

様相論理 KD の算術的完全性

倉橋太志
木更津工業高等専門学校

日本数学会 2018 年度秋季総合分科会
岡山大学
2018 年 9 月 26 日

アウトライン

- ① 証明可能性述語と証明可能性論理
- ② 標準的でない証明可能性述語と KD
- ③ 得られた結果

アウトライン

- ① 証明可能性述語と証明可能性論理
- ② 標準的でない証明可能性述語と KD
- ③ 得られた結果

証明可能性述語

T : PA の無矛盾かつ再帰的な拡大理論

証明可能性述語

T : PA の無矛盾かつ再帰的な拡大理論

証明可能性述語

論理式 $\text{Pr}_T(x)$ は T の 証明可能性述語

$\stackrel{\text{def.}}{\iff}$ 任意の論理式 φ について $T \vdash \varphi \iff \text{PA} \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$.

証明可能性述語

T : PA の無矛盾かつ再帰的な拡大理論

証明可能性述語

論理式 $\text{Pr}_T(x)$ は T の 証明可能性述語

$\stackrel{\text{def.}}{\iff}$ 任意の論理式 φ について $T \vdash \varphi \iff \text{PA} \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$.

標準的な証明可能性述語

- $\text{Proof}_T(x, y)$ を
 “ y は x の T における証明 (のコード) である”
 という意味内容をもつ Δ_1 論理式とする.

証明可能性述語

T : PA の無矛盾かつ再帰的な拡大理論

証明可能性述語

論理式 $\text{Pr}_T(x)$ は T の 証明可能性述語

$\stackrel{\text{def.}}{\iff}$ 任意の論理式 φ について $T \vdash \varphi \iff \text{PA} \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$.

標準的な証明可能性述語

- $\text{Proof}_T(x, y)$ を
“ y は x の T における証明 (のコード) である”
という意味内容をもつ Δ_1 論理式とする.
- $\text{Prov}_T(x) \equiv \exists y \text{Proof}_T(x, y)$
を T の 標準的な証明可能性述語 という.

証明可能性述語

T : PA の無矛盾かつ再帰的な拡大理論

証明可能性述語

論理式 $\text{Pr}_T(x)$ は T の 証明可能性述語

$\stackrel{\text{def.}}{\iff}$ 任意の論理式 φ について $T \vdash \varphi \iff \text{PA} \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$.

標準的な証明可能性述語

- $\text{Proof}_T(x, y)$ を
“ y は x の T における証明 (のコード) である”
という意味内容をもつ Δ_1 論理式とする.
- $\text{Prov}_T(x) \equiv \exists y \text{Proof}_T(x, y)$
を T の標準的な証明可能性述語という.

$\text{Prov}_T(x)$ は T の Σ_1 証明可能性述語.

標準的な証明可能性述語の性質

事実

• (Derivability conditions)

$$PA \vdash \text{Prov}_T(\ulcorner \varphi \rightarrow \psi \urcorner) \rightarrow (\text{Prov}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Prov}_T(\ulcorner \psi \urcorner)).$$
$$PA \vdash \text{Prov}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Prov}_T(\ulcorner \text{Prov}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \urcorner).$$

標準的な証明可能性述語の性質

事実

• (Derivability conditions)

$$PA \vdash \text{Prov}_T(\ulcorner \varphi \rightarrow \psi \urcorner) \rightarrow (\text{Prov}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Prov}_T(\ulcorner \psi \urcorner)).$$
$$PA \vdash \text{Prov}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Prov}_T(\ulcorner \text{Prov}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \urcorner).$$

• (第二不完全性定理)

$$T \not\vdash \neg \text{Prov}_T(\ulcorner 0 = 1 \urcorner).$$

標準的な証明可能性述語の性質

事実

● (Derivability conditions)

$$PA \vdash \text{Prov}_T(\ulcorner \varphi \rightarrow \psi \urcorner) \rightarrow (\text{Prov}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Prov}_T(\ulcorner \psi \urcorner)).$$
$$PA \vdash \text{Prov}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Prov}_T(\ulcorner \text{Prov}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \urcorner).$$

● (第二不完全性定理)

$$T \not\vdash \neg \text{Prov}_T(\ulcorner 0 = 1 \urcorner).$$

● (Löb の定理)

$$PA \vdash \text{Prov}_T(\ulcorner \text{Prov}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Prov}_T(\ulcorner \varphi \urcorner).$$

