

ゲーデルの第二不完全性定理について

倉橋太志

木更津工業高等専門学校

科学基礎論学会 2019 年度秋の研究例会
ワークショップ「ゲーデルと 21 世紀の論理学」

日本大学 文理学部

2019 年 11 月 30 日

はじめに

第二不完全性定理 (Gödel, 1931)

T をペアノ算術 PA を含む、再帰的に公理化された無矛盾な理論とすると、 T の無矛盾性を表す文 Con_T は T において証明できない。

- 一方、 T の無矛盾性を表すと考えられる文で、 T において証明可能なものもある (Kreisel の注意)。
- 第二不完全性定理の正確な主張には、 Con_T に関する条件が必要 (導出可能性条件)。
- よく知られたものの以外の条件に基づく第二不完全性定理もある (Jeroslow など)。

本講演の目標

- 無矛盾性を表す文 Con_T の選び方
- 様々な導出可能性条件

を詳しく分析することで、第二不完全性定理を取り巻く状況を明らかにする。

アウトライン

- ① 証明と Kreisel の注意
- ② 様々な第二不完全性定理
- ③ 導出可能性条件
- ④ 研究成果

アウトライン

① 証明と Kreisel の注意

- ① 第二不完全性定理の証明
- ② Kreisel の注意

② 様々な第二不完全性定理

③ 導出可能性条件

④ 研究成果

Gödel 数化と証明可能性述語

項, 論理式, 論理式の列, などは全て記号の有限列, または有限列の有限列なので, 自然数を用いてコーディングできる (Gödel 数化) .

定義

- ① 論理式 φ の Gödel 数に対応する数項を $\ulcorner \varphi \urcorner$ とかく.
- ② “ x は論理式の Gödel 数” を表す論理式 $\text{Fml}(x)$

T をペアノ算術 PA を含む, 再帰的に公理化された無矛盾な理論とする.

定理

次の条件を満たす Σ_1 論理式 $\text{Pr}_T(x)$ が存在する:

任意の論理式 φ について, $\mathbb{N} \models \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \iff T \vdash \varphi$.

定義 (証明可能性述語)

定理の条件を満たす Σ_1 論理式 $\text{Pr}_T(x)$ を, T の**証明可能性述語**という.

第二不完全性定理の証明

- $T \vdash \varphi \leftrightarrow \neg \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$ を満たす文 φ (T の Gödel 文) をとる.
- Σ_1 -完全性定理を用いて
 T が無矛盾ならば $T \not\vdash \varphi$
 が示せる.

ここまでの証明を T の中で実行すれば第二不完全性定理が得られる.
 Con_T を $\neg \text{Pr}_T(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$ と定める.

第二不完全性定理の証明

- $T \vdash \text{Con}_T \rightarrow \neg \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$.
- $T \vdash \text{Con}_T \rightarrow \varphi$.
- $T \vdash \text{Con}_T$ なら $T \vdash \varphi$ なのでおかしい. $T \not\vdash \text{Con}_T$. □

Kreisel の注意

- $T \vdash \text{Con}_T \rightarrow \neg \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$ を示すには、“ T の証明可能性” のもつ性質を T の中で $\text{Pr}_T(x)$ を用いて表現できる必要がある。
- Gödel の作った $\text{Pr}_T(x)$ はできそう。
- ただし実際、 $\text{Pr}_T(x)$ が T の証明可能性述語であるだけでは不十分。

Kreisel の注意 (1958?)

$T \vdash \text{Con}_T$ となるような T の証明可能性述語が存在する。

形式化の多義性

- $\text{Pr}_T(x)$ の取り方はたくさんあり、互いに同値でない Con_T がたくさんとれる。
- Gödel が示したのは、 $T \not\vdash \text{Con}_T$ となる Con_T が少なくとも一つあること、ともいえる。

導出可能性条件

あとは $T \vdash \text{Con}_T \rightarrow \neg \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$ を示すために十分な条件を明確にすればよい。

導出可能性条件 (derivability conditions)

- ① $T \vdash \varphi \Rightarrow T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$
- ② $T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \rightarrow \psi \urcorner) \rightarrow (\text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner))$
- ③ $T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \urcorner)$

現代の第二不完全性定理の標準的な証明は、Gödel の方法で作った $\text{Pr}_T(x)$ がこの導出可能性条件を満たすことを確認し、 $T \not\vdash \text{Con}_T$ を示すもの。

