理論の分解と証明可能性論理

倉橋太志
木更津工業高等専門学校

日本数学会 **2018** 年度年会
東京大学
2018 年 **3** 月 **19** 日

はじめに

次のような事実に注目する.

定理（Kreisel and Lévy, 1968）

$\mathbf{PA}$ と $I\Sigma_1 + \mathsf{RFN}(I\Sigma_1)$ は同値.
ここで $\mathsf{RFN}(I\Sigma_1)$ は “$\forall\varphi(I\Sigma_1 \vdash \varphi \Rightarrow \mathbb{N} \models \varphi)$” を形式化したもの.

定理（Jeroslow, 1971）

$I\Sigma_1$ のある拡大理論 T が存在して，$\mathbf{PA}$ と $T + \mathsf{Con}(T)$ は同値.

- これらは PA を分解している.
- これらの結果を証明可能性論理の視点から眺める.

はじめに

次のような事実に注目する.

定理（Kreisel and Lévy, 1968）

$\mathbf{PA}$ と $I\Sigma_1 + \mathsf{RFN}(I\Sigma_1)$ は同値.
ここで $\mathsf{RFN}(I\Sigma_1)$ は "$\forall\varphi(I\Sigma_1 \vdash \varphi \Rightarrow \mathbb{N} \models \varphi)$" を形式化したもの.

定理（Jeroslow, 1971）

$I\Sigma_1$ のある拡大理論 T が存在して，$\mathbf{PA}$ と $T + \mathsf{Con}(T)$ は同値.

- これらは PA を分解している.
- これらの結果を証明可能性論理の視点から眺める.

はじめに

次のような事実に注目する.

定理（Kreisel and Lévy, 1968）

$\mathbf{PA}$ と $I\Sigma_1 + \mathsf{RFN}(I\Sigma_1)$ は同値.
ここで $\mathsf{RFN}(I\Sigma_1)$ は "$\forall\varphi(I\Sigma_1 \vdash \varphi \Rightarrow \mathbb{N} \models \varphi)$" を形式化したもの.

定理（Jeroslow, 1971）

$I\Sigma_1$ のある拡大理論 T が存在して, $\mathbf{PA}$ と $T + \mathsf{Con}(T)$ は同値.

- これらは PA を分解している.
- これらの結果を証明可能性論理の視点から眺める.

アウトライン

1. 準備
2. **Solovay** の定理と分類定理
3. 結果

証明可能性述語

以降 T, U は $I\Sigma_1$ の無矛盾拡大理論，特に T は r.e. とする.

事実

以下は同値：

- T は r.e. 理論
- Σ_1 論理式 $\tau(v)$ があって， $T = \{\varphi : \mathbb{N} \models \tau(\ulcorner\varphi\urcorner)\}$.

このような $\tau(v)$ を T の Σ_1 定義 という.

T の各 Σ_1 定義 $\tau(v)$ に対して,

“x は $\tau(v)$ の定める理論から証明可能”

という内容をもつ Σ_1 論理式 $\mathrm{Pr}_\tau(x)$ を自然に書き下すことができる.
論理式 $\mathrm{Pr}_\tau(x)$ を $\tau(v)$ の証明可能性述語という.

証明可能性述語

以降 T, U は $I\Sigma_1$ の無矛盾拡大理論，特に T は r.e. とする．

事実

以下は同値：

- T は r.e. 理論
- Σ_1 論理式 $\tau(v)$ があって， $T = \{\varphi : \mathbb{N} \models \tau(\ulcorner \varphi \urcorner)\}$.

このような $\tau(v)$ を T の Σ_1 定義 という．

T の各 Σ_1 定義 $\tau(v)$ に対して，

$$\text{“}x \text{ は } \tau(v) \text{ の定める理論から証明可能”}$$

という内容をもつ Σ_1 論理式 $\mathrm{Pr}_\tau(x)$ を自然に書き下すことができる．
論理式 $\mathrm{Pr}_\tau(x)$ を $\tau(v)$ の証明可能性述語という．

証明可能性述語

以降 T, U は $I\Sigma_1$ の無矛盾拡大理論，特に T は r.e. とする．

事実

以下は同値：

- T は r.e. 理論
- Σ_1 論理式 $\tau(v)$ があって， $T = \{\varphi : \mathbb{N} \models \tau(\ulcorner \varphi \urcorner)\}$.

