrm{Con}_T^H$

Montagna



$\mathbf{D2^G, PC^G}$
$\mathbf{D1^U, D2^G, \Sigma_1C^G}$
$\mathbf{D1^U, D2^U}$
$\mathbf{D2, \Sigma_1C}$
$\mathbf{B_2^U}$
$\mathbf{D2, D3}$
$\mathbf{B_2, \Sigma_1C}$
$\mathbf{B_2, D3}$
$\mathbf{\Sigma_1C}$
$\mathbf{PC}$
$\mathbf{B_2, CB, \Delta_0C^U}$
$\nvdash \mathrm{Con}_T^G$
$\nvdash \mathrm{Con}_T^L$
$\nvdash \mathrm{Con}_T^H$

Buchholz


$\mathbf{D2^G, PC^G}$
$\mathbf{D1^U, D2^G, \Sigma_1 C^G}$
$\mathbf{D1^U, D2^U}$
$\mathbf{D2, \Sigma_1 C}$
$\mathbf{B_2^U}$
$\mathbf{D2, D3}$
$\mathbf{B_2, \Sigma_1 C}$
$\mathbf{B_2, D3}$
$\mathbf{\Sigma_1 C}$
$\mathbf{PC}$
$\mathbf{B_2, CB, \Delta_0 C^U}$
$\nvdash \mathrm{Con}_T^G$
$\nvdash \mathrm{Con}_T^L$
$\nvdash \mathrm{Con}_T^H$

1. 背景
2. 導出可能性条件
3. **結果**

新しい条件

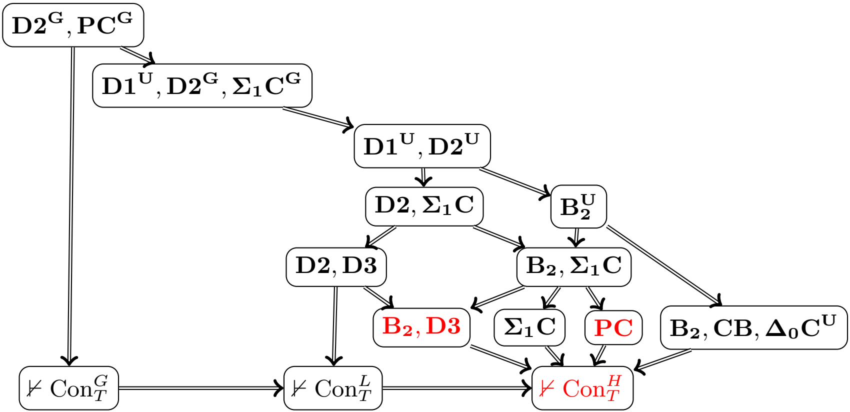
定理 (K.)

- $\mathbf{B_2}, \mathbf{D3} \Rightarrow T \nvdash \mathrm{Con}_T^H$
- $\mathbf{PC} \Rightarrow T \nvdash \mathrm{Con}_T^H$

$$\begin{array}{rl} \mathbf{B_2} & T \vdash \varphi \to \psi \Rightarrow T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner). \\ \mathbf{D3} & T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \urcorner). \\ \mathbf{PC} & T \vdash \mathrm{Pr}_\emptyset(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner). \end{array}$$

$$\mathrm{Con}_T^H \equiv \forall x(\mathrm{Fml}(x) \land \mathrm{Pr}_T(x) \to \neg \mathrm{Pr}_T(\dot{\neg} x))$$

新しい十分条件


$\mathbf{D2^G}, \mathbf{PC^G}$
$\mathbf{D1^U}, \mathbf{D2^G}, \mathbf{\Sigma_1 C^G}$
$\mathbf{D1^U}, \mathbf{D2^U}$
$\mathbf{D2}, \mathbf{\Sigma_1 C}$
$\mathbf{B_2^U}$
$\mathbf{D2}, \mathbf{D3}$
$\mathbf{B_2}, \mathbf{\Sigma_1 C}$
$\mathbf{B_2}, \mathbf{D3}$
$\mathbf{\Sigma_1 C}$
$\mathbf{PC}$
$\mathbf{B_2}, \mathbf{CB}, \mathbf{\Delta_0 C^U}$
$\nvdash \mathrm{Con}_T^G$
$\nvdash \mathrm{Con}_T^L$
$\nvdash \mathrm{Con}_T^H$

Buchholz の結果の改良

定理 (Buchholz)