ここまでの第二不完全性定理についてよく知られていること。

アウトライン

- ① 証明と Kreisel の注意
- ② 様々な第二不完全性定理
 - ① Gödel (1931)
 - ② Hilbert and Bernays (1939)
 - ③ Löb (1955)
 - ④ Jeroslow (1973)
 - ⑤ Montagna (1979)
 - ⑥ Buchholz (1993)
- ③ 導出可能性条件
- ④ 研究成果

Gödel (1931)

第二不完全性定理 (G2)

$$T \not\vdash \exists x(\text{Fml}(x) \wedge \neg \text{Pr}_T(x))$$

- ただし Gödel の証明は、第一不完全性定理の証明を形式化すればよい、という程度のもので、肝心の形式化は実行していない。
- それらの詳細を記述したものを続いて出版すると論文には書いてあるが、結局は出版されることはなかった。

Hilbert and Bernays (1939)

- G2 の最初の詳細な証明は Hilbert and Bernays による本 *Grundlagen der Mathematik* の第二巻で与えられた。
- 特に彼らは、 $\text{Pr}_T(x)$ が次の条件 HB1, HB2, HB3 を満たすならば $T \not\vdash \forall x(\text{Fml}(x) \wedge \text{Pr}_T(x) \rightarrow \neg \text{Pr}_T(\dot{\neg} x))$ となることを示した。

Hilbert-Bernays の導出可能性条件

HB1 $T \vdash \varphi \rightarrow \psi \Rightarrow T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner).$

HB2 $T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \neg \varphi(x) \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \neg \varphi(\dot{x}) \urcorner).$

HB3 全ての原始再帰的な項 $t(x)$ について

$T \vdash t(x) = 0 \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner t(\dot{x}) = 0 \urcorner).$

ここで $\ulcorner \varphi(\dot{x}) \urcorner$ は n から $\varphi(\bar{n})$ の Gödel 数を計算する原始再帰的関数に対応する項。

Löb (1955)

- Löb は $\text{Pr}_T(x)$ が次の条件 D1, D2, D3 を満たすなら, Löb の定理が成立することを証明し,
このとき $T \not\vdash \neg \text{Pr}_T(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$ となる (G2 の最もよく知られた形) .

Löb の導出可能性条件

D1 $T \vdash \varphi \Rightarrow T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$.

D2 $T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \rightarrow \psi \urcorner) \rightarrow (\text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner))$.

D3 $T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \urcorner)$.

全ての $\text{Pr}_T(x)$ は自動的に D1 を満たす.

Jeroslow (1973)

- Jeroslow は Löb の条件の D3 を次の $\Sigma_1 C$ に強めれば, D2 が不要となることを示した.

形式化された Σ_1 -完全性

$\Sigma_1 C$ φ が Σ_1 文ならば $T \vdash \varphi \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$.

- すなわち, $\text{Pr}_T(x)$ が D1 と $\Sigma_1 C$ を満たせば
 $T \not\vdash \forall x(\text{Fml}(x) \wedge \text{Pr}_T(x) \rightarrow \neg \text{Pr}_T(\neg x))$ となる.

Montagna (1979)

- Montagna は $\text{Pr}_T(x)$ が次の 2 条件を満たせば Löb の定理が成り立つことを示した.
- このとき特に $T \not\vdash \exists x(\text{Fml}(x) \wedge \neg \text{Pr}_T(x))$ である.

Montagna の条件

- $T \vdash \forall x ("x \text{ は論理公理}" \rightarrow \text{Pr}_T(x)).$
- $T \vdash \forall x \forall y (\text{Fml}(x) \wedge \text{Fml}(y) \rightarrow (\text{Pr}_T(x \dot{\rightarrow} y) \rightarrow (\text{Pr}_T(x) \rightarrow \text{Pr}_T(y)))).$

Buchholz (1993)

- Buchholz の講義テキストにおいて, $\text{Pr}_T(x)$ が次の D1^U と D2^U を満たせば $\Sigma_1\text{C}^U$ が成立することが示されている.
- このとき $T \not\vdash \neg\text{Pr}_T(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$ となる.