標準的な証明可能性述語の性質

事実

- (Derivability conditions)

$$PA \vdash \text{Prov}_T(\ulcorner \varphi \rightarrow \psi \urcorner) \rightarrow (\text{Prov}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Prov}_T(\ulcorner \psi \urcorner)).$$

$$PA \vdash \text{Prov}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Prov}_T(\ulcorner \text{Prov}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \urcorner).$$

- (第二不完全性定理)

$$T \not\vdash \neg \text{Prov}_T(\ulcorner 0 = 1 \urcorner).$$

- (Löb の定理)

$$PA \vdash \text{Prov}_T(\ulcorner \text{Prov}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Prov}_T(\ulcorner \varphi \urcorner).$$

‘証明可能性論理’ は証明可能性述語のもつこれらの性質を、様相論理を用いて分析する研究領域。

算術的解釈と証明可能性論理

様相論理と算術を結び付ける.

算術的解釈と証明可能性論理

様相論理と算術を結び付ける.

$\text{Pr}_T(x)$: T の証明可能性述語

算術的解釈と証明可能性論理

様相論理と算術を結び付ける.

$\text{Pr}_T(x)$: T の証明可能性述語

算術的解釈

様相論理式全体の集合から算術の文の集合への写像 f が $\text{Pr}_T(x)$ に基づく算術的解釈

$\stackrel{\text{def.}}{\iff}$

- $f(\perp)$ は $0 = 1$.
- $f(A \wedge B)$ は $f(A) \wedge f(B)$.
- ...
- $f(\Box A)$ は $\text{Pr}_T(\ulcorner f(A) \urcorner)$.

算術的解釈と証明可能性論理

様相論理と算術を結び付ける.

$\text{Pr}_T(x)$: T の証明可能性述語

算術的解釈

様相論理式全体の集合から算術の文の集合への写像 f が $\text{Pr}_T(x)$ に基づく算術的解釈

$\stackrel{\text{def.}}{\iff}$

- $f(\perp)$ は $0 = 1$.
- $f(A \wedge B)$ は $f(A) \wedge f(B)$.
- ...
- $f(\Box A)$ は $\text{Pr}_T(\ulcorner f(A) \urcorner)$.

証明可能性論理

$\text{PL}(\text{Pr}_T) = \{A \mid A \text{ は様相論理式で } \forall f: \text{Pr}_T(x) \text{ に基づく算術的解釈, } T \vdash f(A)\}$

算術的解釈と証明可能性論理

様相論理と算術を結び付ける.

$\text{Pr}_T(x)$: T の証明可能性述語

算術的解釈

様相論理式全体の集合から算術の文の集合への写像 f が $\text{Pr}_T(x)$ に基づく算術的解釈

$\stackrel{\text{def.}}{\iff}$

- $f(\perp)$ は $0 = 1$.
- $f(A \wedge B)$ は $f(A) \wedge f(B)$.
- ...
- $f(\Box A)$ は $\text{Pr}_T(\ulcorner f(A) \urcorner)$.

証明可能性論理

$\text{PL}(\text{Pr}_T) = \{A \mid A \text{ は様相論理式で } \forall f: \text{Pr}_T(x) \text{ に基づく算術的解釈, } T \vdash f(A)\}$
を $\text{Pr}_T(x)$ の証明可能性論理という.

算術的解釈と証明可能性論理

様相論理と算術を結び付ける.

$\text{Pr}_T(x)$: T の証明可能性述語

算術的解釈

様相論理式全体の集合から算術の文の集合への写像 f が $\text{Pr}_T(x)$ に基づく算術的解釈

$\stackrel{\text{def.}}{\iff}$

- $f(\perp)$ は $0 = 1$.
- $f(A \wedge B)$ は $f(A) \wedge f(B)$.
- ...
- $f(\Box A)$ は $\text{Pr}_T(\ulcorner f(A) \urcorner)$.

証明可能性論理

$\text{PL}(\text{Pr}_T) = \{A \mid A \text{ は様相論理式で } \forall f: \text{Pr}_T(x) \text{ に基づく算術的解釈, } T \vdash f(A)\}$
を $\text{Pr}_T(x)$ の証明可能性論理 という.

- $\text{PL}(\text{Pr}_T)$ は $\text{Pr}_T(x)$ に関して T において証明できる原理の集合

算術的解釈と証明可能性論理

様相論理と算術を結び付ける.

