述語様相論理における不動点の性質について

日本数学会 2019 年度秋季総合分科会

岩田 荘平[1]　倉橋 太志[2]

[1] 神戸大学大学院 システム情報学研究科

[2] 木更津工業高等専門学校

2019 年 9 月 20 日

はじめに

GL: 証明可能性の様相論理，**QGL**: **GL** の述語論理への拡張

p **は様相論理式** $A(p)$ **で箱入り**であるとは，A における各出現 p が全て $\Box$ の scope の中に含まれることをいう．

GL の不動点定理 (de Jongh-Sambin, 1976)

$A(p)$：命題様相論理式，p は A で**箱入り** に対し，
A の命題変数からなり p を含まない命題様相論理式 F が存在して，

$$\mathbf{GL} \vdash F \leftrightarrow A(F).$$

定理 (Montagna, 1984)

QGL では不動点定理は成立しない．

QGL より強いところで不動点定理が成立するか？
という問題とその周辺状況を調べる．

述語様相論理

$\mathcal{L}$：述語様相論理の言語

述語様相論理の体系

- $\mathbf{QK}$: $\mathbf{K}$ を述語様相論理に拡張した体系；
- $\mathbf{QK4}$: $\mathbf{QK} + \Box A \to \Box\Box A$；
- $\mathbf{QGL}$: $\mathbf{QK} + \Box(\Box A \to A) \to \Box A$；

Tanaka (2018) の体系 $\mathbf{NQGL}$

$\mathbf{NQGL}$: $\mathbf{QK4}$ に規則

$$\frac{\forall n \in \omega, \quad \Box^{n+1}\bot \to A}{A}$$

を加えたもの.

クリプキ意味論

定義

- 述語**クリプキフレーム**は，$\mathcal{F} := \langle W, \{D_w\}_{w\in W}, \prec\rangle$ で，
  W : 空でない集合，D_w : w のドメイン，$\prec$: W 上の到達関係
- 述語**クリプキモデル**は $\mathcal{M} := \langle \mathcal{F}, \Vdash\rangle$ で，
  $\Vdash$: D_w の元をパラメータに持つ $\mathcal{L}$-文に対する w での充足関係

定義

- クリプキモデル $\mathcal{M}$ について，
  $\mathcal{M} \models A :\iff \forall w \in W$, A は w で真.
- クリプキフレーム $\mathcal{F}$ について，
  $\mathcal{F} \models A :\iff$ 任意の $\Vdash$ に対し $\langle \mathcal{F}, \Vdash\rangle \models A$.

クリプキフレームのクラス

定義

- $\mathcal{CW}$: 推移的かつ逆整礎的なフレームのクラス；
- $\mathcal{BL}$: 推移的かつ **bounded length** であるフレームのクラス；
- $\mathcal{FIFD}$: 推移的かつ非反射的な有限フレームで，かつ各ドメインも有限なもののクラス．

事実

$\mathbf{MQ}(\mathcal{C}) := \{A \mid \forall \mathcal{F} \in \mathcal{C}, \mathcal{F} \models A\}$ とするとき，

$$\mathbf{QGL} \subsetneq \mathbf{MQ}(\mathcal{CW}) \subsetneq \mathbf{MQ}(\mathcal{BL}) \subsetneq \mathbf{MQ}(\mathcal{FIFD}).$$

NQGL のクリプキ完全性定理 (Tanaka, 2018)

$\mathbf{NQGL} = \mathbf{MQ}(\mathcal{BL})$.

$\mathcal{C}$ の不動点の性質

$\mathcal{L}'$: $\mathcal{L}$ に命題変数 p を加えた言語（p は不動点をとる場所を指定するだけ）.

定義（FPP, loFPP）

$\mathcal{C}$: フレームのクラス，$A(p)$: $\mathcal{L}'$-論理式，p は A で箱入りとする.

1. $\mathcal{C}$ が不動点の性質 (FPP) を持つとは，任意の $A(p)$ に対して，$A(p)$ の記号からなる $\mathcal{L}$-論理式 F が存在して，任意の $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$ に対し $\mathcal{F} \models F \leftrightarrow A(F)$ を満たすこと.
2. $\mathcal{C}$ が局所的な不動点の性質 (loFPP) を持つとは，任意の $A(p)$ と $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$ に対して，$A(p)$ の記号からなる $\mathcal{L}$-論理式 F が存在して，$\mathcal{F} \models F \leftrightarrow A(F)$ を満たすこと.

$\mathcal{C}$ は FPP をもつ $\Rightarrow \mathcal{C}$ は loFPP をもつ.

不動点の性質の不成立

$$\mathbf{QGL} \subsetneq \mathbf{MQ}(\mathcal{CW}) \subsetneq \mathbf{MQ}(\mathcal{BL}) \subsetneq \mathbf{MQ}(\mathcal{FIFD}).$$

定理 (Montagna, 1984)

QGL では不動点定理は成立しない.

この定理の証明から，より強い次が得られる.

定理 (Montagna, 1984)

$\mathcal{CW}$ は loFPP を持たない (よって FPP も持たない).