Buchholz の条件

$$\text{D1}^U \quad T \vdash \varphi(x) \Rightarrow T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi(\dot{x}) \urcorner).$$

$$\begin{aligned} \text{D2}^U \quad T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi(\dot{x}) \rightarrow \psi(\dot{x}) \urcorner) \\ \rightarrow (\text{Pr}_T(\ulcorner \varphi(\dot{x}) \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \psi(\dot{x}) \urcorner)). \end{aligned}$$

$$\Sigma_1\text{C}^U \quad \varphi(x) \text{ が } \Sigma_1 \text{ 論理式ならば } T \vdash \varphi(x) \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi(\dot{x}) \urcorner).$$

これらの異なる $G2$ たちは異なる結論を持っている。

無矛盾性を表す異なる文

- $\text{Con}_T^H \equiv \forall x(\text{Fml}(x) \wedge \text{Pr}_T(x) \rightarrow \neg \text{Pr}_T(\neg x))$
- $\text{Con}_T^L \equiv \neg \text{Pr}_T(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$
- $\text{Con}_T^G \equiv \exists x(\text{Fml}(x) \wedge \neg \text{Pr}_T(x))$

異なる結論

Gödel $T \not\vdash \text{Con}_T^G$

Hilbert-Bernays $T \not\vdash \text{Con}_T^H$

Löb $T \not\vdash \text{Con}_T^L$

Jeroslow $T \not\vdash \text{Con}_T^H$

Montagna $T \not\vdash \text{Con}_T^G$

Buchholz $T \not\vdash \text{Con}_T^L$

- $\text{PA} \vdash \text{Con}_T^H \rightarrow \text{Con}_T^L$ と $\text{PA} \vdash \text{Con}_T^L \rightarrow \text{Con}_T^G$.
- これらを取りまく状況を明らかにしたい。

- ① 証明と Kreisel の注意
- ② 様々な第二不完全性定理
- ③ 導出可能性条件
 - ① local な導出可能性条件
 - ② uniform な導出可能性条件
 - ③ global な導出可能性条件
- ④ 研究成果

Local な導出可能性条件

Local な導出可能性条件

D1 $T \vdash \varphi \Rightarrow T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$.

D2 $T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \rightarrow \psi \urcorner) \rightarrow (\text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner))$.

D3 $T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \urcorner)$.

Γ C φ が Γ 文ならば $T \vdash \varphi \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$.

B2 $T \vdash \varphi \rightarrow \psi \Rightarrow T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner)$.

PC $T \vdash \text{Pr}_\emptyset(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$.

Uniform な導出可能性条件

Uniform な導出可能性条件

$$\mathbf{D1}^U \quad T \vdash \varphi(x) \Rightarrow T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi(\dot{x}) \urcorner).$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D2}^U \quad T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi(\dot{x}) \rightarrow \psi(\dot{x}) \urcorner) \\ \rightarrow (\text{Pr}_T(\ulcorner \varphi(\dot{x}) \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \psi(\dot{x}) \urcorner)). \end{aligned}$$

$$\mathbf{D3}^U \quad T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi(\dot{x}) \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi(\dot{x}) \urcorner) \urcorner).$$

$$\mathbf{\Gamma C}^U \quad \varphi(x) \text{ が } \Gamma \text{ 論理式ならば } T \vdash \varphi(x) \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi(\dot{x}) \urcorner).$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_2^U \quad T \vdash \varphi(x) \rightarrow \psi(x) \\ \Rightarrow T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi(\dot{x}) \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \psi(\dot{x}) \urcorner). \end{aligned}$$

$$\mathbf{PC}^U \quad T \vdash \text{Pr}_\emptyset(\ulcorner \varphi(\dot{x}) \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi(\dot{x}) \urcorner).$$

$$\mathbf{CB} \quad T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \forall x \varphi(x) \urcorner) \rightarrow \forall x \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi(\dot{x}) \urcorner).$$

Global な導出可能性条件

Global な導出可能性条件

$$\mathbf{D2}^G \quad T \vdash \forall x \forall y (\text{Fml}(x) \wedge \text{Fml}(y) \\ \rightarrow (\text{Pr}_T(x \dot{\rightarrow} y) \rightarrow (\text{Pr}_T(x) \rightarrow \text{Pr}_T(y)))).$$

$$\mathbf{\Gamma C}^G \quad T \vdash \forall x (\text{True}_\Gamma(x) \rightarrow \text{Pr}_T(x)).$$

$$\mathbf{PC}^G \quad T \vdash \forall x (\text{Fml}(x) \rightarrow (\text{Pr}_\emptyset(x) \rightarrow \text{Pr}_T(x))).$$

注意

Global $\Rightarrow$ Uniform $\Rightarrow$ Local.