$\text{Pr}_T(x)$: T の証明可能性述語

算術的解釈

様相論理式全体の集合から算術の文の集合への写像 f が $\text{Pr}_T(x)$ に基づく算術的解釈

$\stackrel{\text{def.}}{\iff}$

- $f(\perp)$ は $0 = 1$.
- $f(A \wedge B)$ は $f(A) \wedge f(B)$.
- ...
- $f(\Box A)$ は $\text{Pr}_T(\ulcorner f(A) \urcorner)$.

証明可能性論理

$\text{PL}(\text{Pr}_T) = \{A \mid A \text{ は様相論理式で } \forall f: \text{Pr}_T(x) \text{ に基づく算術的解釈, } T \vdash f(A)\}$
を $\text{Pr}_T(x)$ の証明可能性論理 という.

- $\text{PL}(\text{Pr}_T)$ は $\text{Pr}_T(x)$ に関して T において証明できる原理の集合
- $\text{PL}(\text{Pr}_T)$ はどんな様相論理か?

正規様相論理

様相論理 K の公理と推論規則

公理 恒真式と $\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$.

規則 モダス・ポネンス $\frac{A, A \rightarrow B}{B}$, ネセシテーション $\frac{A}{\Box A}$, 代入則.

正規様相論理

様相論理 K の公理と推論規則

公理 恒真式と $\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$.

規則 モダス・ポネンス $\frac{A, A \rightarrow B}{B}$, ネセシテーション $\frac{A}{\Box A}$, 代入則.

いろいろな正規様相論理

様相論理 L が **正規**

$\stackrel{\text{def.}}{\iff} L$ は K を含み, K の3つの規則で閉じている.

正規様相論理

様相論理 K の公理と推論規則

公理 恒真式と $\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$.

規則 モダス・ポネンス $\frac{A, A \rightarrow B}{B}$, ネセシテーション $\frac{A}{\Box A}$, 代入則.

いろいろな正規様相論理

様相論理 L が **正規**

$\stackrel{\text{def.}}{\iff} L$ は K を含み, K の3つの規則で閉じている.

各様相論理式 A に対して, L と A を含む最小の正規様相論理を $L + A$ とかく.

- $KT = K + \Box p \rightarrow p$
- $KD = K + \neg \Box \perp$
- $K4 = K + \Box p \rightarrow \Box \Box p$
- $K5 = K + \Diamond p \rightarrow \Box \Diamond p$
- $KB = K + p \rightarrow \Box \Diamond p$
- $GL = K + \Box(\Box p \rightarrow p) \rightarrow \Box p$
- ...

算術的完全性定理

定理 (Solovay, 1976)

 T が Σ_1 -健全ならば $PL(\text{Prov}_T) = \mathbf{GL}$.

算術的完全性定理

定理 (Solovay, 1976)

 T が Σ_1 -健全ならば $\text{PL}(\text{Prov}_T) = \mathbf{GL}$.

定理 (K., 2018)

 $\text{PL}(\text{Pr}_T) = \mathbf{K}$ となる T の Σ_2 証明可能性述語 $\text{Pr}_T(x)$ がある.

算術的完全性定理

定理 (Solovay, 1976)

T が Σ_1 -健全ならば $\text{PL}(\text{Prov}_T) = \mathbf{GL}$.

定理 (K., 2018)

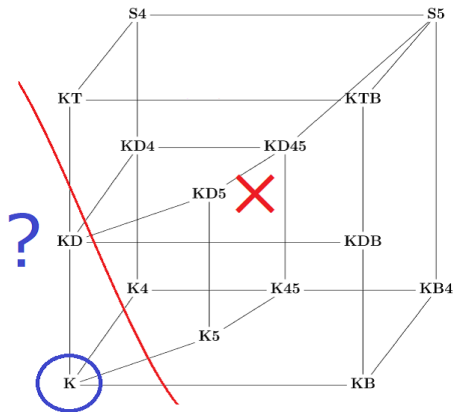
$\text{PL}(\text{Pr}_T) = \mathbf{K}$ となる T の Σ_2 証明可能性述語 $\text{Pr}_T(x)$ がある.

一方, 多くの正規様相論理が証明可能性論理になりえない.

命題 (K.)

L を次の条件の少なくとも一つを満たす正規様相論理とすると, $L = \text{PL}(\text{Pr}_T)$ となる T の証明可能性述語 $\text{Pr}_T(x)$ はない:

- ① $\mathbf{KT} \subseteq L$.
- ② $\mathbf{K4} \subseteq L$ かつ $\mathbf{GL} \not\subseteq L$.
- ③ $\mathbf{K5} \subseteq L$.
- ④ $\mathbf{KB} \subseteq L$.