このような $\tau(v)$ を T の Σ_1 定義 という．

T の各 Σ_1 定義 $\tau(v)$ に対して，

“x は $\tau(v)$ の定める理論から証明可能”

という内容をもつ Σ_1 論理式 $\mathrm{Pr}_\tau(x)$ を自然に書き下すことができる．
論理式 $\mathrm{Pr}_\tau(x)$ を $\tau(v)$ の証明可能性述語という．

導出可能性条件

事実（Hilbert-Bernays-Löb-Feferman）

$\tau(v)$ を T の Σ_1 定義とする．

- $T \vdash \varphi \Rightarrow I\Sigma_1 \vdash \mathrm{Pr}_\tau(\ulcorner \varphi \urcorner)$.
- $I\Sigma_1 \vdash \mathrm{Pr}_\tau(\ulcorner \varphi \to \psi \urcorner) \to (\mathrm{Pr}_\tau(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathrm{Pr}_\tau(\ulcorner \psi \urcorner))$.
- φ が Σ_1 $\Rightarrow I\Sigma_1 \vdash \varphi \to \mathrm{Pr}_\tau(\ulcorner \varphi \urcorner)$.
- $I\Sigma_1 \vdash \mathrm{Pr}_\tau(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathrm{Pr}_\tau(\ulcorner \mathrm{Pr}_\tau(\ulcorner \varphi \urcorner) \urcorner)$.
- $I\Sigma_1 \vdash \mathrm{Pr}_\tau(\ulcorner \mathrm{Pr}_\tau(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \varphi \urcorner) \to \mathrm{Pr}_\tau(\ulcorner \varphi \urcorner)$.

‘証明可能性論理’ は証明可能性述語のもつこれらの性質を，様相論理を用いて分析する研究領域．

算術的解釈

様相論理と算術を結び付ける.

定義（算術的解釈）

命題変数全体の集合から算術の文の集合への写像 f を**算術的解釈**という.

$\tau(v)$ を T の Σ_1 定義とする.
各算術的解釈 f は，様相論理式全体の集合から算術の文の集合への写像 f_τ に次を満たすように一意に拡張できる：

- $f_\tau(\bot)$ は $0 = 1$.
- $f_\tau(A \wedge B)$ は $f_\tau(A) \wedge f_\tau(B)$.
- $\cdots$
- $f_\tau(\Box A)$ は $\mathrm{Pr}_\tau(\ulcorner f_\tau(A) \urcorner)$.

算術的解釈

様相論理と算術を結び付ける.

定義（算術的解釈）

命題変数全体の集合から算術の文の集合への写像 f を算術的解釈という.

$\tau(v)$ を T の Σ_1 定義とする.
各算術的解釈 f は，様相論理式全体の集合から算術の文の集合への写像 f_τ に次を満たすように一意に拡張できる：

- $f_\tau(\bot)$ は $0 = 1$.
- $f_\tau(A \land B)$ は $f_\tau(A) \land f_\tau(B)$.
- $\cdots$
- $f_\tau(\Box A)$ は $\mathrm{Pr}_\tau(\ulcorner f_\tau(A) \urcorner)$.

証明可能性論理

定義（証明可能性論理）

U を任意の理論，$\tau(v)$ を T の Σ_1 定義とする．
$\mathrm{PL}_\tau(U) := \{A \mid A$ は様相論理式で $\forall f$: 算術的解釈, $U \vdash f_\tau(A)\}$.
集合 $\mathrm{PL}_\tau(U)$ をメタ理論 U における $\tau(v)$ の証明可能性論理という．

- $\mathrm{PL}_\tau(U)$ は $\mathrm{Pr}_\tau(x)$ に関して U において証明できる原理の集合
- $\mathrm{PL}_\tau(U)$ はどんな様相論理か？

証明可能性論理

定義（証明可能性論理）

U を任意の理論，$\tau(v)$ を T の Σ_1 定義とする．
$\mathsf{PL}_\tau(U) := \{A \mid A$ は様相論理式で $\forall f$: 算術的解釈, $U \vdash f_\tau(A)\}$.
集合 $\mathsf{PL}_\tau(U)$ をメタ理論 U における $\tau(v)$ の証明可能性論理という．

- $\mathsf{PL}_\tau(U)$ は $\mathsf{Pr}_\tau(x)$ に関して U において証明できる原理の集合
- $\mathsf{PL}_\tau(U)$ はどんな様相論理か？