これまでに紹介した結果

Hilbert-Bernays $B_2, CB, \Delta_0 C^U \Rightarrow T \not\vdash \text{Con}_T^H$

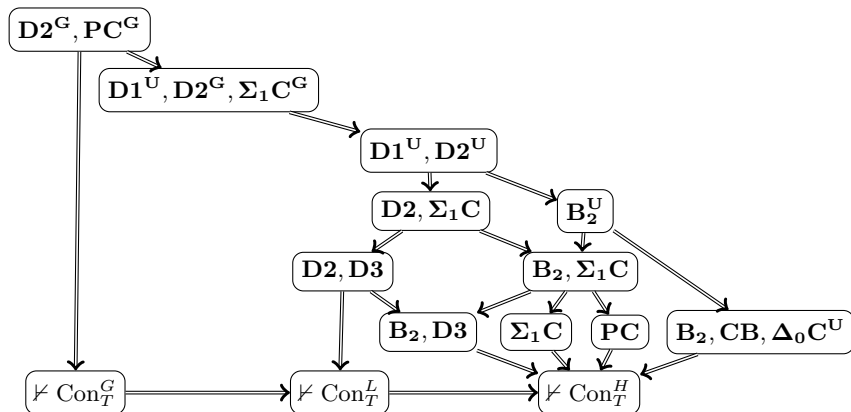
Löb $D2, D3 \Rightarrow T \not\vdash \text{Con}_T^L$

Jeroslow $\Sigma_1 C \Rightarrow T \not\vdash \text{Con}_T^H$

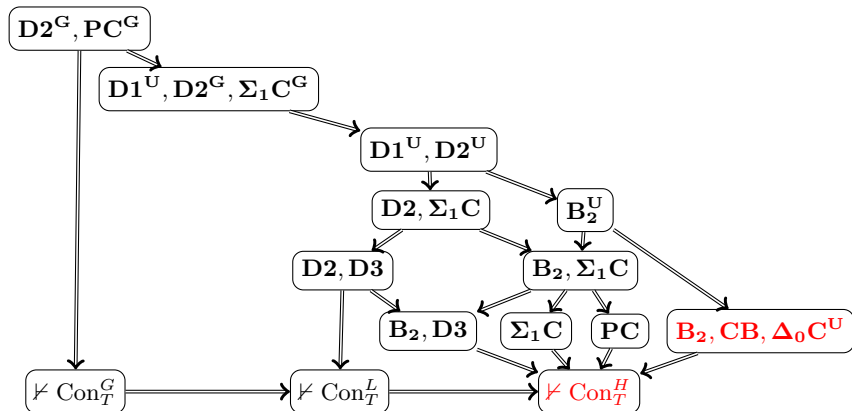
Montagna $D2^G, PC^G \Rightarrow T \not\vdash \text{Con}_T^G$

