

部分保存的な文に関する Guaspari の問題について

発表者: 大川裕矢 (千葉大学融合理工学府)
共同発表者: 倉橋太志 (木更津工業高等専門学校)

数学会 2019 年 9/20

- 1 Guaspari の問題
- 2 得られた結果

1 Guaspari の問題

2 得られた結果

Γ -保存性

T, T_i, U : PA を含む無矛盾な r.e. 理論.

$\Gamma \in \{\Sigma_n, \Pi_n : n \geq 1\}$.

$$\Gamma^d := \begin{cases} \Pi_n & (\Gamma = \Sigma_n) \\ \Sigma_n & (\Gamma = \Pi_n) \end{cases}$$

定義

文 φ が T 上 Γ -保存的である.

$:\Leftrightarrow$ 任意の Γ 文 ψ について $T + \varphi \vdash \psi$ ならば $T \vdash \psi$.

定理 (Kreisel: 1962)

$\neg\text{Con}_T$ は T 上 Π_1 -保存的である.

これは第二不完全性定理の拡張.

Guaspari の問

定義

- $\text{Cons}(\Gamma, T) := \{\varphi \in \Gamma^d : \varphi \text{ が } T \text{ 上 } \Gamma\text{-保存的}\}.$
- $\text{Th}(T) := \{\varphi : \varphi \text{ は文で } T \vdash \varphi\}.$

$\varphi \in \Gamma^d$ が $T \vdash \varphi$ なら明らかに $\varphi \in \text{Cons}(\Gamma, T)$.

定理 (Guaspari: 1979)

$\text{Cons}(\Gamma, T) \setminus \text{Th}(T) \neq \emptyset.$

問題 (Guaspari: 1979)

任意の理論の r.e. 列 $\{T_i\}_{i \in \omega}$ に対して,
 $\bigcap_{i \in \omega} (\text{Cons}(\Gamma, T_i) \setminus \text{Th}(T_i)) \neq \emptyset?$

つまり, 「複数の理論で同時に非自明に Γ -保存的となる Γ^d 文は存在するか?」ということ.

Misercque の分析

Guaspari の問題は一般には成立しない.

定理 (Misercque: 1983)

理論の r.e. 無限列 $\{T_i\}_{i \in \omega}$ が存在し, 任意の Γ について,
 $\bigcap_{i \in \omega} (\text{Cons}(\Gamma, T_i) \setminus \text{Th}(T_i)) = \emptyset$ となる.

ただし, この例は有限個の理論に対する Guaspari の問題の反例になっているわけではない.

Bennet の分析 1

Bennet は 2 つの理論に対する Guaspari の問題について分析を行った.

定理 (Bennet: 1986)

理論 T_0, T_1 について, 以下は同値.

- $\bigcap_{i \leq 1} (\text{Cons}(\Gamma, T_i) \setminus \text{Th}(T_i)) \neq \emptyset$
- $\text{Cons}(\Gamma, T_0) \setminus \text{Th}(T_1) \neq \emptyset$ かつ $\text{Cons}(\Gamma, T_1) \setminus \text{Th}(T_0) \neq \emptyset$.

つまり, 2 つの理論に対する Guaspari の問は,
 $\text{Cons}(\Gamma, T) \setminus \text{Th}(U) \neq \emptyset$ という条件を考えることに帰着される.

Bennet の分析 2

$\text{Th}_\Gamma(T) := \text{Th}(T) \cap \Gamma$ とする.

条件「 $\text{Cons}(\Gamma, T) \setminus \text{Th}(U) \neq \emptyset$ 」は次のような十分条件を持つ.

定理 (Bennet: 1986)

$\text{Th}_{\Gamma^d}(T) \not\subseteq \text{Th}(U)$ または $\text{Th}_\Gamma(T) + U$ は無矛盾.

$\Rightarrow \text{Cons}(\Gamma, T) \setminus \text{Th}(U) \neq \emptyset$.

Γ が Σ_n なら, これらは同値.

定理 (Bennet: 1986)

$\text{Th}_{\Pi_n}(T) \not\subseteq \text{Th}(U)$ または $\text{Th}_{\Sigma_n}(T) + U$ は無矛盾.

$\Leftrightarrow \text{Cons}(\Sigma_n, T) \setminus \text{Th}(U) \neq \emptyset$.

$\text{Th}_{\Pi_n}(T) \subseteq \text{Th}(U)$ かつ $\text{Th}_{\Sigma_n}(T) + U$ が矛盾となる T, U は比較的容易に見つけられる (Guaspari の問題の反例となる).

残る Guaspari の問題は有限列に対する $\Gamma = \Pi_n$ の状況のみ.

Bennet の分析 3

問題 (Bennet: 1986)

次を満たす T, U は存在するか?

$$\text{Cons}(\Pi_n, T) \setminus \text{Th}(U) = \emptyset$$

① Guaspari の問題

② 得られた結果

得られた結果

今回, Guaspari の問題に関連して, 次の 2 つの結果が得られた.