証明可能性論理

定義（証明可能性論理）

U を任意の理論，$\tau(v)$ を T の Σ_1 定義とする．
$\mathsf{PL}_\tau(U) := \{A \mid A$ は様相論理式で $\forall f$: 算術的解釈, $U \vdash f_\tau(A)\}$.
集合 $\mathsf{PL}_\tau(U)$ をメタ理論 U における $\tau(v)$ の**証明可能性論理**という．

- $\mathsf{PL}_\tau(U)$ は $\mathsf{Pr}_\tau(x)$ に関して U において証明できる原理の集合
- $\mathsf{PL}_\tau(U)$ はどんな様相論理か？

証明可能性論理

定義（証明可能性論理）

U を任意の理論，$\tau(v)$ を T の Σ_1 定義とする．
$\mathsf{PL}_\tau(U) := \{A \mid A$ は様相論理式で $\forall f$: 算術的解釈, $U \vdash f_\tau(A)\}$.
集合 $\mathsf{PL}_\tau(U)$ をメタ理論 U における $\tau(v)$ の証明可能性論理という．

- $\mathsf{PL}_\tau(U)$ は $\mathsf{Pr}_\tau(x)$ に関して U において証明できる原理の集合
- $\mathsf{PL}_\tau(U)$ はどんな様相論理か？

証明可能性論理

定義（証明可能性論理）

U を任意の理論，$\tau(v)$ を T の Σ_1 定義とする．
$\mathsf{PL}_\tau(U) := \{A \mid A$ は様相論理式で $\forall f$: 算術的解釈, $U \vdash f_\tau(A)\}$.
集合 $\mathsf{PL}_\tau(U)$ をメタ理論 U における $\tau(v)$ の証明可能性論理という．

- $\mathsf{PL}_\tau(U)$ は $\mathsf{Pr}_\tau(x)$ に関して U において証明できる原理の集合
- $\mathsf{PL}_\tau(U)$ はどんな様相論理か？

様相論理 GL

定義（様相論理 GL）

GL の公理：

- 全ての恒真式,
- $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$,
- $\Box(\Box p \to p) \to \Box p$.

GL の推論規則：

モダス・ポネンス $\dfrac{A, \; A \to B}{B}$, ネセシテーション $\dfrac{A}{\Box A}$, 代入則.

事実（算術的健全性）

任意のメタ理論 U と, T の Σ_1 定義 $\tau(v)$ について, GL $\subseteq$ PL$_\tau(U)$.

様相論理 GL

定義（様相論理 GL）

GL の公理：

- 全ての恒真式,
- $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$,
- $\Box(\Box p \to p) \to \Box p$.

GL の推論規則：

モダス・ポネンス $\dfrac{A, \ A \to B}{B}$, ネセシテーション $\dfrac{A}{\Box A}$, 代入則.

事実（算術的健全性）

任意のメタ理論 U と, T の Σ_1 定義 $\tau(v)$ について, $\mathbf{GL} \subseteq \mathbf{PL}_\tau(U)$.

GL の拡大論理

定義（様相論理 GLX）

X を様相論理式の集合とする．
GLX を，GL の全ての定理と X の元を公理としてもち，モダス・ポネンスと代入則を推論規則としてもつ論理とする．

定義（GL の拡大論理）

各 $n \in \omega$ について，F_n を様相論理式 $\Box^{n+1}\bot \to \Box^n\bot$ とする．
$\alpha, \beta \subseteq \omega$，ただし β は補有限とする．

- $\mathsf{GL}_\alpha = \mathsf{GL}\{F_n : n \in \alpha\}$
- $\mathsf{GL}_\beta^- = \mathsf{GL}\{\bigvee_{n \notin \beta} \neg F_n\}$
- $\mathsf{D} = \mathsf{GL}\{\Box(\Box p \lor \Box q) \to (\Box p \lor \Box q)\}$
- $\mathsf{S} = \mathsf{GL}\{\Box p \to p\}$
- $\mathsf{D}_\beta = \mathsf{D} \cap \mathsf{GL}_\beta^-$
- $\mathsf{S}_\beta = \mathsf{S} \cap \mathsf{GL}_\beta^-$

GL の拡大論理

定義（様相論理 GLX）

X を様相論理式の集合とする．
GLX を，GL の全ての定理と X の元を公理としてもち，モダス・ポネンスと代入則を推論規則としてもつ論理とする．

定義（GL の拡大論理）

各 $n \in \omega$ について，F_n を様相論理式 $\Box^{n+1}\bot \to \Box^n\bot$ とする．
$\alpha, \beta \subseteq \omega$, ただし β は補有限とする．