Buchholz $D1^U, D2^U \Rightarrow \Sigma_1 C^U$

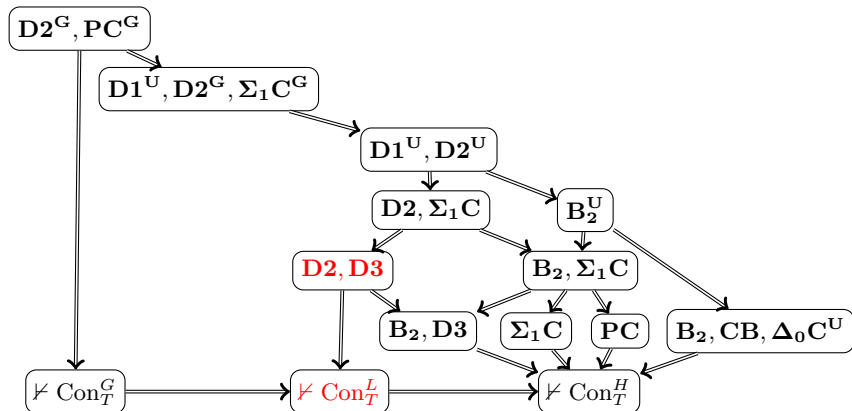
条件の組の関係



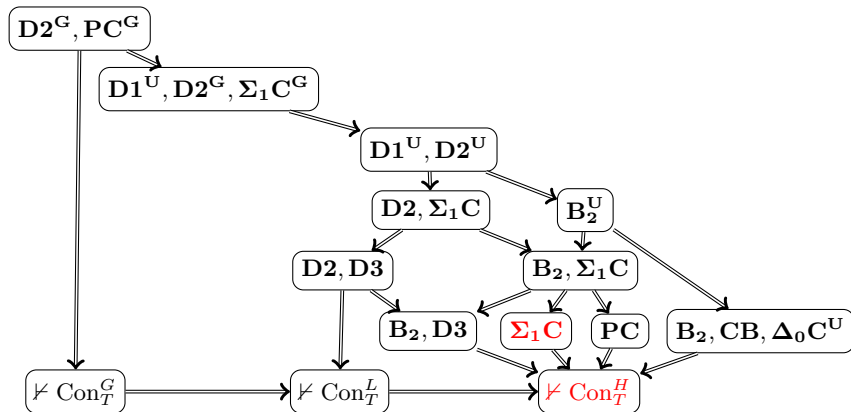
Hilbert and Bernays (1939)



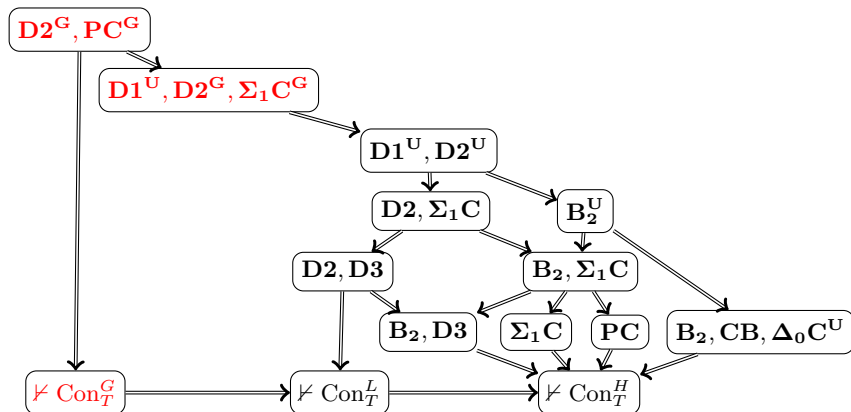
Löb (1955)



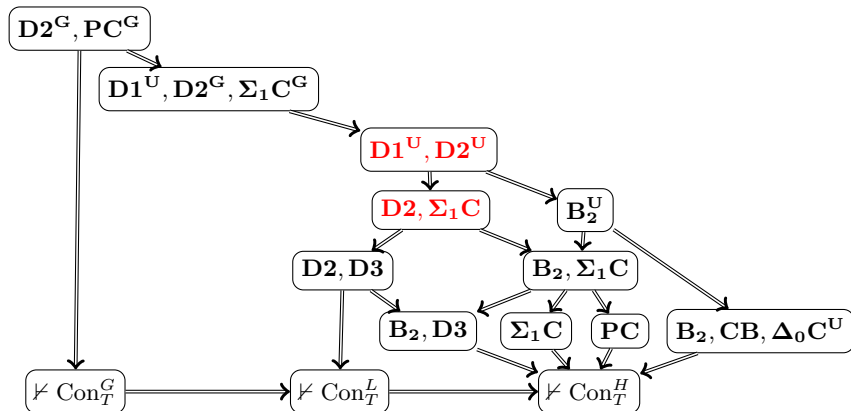
Jeroslow (1973)



Montagna (1979)



Buchholz (1993)



- ① 証明と Kreisel の注意
- ② 様々な第二不完全性定理
- ③ 導出可能性条件
- ④ **研究成果**
 - ① 新しい十分条件
 - ② Buchholz の結果の改良
 - ③ 様々な反例

新しい十分条件

定理 (K.)