$\mathbf{D1}^{\mathbf{U}}, \mathbf{D2}^{\mathbf{U}} \Rightarrow \mathbf{\Sigma_1 C}^{\mathbf{U}}$

$\mathbf{D1}^{\mathbf{U}}, \mathbf{D2}^{\mathbf{U}} \Rightarrow \mathbf{B}_{\mathbf{2}}^{\mathbf{U}}$ が成立.

$$\mathbf{B}_{\mathbf{2}}^{\mathbf{U}} \quad T \vdash \varphi(x) \to \psi(x) \Rightarrow T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi(\dot{x}) \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \psi(\dot{x}) \urcorner).$$

定理 (K.)

$\mathbf{B}_{\mathbf{2}}^{\mathbf{U}} \Rightarrow \mathbf{\Sigma_1 C}^{\mathbf{U}}$

系

$\mathbf{B}_{\mathbf{2}}^{\mathbf{U}} \Rightarrow T \nvdash \mathrm{Con}_T^H$

これは実際に Buchholz の結果の改良になっている.

定理 (K.)

$\mathbf{B}_{\mathbf{2}}^{\mathbf{U}} \not\Rightarrow \mathbf{D2}$

Buchholz の結果の改良

定理 (Buchholz)

$\mathbf{D1^U}, \mathbf{D2^U} \Rightarrow \mathbf{\Sigma_1 C^U}$

$\mathbf{D1^U}, \mathbf{D2^U} \Rightarrow \mathbf{B_2^U}$ **が成立.**

$$\mathbf{B_2^U}\ \ T \vdash \varphi(x) \to \psi(x) \Rightarrow T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi(\dot{x}) \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \psi(\dot{x}) \urcorner).$$

定理 (K.)

$\mathbf{B_2^U} \Rightarrow \mathbf{\Sigma_1 C^U}$

系

$\mathbf{B_2^U} \Rightarrow T \nvdash \mathrm{Con}_T^H$

これは実際に Buchholz の結果の改良になっている.

定理 (K.)

$\mathbf{B_2^U} \not\Rightarrow \mathbf{D2}$

Buchholz の結果の改良

定理 (Buchholz)

$\mathbf{D1^U}, \mathbf{D2^U} \Rightarrow \mathbf{\Sigma_1 C^U}$

$\mathbf{D1^U}, \mathbf{D2^U} \Rightarrow \mathbf{B_2^U}$ **が成立.**

$$\mathbf{B_2^U} \quad T \vdash \varphi(x) \to \psi(x) \Rightarrow T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi(\dot{x}) \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \psi(\dot{x}) \urcorner).$$

定理 (K.)

$\mathbf{B_2^U} \Rightarrow \mathbf{\Sigma_1 C^U}$

系

$\mathbf{B_2^U} \Rightarrow T \nvdash \mathrm{Con}_T^H$

これは実際に Buchholz の結果の改良になっている.

定理 (K.)

$\mathbf{B_2^U} \not\Rightarrow \mathbf{D2}$

Buchholz の結果の改良

定理 (Buchholz)

$\mathbf{D1^U}, \mathbf{D2^U} \Rightarrow \mathbf{\Sigma_1 C^U}$

$\mathbf{D1^U}, \mathbf{D2^U} \Rightarrow \mathbf{B_2^U}$ **が成立.**

$$\mathbf{B_2^U} \quad T \vdash \varphi(x) \to \psi(x) \Rightarrow T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi(\dot{x}) \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \psi(\dot{x}) \urcorner).$$

定理 (K.)

$\mathbf{B_2^U} \Rightarrow \mathbf{\Sigma_1 C^U}$

系

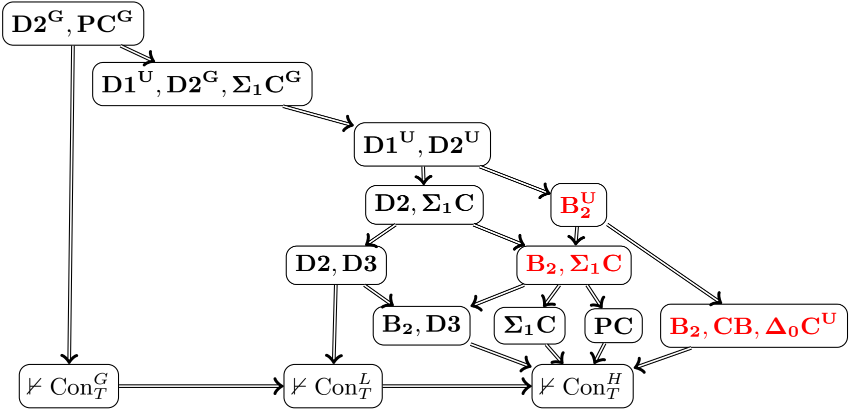
$\mathbf{B_2^U} \Rightarrow T \nvdash \mathrm{Con}_T^H$

これは実際に Buchholz の結果の改良になっている.