- $\mathsf{GL}_\alpha = \mathsf{GL}\{F_n : n \in \alpha\}$
- $\mathsf{GL}_\beta^- = \mathsf{GL}\{\bigvee_{n \notin \beta} \neg F_n\}$
- $\mathsf{D} = \mathsf{GL}\{\Box(\Box p \vee \Box q) \to (\Box p \vee \Box q)\}$
- $\mathsf{S} = \mathsf{GL}\{\Box p \to p\}$
- $\mathsf{D}_\beta = \mathsf{D} \cap \mathsf{GL}_\beta^-$
- $\mathsf{S}_\beta = \mathsf{S} \cap \mathsf{GL}_\beta^-$

GL の拡大論理

定義（様相論理 GLX）

X を様相論理式の集合とする.
GLX を，GL の全ての定理と X の元を公理としてもち，モダス・ポネンスと代入則を推論規則としてもつ論理とする.

定義（GL の拡大論理）

各 $n \in \omega$ について，F_n を様相論理式 $\Box^{n+1}\bot \to \Box^n\bot$ とする.
$\alpha, \beta \subseteq \omega$，ただし β は補有限とする.

- $\mathsf{GL}_\alpha = \mathsf{GL}\{F_n : n \in \alpha\}$
- $\mathsf{GL}_\beta^- = \mathsf{GL}\{\bigvee_{n \notin \beta} \neg F_n\}$
- $\mathsf{D} = \mathsf{GL}\{\Box(\Box p \lor \Box q) \to (\Box p \lor \Box q)\}$
- $\mathsf{S} = \mathsf{GL}\{\Box p \to p\}$
- $\mathsf{D}_\beta = \mathsf{D} \cap \mathsf{GL}_\beta^-$
- $\mathsf{S}_\beta = \mathsf{S} \cap \mathsf{GL}_\beta^-$

GL の拡大論理

定義（様相論理 GLX）

X を様相論理式の集合とする．
GLX を，GL の全ての定理と X の元を公理としてもち，モダス・ポネンスと代入則を推論規則としてもつ論理とする．

定義（GL の拡大論理）

各 $n \in \omega$ について，F_n を様相論理式 $\Box^{n+1}\bot \to \Box^n\bot$ とする．
$\alpha, \beta \subseteq \omega$, ただし β は補有限とする．

- $\mathsf{GL}_\alpha = \mathsf{GL}\{F_n : n \in \alpha\}$
- $\mathsf{GL}_\beta^- = \mathsf{GL}\{\bigvee_{n \notin \beta} \neg F_n\}$
- $\mathsf{D} = \mathsf{GL}\{\Box(\Box p \lor \Box q) \to (\Box p \lor \Box q)\}$
- $\mathsf{S} = \mathsf{GL}\{\Box p \to p\}$
- $\mathsf{D}_\beta = \mathsf{D} \cap \mathsf{GL}_\beta^-$
- $\mathsf{S}_\beta = \mathsf{S} \cap \mathsf{GL}_\beta^-$

Solovay の定理と分類定理

算術的完全性定理 (Solovay, 1976)

$\tau(v)$ を T の Σ_1 定義とする.

- T が Σ_1-健全ならば $\mathsf{PL}_\tau(T) = \mathsf{GL}$.
- T が健全ならば $\mathsf{PL}_\tau(\mathsf{TA}) = \mathsf{S}$,

ここで $\mathsf{TA} = \{\varphi : \mathbb{N} \models \varphi\}$.

分類定理 (Artemov - Visser - Japaridze - Beklemishev, 1980–1989)

U を任意のメタ理論, $\tau(v)$ を T の Σ_1 定義とすると,
$\mathsf{PL}_\tau(U)$ は GL_α, D_β, S_β, GL_β^- のいずれかと一致する.

Solovay の定理と分類定理

算術的完全性定理 (Solovay, 1976)

$\tau(v)$ を T の Σ_1 定義とする．

- T が Σ_1-健全ならば $\mathsf{PL}_\tau(T) = \mathsf{GL}$.
- T が健全ならば $\mathsf{PL}_\tau(\mathsf{TA}) = \mathsf{S}$,

ここで $\mathsf{TA} = \{\varphi : \mathbb{N} \models \varphi\}$.