- $\mathbf{B}_2, \mathbf{D3} \Rightarrow T \not\vdash \text{Con}_T^H$
- $\mathbf{PC} \Rightarrow T \not\vdash \text{Con}_T^H$

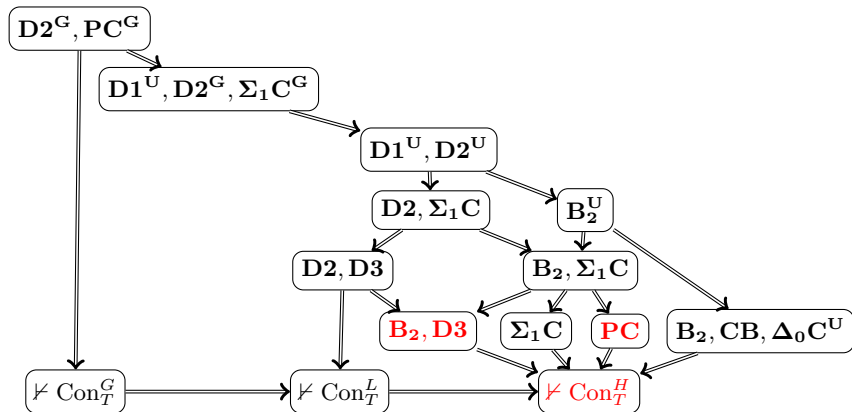
$\mathbf{B}_2$ $T \vdash \varphi \rightarrow \psi \Rightarrow T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner).$

$\mathbf{D3}$ $T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \urcorner).$

$\mathbf{PC}$ $T \vdash \text{Pr}_\emptyset(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner).$

$\text{Con}_T^H \equiv \forall x(\text{Fml}(x) \wedge \text{Pr}_T(x) \rightarrow \neg \text{Pr}_T(\ulcorner \neg x \urcorner))$

新しい十分条件



Buchholz の結果の改良

定理 (Buchholz)(再掲)

$$D1^U, D2^U \Rightarrow \Sigma_1 C^U$$

$D1^U, D2^U \Rightarrow B_2^U$ が成立.

$$\begin{aligned} B_2^U \quad T \vdash \varphi(x) \rightarrow \psi(x) \\ \Rightarrow T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi(\dot{x}) \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \psi(\dot{x}) \urcorner). \end{aligned}$$

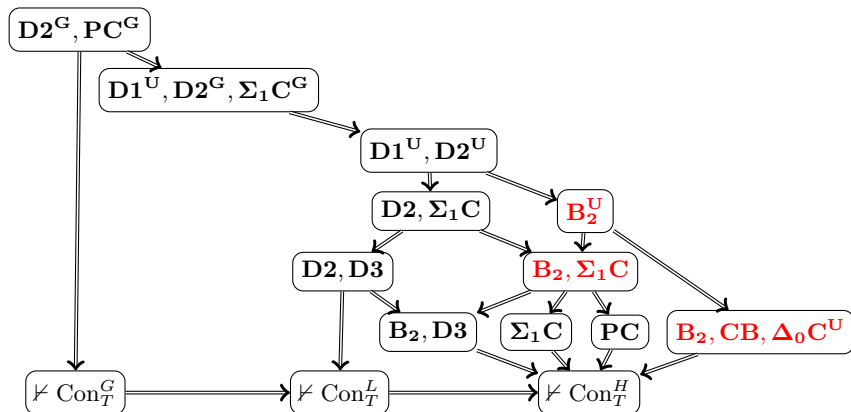
定理 (K.)