定理 (Smoryński, 1987)

$A(p) :\equiv \forall u \Box (p \to P(u))$ も $\mathcal{CW}$ における loFPP の反例.

問

$\mathcal{BL}$ と $\mathcal{FIFD}$ は FPP や loFPP を持つか？

FPP の分析

定理 (I. & K.)

$\mathcal{FIFD}$ は FPP を持たない.

系

$\mathcal{BL}$ も FPP を持たない．**NQGL** で不動点定理が成立しない.

$$
\begin{array}{cr}
 & \mathcal{M}_S \\
0 & \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\} \\
1 & \{1, 2, 3, 4, \dots\} \\
2 & \{2, 3, 4, \dots\} \\
\vdots & \ddots
\end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{cr}
 & \mathcal{M}_k \\
0 & \{0, 1, 2, 3, \dots, k, k+1, k+2\} \\
1 & \{1, 2, 3, \dots, k, k+1, k+2\} \\
\vdots & \ddots \\
k & \{k, k+1, k+2\}
\end{array}
$$

$A(p) \equiv \forall u \Box (p \to P(u))$ とすると，任意の $B : \mathcal{L}$-文に対し，
ある $\mathcal{M}_k$ で $\mathcal{M}_k \not\models B \leftrightarrow A(B)$ となる.

loFPP の分析

まず Sacchetti (1999) による $\mathbf{K} + \Box^{n+1}\bot$ の不動点定理を述語論理に拡張した.

$\mathbf{QK} + \Box^{n+1}\bot$ の不動点定理 (I. & K.)

$A(p)$: $\mathcal{L}'$-論理式，p は A で箱入りとすると，A の記号と自由変数からなる $\mathcal{L}$-論理式 F で $\mathbf{QK} \vdash \Box^{n+1}\bot \to (F \leftrightarrow A(F))$ を満たすものが **effective に構成可能.**

系

$\mathcal{BL}$ と $\mathcal{FIFD}$ は loFPP を持つ.

- $A(p)$，$\mathcal{F}$ を固定．$\mathcal{F}$ の高さを n とすると，$\mathcal{F} \models \Box^{n+1}\bot$.
- 定理より，$\mathbf{QK} \vdash \Box^{n+1}\bot \to (F \leftrightarrow A(F))$ なる F が取れる.
- $\mathcal{F} \models \Box^{n+1}\bot \to (F \leftrightarrow A(F))$．ゆえに $\mathcal{F} \models F \leftrightarrow A(F)$.

NQGL のクレイグ補間性

これらの結果を用いて体系 **NQGL** に関する次の結果が得られた.

定理 (I. & K.)

NQGL はクレイグ補間性を持たない.

- クレイグ補間性が成り立つと仮定 (背理法).
- $A(p) \equiv \forall u \Box (p \to P(u))$ に対し, $\mathbf{NQGL} \vdash F \leftrightarrow A(F)$ となる $\mathcal{L}$-論理式 F が存在するが, これは我々の結果に矛盾.

QGL が不動点を持つための十分条件

QGL では一般には不動点定理が成立しないが，成立する論理式を分析した．

定義（Σ-論理式）

$\mathcal{L}'$-論理式が **Σ-論理式**である，ということを次で定める：

- $\Box A$ の形の $\mathcal{L}'$-論理式は Σ-論理式；
- A，B が Σ-論理式のとき，$A \vee B$，$A \wedge B$，$\exists u A$ は全て Σ-論理式．

定理 (I. & K.)

$A(p)$ は Σ-論理式および $\mathcal{L}$-論理式のブール結合とすると，$A(p)$ は **QGL** において不動点をもつ．

まとめ

- クリプキフレームのクラスに対する不動点の性質は次の通り．

$\mathcal{C}$	FPP	loFPP
$\mathcal{FIFD}$	No	Yes
$\mathcal{BL}$	No	Yes
$\mathcal{CW}$	No	No

- **NQGL** に対して不動点定理，クレイグ補間性は不成立．
- $\mathbf{K} + \Box^{n+1}\bot$ の不動点定理を，$\mathbf{QK} + \Box^{n+1}\bot$ に拡張（不動点を計算するアルゴリズムも与えた）．
- $A(p)$ が **QGL** において不動点を持つための十分条件を分析した．(**必要十分**かどうかはまだわからない．)

参考文献

[1] F. Montagna, *"The predicate modal logic of provability."* Notre Dame Journal of Formal Logic 25(2): 179-189, 1984.

[2] L. Sacchetti, *"Logiche modali con la proprietá del punto fisso."* Bollettino della Unione Mathematica Italiana, Serie 8, 2-B(2): 279-290, 1999.

[3] G. Sambin, *"An effective fixed-point theorem in intuitionistic diagonalizable algebras."* Studia Logica 35(4): 345-361, 1976.

[4] C. Smoryński, *"Quantified modal logic and self-reference."* Notre Dame Journal of Formal Logic 28(3): 356-370, 1987.

[5] S. Iwata and T. Kurahashi, *"Fixed-point properties for predicate modal logics."* Submitted. arXiv:1907.00306.

[6] Y. Tanaka, *"A cut-free proof system for a predicate extension of the logic of provability."* Reports on Mathematical Logic 53: 97-109, 2018.