分類定理 (Artemov - Visser - Japaridze - Beklemishev, 1980–1989)

U を任意のメタ理論，$\tau(v)$ を T の Σ_1 定義とすると，
$\mathsf{PL}_\tau(U)$ は GL_α, D_β, S_β, GL_β^- のいずれかと一致する．

理論の分解再び

Solovay の定理より $\mathsf{PL}_{\mathrm{PA}}(\mathrm{PA}) = \mathsf{GL}$.

定理（Kreisel and Lévy, 1968）

PA と $I\Sigma_1 + \mathsf{RFN}(I\Sigma_1)$ は同値.

- $\mathsf{PL}_{I\Sigma_1}(\mathrm{PA}) = \mathsf{S}$.

定理（Jeroslow, 1971）

$I\Sigma_1$ のある拡大理論 T が存在して，PA と $T + \mathsf{Con}(T)$ は同値.

- $\mathsf{PL}_T(\mathrm{PA}) = \mathsf{GL}_\alpha$ ただし $\alpha = \{0\}$.

問題

メタ理論 U を固定して Σ_1 定義 $\tau(v)$ を動かしたときに，$\mathsf{PL}_\tau(U)$ はどんな論理となりうるか？

理論の分解再び

Solovay の定理より $\mathsf{PL}_{\mathrm{PA}}(\mathrm{PA}) = \mathsf{GL}$.

定理（Kreisel and Lévy, 1968）

PA と $I\Sigma_1 + \mathsf{RFN}(I\Sigma_1)$ は同値.

- $\mathsf{PL}_{I\Sigma_1}(\mathrm{PA}) = \mathsf{S}$.

定理（Jeroslow, 1971）

$I\Sigma_1$ のある拡大理論 T が存在して，PA と $T + \mathsf{Con}(T)$ は同値.

- $\mathsf{PL}_T(\mathrm{PA}) = \mathsf{GL}_\alpha$ ただし $\alpha = \{0\}$.

問題

メタ理論 U を固定して Σ_1 定義 $\tau(v)$ を動かしたときに，
$\mathsf{PL}_\tau(U)$ はどんな論理となりうるか？

理論の分解再び

Solovay の定理より $\mathbf{PL}_{\mathrm{PA}}(\mathrm{PA}) = \mathbf{GL}$.

定理（Kreisel and Lévy, 1968）

PA と $I\Sigma_1 + \mathsf{RFN}(I\Sigma_1)$ は同値.

- $\mathbf{PL}_{I\Sigma_1}(\mathrm{PA}) = \mathbf{S}$.

定理（Jeroslow, 1971）

$I\Sigma_1$ のある拡大理論 T が存在して，PA と $T + \mathsf{Con}(T)$ は同値.

- $\mathbf{PL}_T(\mathrm{PA}) = \mathbf{GL}_\alpha$ ただし $\alpha = \{0\}$.

問題

メタ理論 U を固定して Σ_1 定義 $\tau(v)$ を動かしたときに，
$\mathbf{PL}_\tau(U)$ はどんな論理となりうるか？

理論の分解再び

Solovay の定理より $\mathsf{PL}_{\mathrm{PA}}(\mathrm{PA}) = \mathsf{GL}$.

定理（Kreisel and Lévy, 1968）

PA と $I\Sigma_1 + \mathsf{RFN}(I\Sigma_1)$ は同値.

- $\mathsf{PL}_{I\Sigma_1}(\mathrm{PA}) = \mathsf{S}$.

定理（Jeroslow, 1971）

$I\Sigma_1$ のある拡大理論 T が存在して，PA と $T + \mathsf{Con}(T)$ は同値.

- $\mathsf{PL}_T(\mathrm{PA}) = \mathsf{GL}_\alpha$ ただし $\alpha = \{0\}$.