$$B_2^U \Rightarrow \Sigma_1 C^U$$

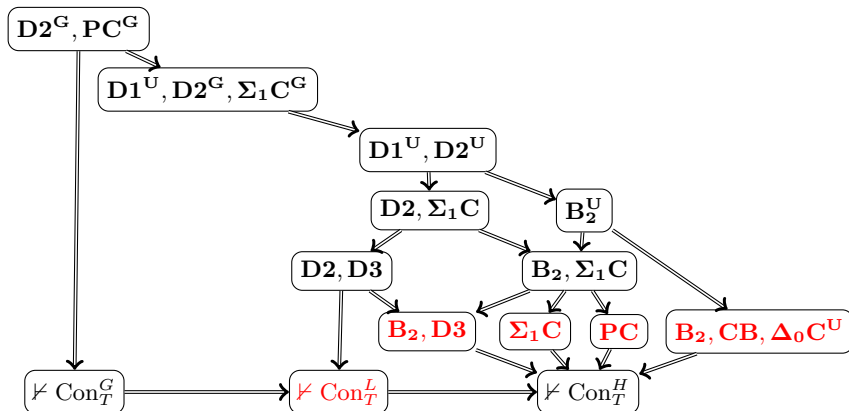
系

$$B_2^U \Rightarrow T \not\vdash \text{Con}_T^H$$

Buchholz の結果の改良



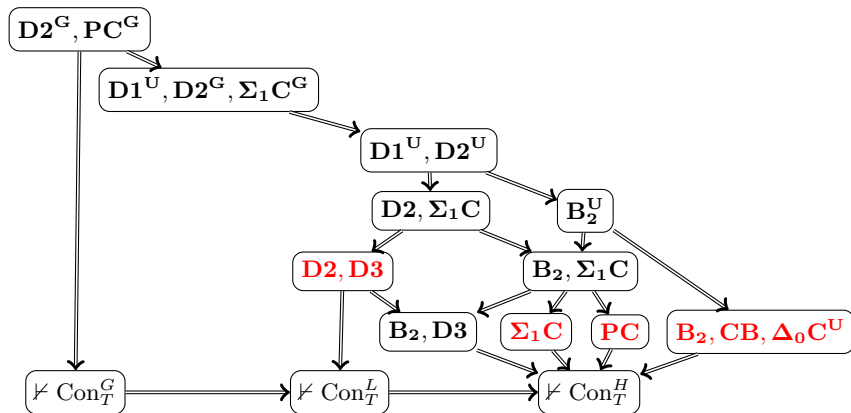
反例 2



定理 (K.)

$\{B_2, D3\}$, $\{\Sigma_1 C\}$, $\{PC\}$, $\{B_2, CB, \Delta_0 C^U\}$ のどれも $T \not\vdash \text{Con}_T^L$ を導かない。

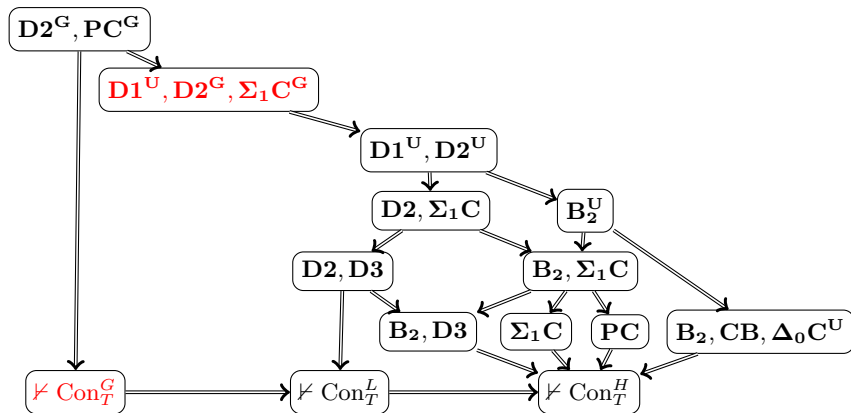
反例 3



定理 (K.)

$\{D2, D3\}$ は $\{\Sigma_1 C\}$, $\{PC\}$, $\{B_2, CB, \Delta_0 C^U\}$ のどれも導かない。

反例 4



定理 (K.)

$\{D1^U, D2^G, \Sigma_1 C^G\}$ は $T \not\vdash \text{Con}_T^G$ を導かない。

これより、Hilbert-Bernays の条件も Löb の条件も Gödel の元の G2 の主張を達成できていないことが分かる。

最後に

問い

第二不完全性定理とは何か？その正確な主張は？

可能な答え

- Con_T の証明不可能性を主張する複数の定理の総称である
…本質的でない主張をも含めてしまう可能性がある。
- Gödel の作った Con_T の証明不可能性を主張するものである
…Gödel 数化を変えれば証明可能性述語は変わるがそれも許さないのか？

第二不完全性定理として取り扱うべき証明可能性述語の範囲を特定することは容易ではない。

参考文献

- W. Buchholz, *Mathematische Logik II*, <http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~buchholz/articles/LogikII.ps> (1993).
- R. G. Jeroslow, Redundancies in the Hilbert-Bernays derivability conditions for Gödel's second incompleteness theorem, *JSL*, vol.38 (1973), no.3, pp.359–367.
- T. Kurahashi, A note on derivability conditions, arXiv:1902.00895
- T. Kurahashi, Rosser provability and the second incompleteness theorem, arXiv:1902.06863
- M. H. Löb, Solution of a problem of Leon Henkin, *JSL*, vol. 20 (1955), no.2, pp.115–118.
- F. Montagna, On the formulas of Peano arithmetic which are provably closed under modus ponens, *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana*, vol.16 (1979), no.B5, pp.196–211.
- 前原昭二, 第二不完全性定理の内容的解釈, 科学基礎論研究, vol.20 (1991), no.3, pp.143–147.