- ① $\text{Cons}(\Pi_n, T) \setminus \text{Th}(U) \neq \emptyset$ の新たな十分条件
- ② Bennet の結果を 2 つ以上の理論に拡張 (少しだけ紹介).

諸定義

定義 (Γ 証明可能性述語)

次を満たす論理式 $P(x)$ を T 上 U の Γ 証明可能性述語と呼ぶ.

- $P(x)$ は Γ 論理式.
- 任意の文 φ について $U \vdash \varphi$ ならば $T \vdash P(\ulcorner \varphi \urcorner)$.

定義 ($P(x)$ の Γ 反映原理)

論理式 $P(x)$ について, $\text{Rfn}_P(\Gamma) := \{P(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \varphi : \varphi \text{ は } \Gamma \text{ 文} \}$

得られた結果 1

以下の条件を考える.

- (*) $\text{Cons}(\Pi_n, T) \setminus \text{Th}(U) \neq \emptyset$.
- (1) $T \vdash \text{Rfn}_P(\Pi_n)$ となる T 上 U の Σ_n 証明可能性述語 $P(x)$ が存在する.
- (2) $\text{Th}_{\Sigma_n}(T) \not\subseteq \text{Th}(U)$.
- (3) $\text{Th}_{\Pi_n}(T) + U$ は無矛盾.

Bennet の結果は (2) or (3) $\Rightarrow$ (*) であった.

定理

- (1) $\Rightarrow$ (*).
- (1) $\not\Rightarrow$ (2) or (3).
- (*) $\not\Rightarrow$ (1) or (2) or (3).

得られた結果 1

$n = 1$ の場合を考えると定理から次が分かる.

系

$T \vdash \text{Con}_U$ ならば $\text{Cons}(\Pi_1, T) \setminus \text{Th}(U) \neq \emptyset$.

例えば

- $T = \text{PA} + \text{Con}_{\text{PA}}$
- $U = \text{PA} + \neg \text{Con}_{\text{PA}}$

とすれば $T \vdash \text{Con}_U$ なので $\text{Cons}(\Pi_1, T) \setminus \text{Th}(U) \neq \emptyset$.
(これは Bennet の結果からは得られない)

得られた結果 2

Bennet の 2 つの理論に対する分析を, 2 つ以上の理論に拡張する.

定理

任意の自然数 $k \geq 1$ と $T_0, \dots, T_k$ について, 以下は同値.

- (i) $\bigcap_{i \leq k} (\text{Cons}(\Gamma, T_i) \setminus \text{Th}(T_i)) \neq \emptyset$.
- (ii) 任意の $i \leq k$ について, $\left(\bigcap_{\substack{j \neq i \\ j \leq k}} \text{Cons}(\Gamma, T_j) \right) \setminus \text{Th}(T_i) \neq \emptyset$.

よって, 複数の理論に対して同時に Γ -保存的となる文の存在は, $\left(\bigcap_{i \leq k} \text{Cons}(\Gamma, T_i) \right) \setminus \text{Th}(U) \neq \emptyset$ を考えることに帰着される.

問題

理論の r.e. 列 $\{T_i\}_{i \in \omega}$ についても成立するか?

得られた結果 3

一般に $\left(\bigcap_{i \leq k} \text{Cons}(\Gamma, T_i)\right) \setminus \text{Th}(U) \neq \emptyset$ は,
より簡潔な条件に還元できない.

定理

以下を満たす T_0, T_1, U が存在する.

- $\left(\bigcap_{i \leq 1} \text{Cons}(\Sigma_n, T_i)\right) \setminus \text{Th}(U) = \emptyset$.
- $\text{Cons}(\Sigma_n, T_0) \setminus \text{Th}(U) \neq \emptyset$ かつ $\text{Cons}(\Sigma_n, T_1) \setminus \text{Th}(U) \neq \emptyset$.

問

Bennet の問いは2つの理論に対するものであったが、次の問が考えられる.

問題

次を満たす自然数 k と $T_0, \dots, T_k, U$ は存在するか?
 $\left(\bigcap_{i \leq k} \text{Cons}(\Pi_n, T_i)\right) \setminus \text{Th}(U) = \emptyset.$

参考文献

- [1] C. Bennet, On some orderings of extensions of arithmetic, *Thesis, Dept. of Philosophy, Univ. of Göteborg* (1986).
- [2] D. Guaspari, Partially conservative extentions of arithmetic, *Trans. Amer. Math. Soc*, vol.254, pp.47-68 (1979).
- [3] T. Kurahashi and Y. Okawa. On Guaspari's problem about partially conservative sentences. [arXiv:1909.02761](https://arxiv.org/abs/1909.02761)
- [4] D. Misercque, Answer to a problem by D. Guaspari, in : *Open days in Model Theory and Set Theory*(eds. W Guzicki et al), Poland, pp.181-183 (1983).