問題

メタ理論 U を固定して Σ_1 定義 $\tau(v)$ を動かしたときに，
$\mathsf{PL}_\tau(U)$ はどんな論理となりうるか？

1. 準備
2. 証明可能性論理
3. 結果

分析

問題（再掲）

メタ理論 U を固定して Σ_1 定義 $\tau(v)$ を動かしたときに，
$\mathsf{PL}_\tau(U)$ はどんな論理となりうるか？

- 分類定理より候補は $\mathsf{GL}_\alpha, \mathsf{D}_\beta, \mathsf{S}_\beta, \mathsf{GL}_\beta^-$ （$\alpha, \beta \subseteq \omega$, β は補有限）
- 今回はメタ理論 U を PA の r.e. 拡大理論に制限して議論．
- このとき $\mathsf{PL}_\tau(U) = \mathsf{GL}_\alpha$ ならば α は r.e. となる．

分析

問題（再掲）

メタ理論 U を固定して Σ_1 定義 $\tau(v)$ を動かしたときに，
$\mathbf{PL}_\tau(U)$ はどんな論理となりうるか？

- 分類定理より候補は $\mathbf{GL}_\alpha, \mathbf{D}_\beta, \mathbf{S}_\beta, \mathbf{GL}_\beta^-$ （$\alpha, \beta \subseteq \omega$, β は補有限）
- 今回はメタ理論 U を PA の r.e. 拡大理論に制限して議論.
- このとき $\mathbf{PL}_\tau(U) = \mathbf{GL}_\alpha$ ならば α は r.e. となる.

分析

問題（再掲）

メタ理論 U を固定して Σ_1 定義 $\tau(v)$ を動かしたときに，
$\mathbf{PL}_\tau(U)$ はどんな論理となりうるか？

- 分類定理より候補は $\mathbf{GL}_\alpha, \mathbf{D}_\beta, \mathbf{S}_\beta, \mathbf{GL}_\beta^-$ （$\alpha, \beta \subseteq \omega$, β は補有限）
- 今回はメタ理論 U を PA の r.e. 拡大理論に制限して議論.
- このとき $\mathbf{PL}_\tau(U) = \mathbf{GL}_\alpha$ ならば α は r.e. となる.

分析

問題（再掲）

メタ理論 U を固定して Σ_1 定義 $\tau(v)$ を動かしたときに,
$\mathsf{PL}_\tau(U)$ はどんな論理となりうるか？

- 分類定理より候補は $\mathsf{GL}_\alpha, \mathsf{D}_\beta, \mathsf{S}_\beta, \mathsf{GL}_\beta^-$ （$\alpha, \beta \subseteq \omega$, β は補有限）
- 今回はメタ理論 U を PA の r.e. 拡大理論に制限して議論.
- このとき $\mathsf{PL}_\tau(U) = \mathsf{GL}_\alpha$ ならば α は r.e. となる.

結果

定理（K.）

U を PA の r.e. 無矛盾拡大理論とする．
$\alpha \subseteq \omega$ を r.e.，$\beta \subseteq \omega$ を補有限とする．
L を GL_α, D_β, S_β, GL_β^- のいずれかとすると，
$I\Sigma_1$ のある拡大理論の Σ_1 定義 $\tau(v)$ が存在して，$\mathsf{PL}_\tau(U) = L$ となる．

証明には Jeroslow の分解の手法を用いた．例えば

命題

$I\Sigma_1$ のある拡大理論 T の Σ_1 定義 $\tau(v)$ があって $U = T + \mathsf{RFN}_{\Sigma_1}(\tau)$．
このとき $\mathsf{PL}_\tau(U) = \mathsf{D}$．

結果

定理（K.）

U を PA の r.e. 無矛盾拡大理論とする．
$\alpha \subseteq \omega$ を r.e.，$\beta \subseteq \omega$ を補有限とする．
L を GL_α, D_β, S_β, GL_β^- のいずれかとすると，
$I\Sigma_1$ のある拡大理論の Σ_1 定義 $\tau(v)$ が存在して，$\mathsf{PL}_\tau(U) = L$ となる．

証明には Jeroslow の分解の手法を用いた．例えば

命題

$I\Sigma_1$ のある拡大理論 T の Σ_1 定義 $\tau(v)$ があって $U = T + \mathsf{RFN}_{\Sigma_1}(\tau)$.
このとき $\mathsf{PL}_\tau(U) = \mathsf{D}$.

今後の課題と参考文献

今後の課題

1. U は PA の r.e. 拡大，という条件を弱めるとどうなる？
2. 理論はどのような分解が可能か？

参考文献

- **Beklemishev, On the classification of propositional provability logics,** *Izvestiya Akademii Nauk SSSR.*, **1989.**
- **Jeroslow, Consistency statements in formal theories,** *Fundamenta Mathematicae*, **1971.**
- **K., Provability logics relative to a fixed extension of Peano Arithmetic, 投稿中.**