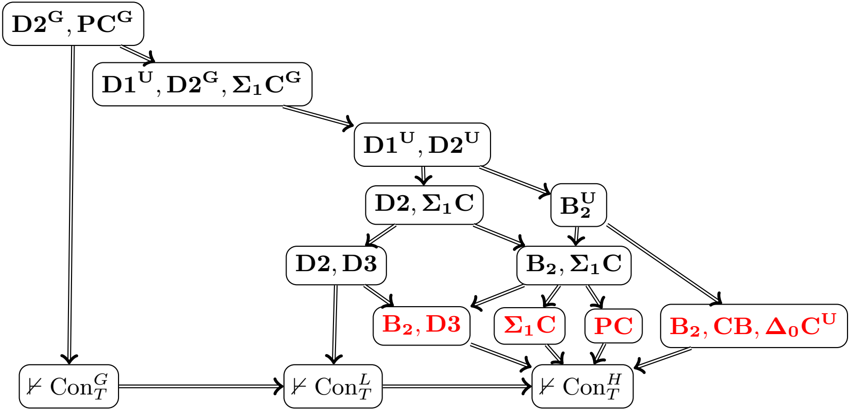
定理 (K.)

$\mathbf{B_2^U} \not\Rightarrow \mathbf{D2}$

Buchholz の結果の改良



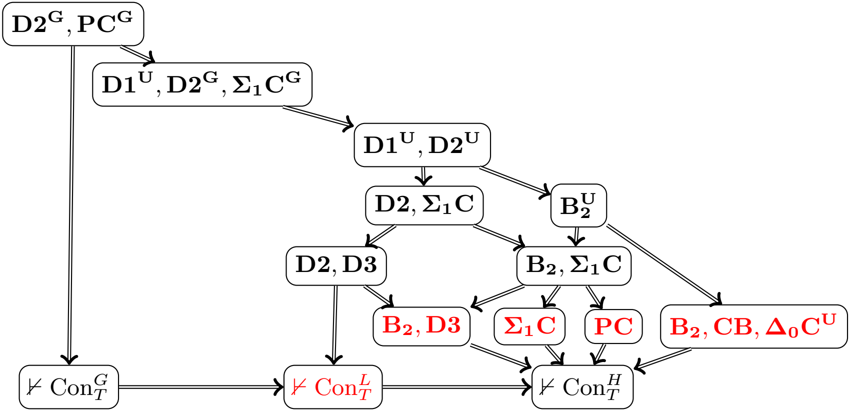
反例 1



定理 (K.)

$\{\mathbf{B_2, D3}\}$, $\{\mathbf{\Sigma_1C}\}$, $\{\mathbf{PC}\}$, $\{\mathbf{B_2, CB, \Delta_0C^U}\}$ のどの二つも比較不可能.

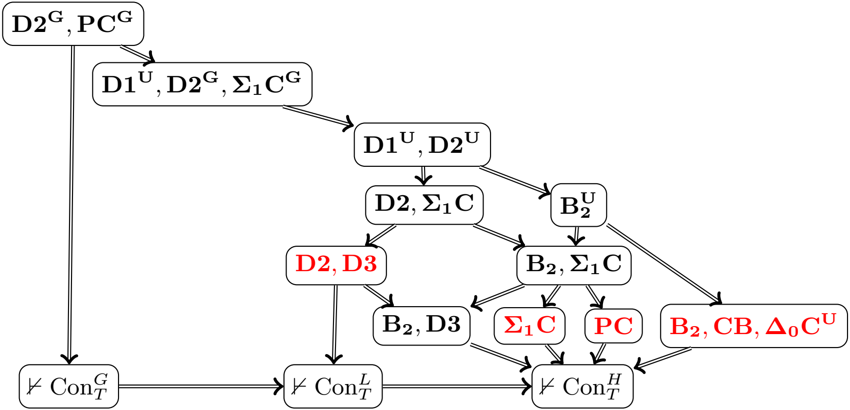
反例 2



定理 (K.)

$\{\mathbf{B_2}, \mathbf{D3}\}$, $\{\mathbf{\Sigma_1 C}\}$, $\{\mathbf{PC}\}$, $\{\mathbf{B_2}, \mathbf{CB}, \mathbf{\Delta_0 C^U}\}$ のどれも $T \nvdash \mathrm{Con}_T^L$ を導かない．

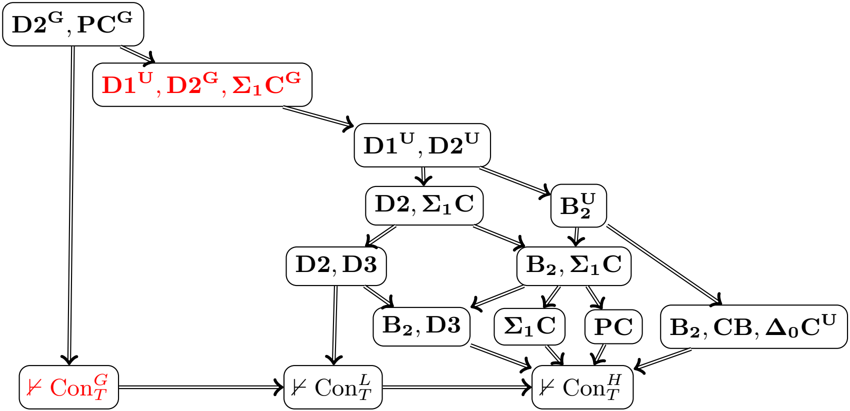
反例 3



定理 (K.)

$\{\mathbf{D2, D3}\}$ は $\{\mathbf{\Sigma_1 C}\}$, $\{\mathbf{PC}\}$, $\{\mathbf{B_2, CB, \Delta_0 C^U}\}$ のどれも導かない.

反例 4

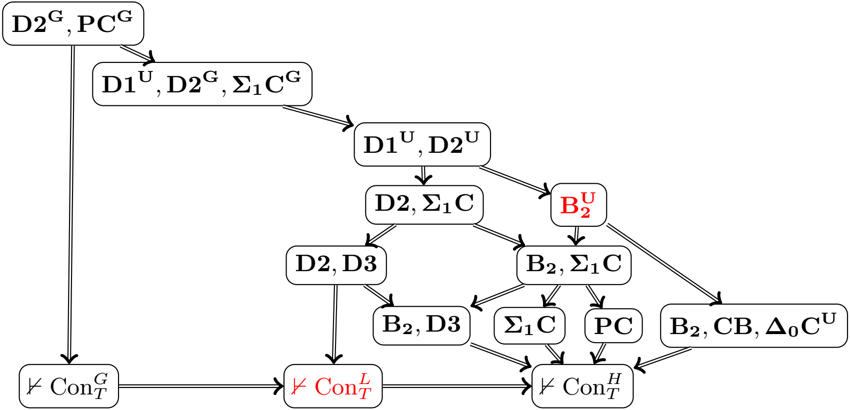


定理 (K.)

$\{\mathbf{D1^U}, \mathbf{D2^G}, \mathbf{\Sigma_1 C^G}\}$ は $T \nvdash \mathrm{Con}_T^G$ を導かない．

これより，Hilbert-Bernays の条件も Löb の条件も Gödel の元の G2 のステートメントを達成できていないことが分かる．

問題



問題

$\mathbf{B_2^U}$ を満たすが $T \vdash \mathrm{Con}_T^L$ となるものはあるか？

参考文献

- W. Buchholz, *Mathematische Logik II*, `http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~buchholz/articles/LogikII.ps` (1993).
- R. G. Jeroslow, Redundancies in the Hilbert-Bernays derivability conditions for Gödel's second incompleteness theorem, *JSL*, vol.38 (1973), no.3, pp.359–367.
- T. Kurahashi, A note on derivability conditions, arXiv:1902.00895
- T. Kurahashi, Rosser provability and the second incompleteness theorem, arXiv:1902.06863
- M. H. Löb, Solution of a problem of Leon Henkin, *JSL*, vol. 20 (1955), no.2, pp.115–118.
- F. Montagna, On the formulas of Peano arithmetic which are provably closed under modus ponens, *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana*, vol.16 (1979), no.B5, pp.196–211.