- KD は？

アウトライン

- ① 証明可能性述語と証明可能性論理
- ② 標準的でない証明可能性述語と **KD**
- ③ 得られた結果

標準的でない証明可能性述語と KD

$$KD = K + \neg\Box\perp$$

$KD \subseteq PL(\text{Pr}_T)$ ならば $\text{Pr}_T(x)$ について第二不完全性定理が成立しない.

標準的でない証明可能性述語と KD

$$KD = K + \neg\Box\perp$$

$KD \subseteq PL(\text{Pr}_T)$ ならば $\text{Pr}_T(x)$ について第二不完全性定理が成立しない.

定理 (Feferman, 1960)

$KD \subseteq PL(\text{Pr}_T^F)$ となる T の Σ_2 証明可能性述語 $\text{Pr}_T^F(x)$ が存在する.

標準的でない証明可能性述語と **KD**

$$\mathbf{KD} = \mathbf{K} + \neg\Box\perp$$

$\mathbf{KD} \subseteq \text{PL}(\text{Pr}_T)$ ならば $\text{Pr}_T(x)$ について第二不完全性定理が成立しない.

定理 (Feferman, 1960)

$\mathbf{KD} \subseteq \text{PL}(\text{Pr}_T^F)$ となる T の Σ_2 証明可能性述語 $\text{Pr}_T^F(x)$ が存在する.

定理 (Shavrukov, 1994)

$\text{PL}(\text{Pr}_T^S) = \mathbf{KD} + (\Box p \rightarrow \Box((\Box q \rightarrow q) \vee \Box p))$ となる T の Σ_2 証明可能性述語 $\text{Pr}_T^S(x)$ が存在する.

$$\text{Pr}_T^S(x) \equiv \exists y (\text{Pr}_{I\Sigma_y}(x) \wedge \text{Con}_{I\Sigma_y})$$

Rosser 証明可能性述語

今回注目したのは **Rosser** 証明可能性述語.

Rosser 証明可能性述語

今回注目したのは **Rosser** 証明可能性述語.

証明述語

論理式 $\text{Prf}_T(x, y)$ が T の証明述語

$\stackrel{\text{def.}}{\iff}$

- ① $\text{Prf}_T(x, y)$ は Δ_1
- ② $\text{PA} \vdash \forall x (\text{Prov}_T(x) \leftrightarrow \exists y \text{Prf}_T(x, y))$
- ③ 任意の自然数 n と論理式 φ について, $\text{PA} \vdash \text{Proof}_T(\ulcorner \varphi \urcorner, \bar{n}) \leftrightarrow \text{Prf}_T(\ulcorner \varphi \urcorner, \bar{n})$
- ④ $\text{PA} \vdash \forall x \forall x' \forall y' (\text{Prf}_T(x, y) \wedge \text{Prf}_T(x', y) \rightarrow x = x')$

Rosser 証明可能性述語

今回注目したのは **Rosser** 証明可能性述語.

証明述語

論理式 $\text{Prf}_T(x, y)$ が T の証明述語

$\stackrel{\text{def.}}{\iff}$

- ① $\text{Prf}_T(x, y)$ は Δ_1
- ② $\text{PA} \vdash \forall x (\text{Prov}_T(x) \leftrightarrow \exists y \text{Prf}_T(x, y))$
- ③ 任意の自然数 n と論理式 φ について, $\text{PA} \vdash \text{Proof}_T(\ulcorner \varphi \urcorner, \bar{n}) \leftrightarrow \text{Prf}_T(\ulcorner \varphi \urcorner, \bar{n})$
- ④ $\text{PA} \vdash \forall x \forall x' \forall y' (\text{Prf}_T(x, y) \wedge \text{Prf}_T(x', y) \rightarrow x = x')$

Rosser 証明可能性述語

T の各証明述語 $\text{Prf}_T(x, y)$ に対して, Σ_1 論理式

$$\exists y (\text{Prf}_T(x, y) \wedge \forall z \leq y \neg \text{Prf}_T(\neg(x), z))$$

を $\text{Prf}_T(x, y)$ の **Rosser** 証明可能性述語という.

Rosser 証明可能性述語

今回注目したのは **Rosser 証明可能性述語**.

証明述語

論理式 $\text{Prf}_T(x, y)$ が T の証明述語

$\stackrel{\text{def.}}{\iff}$

- ① $\text{Prf}_T(x, y)$ は Δ_1
- ② $\text{PA} \vdash \forall x (\text{Prov}_T(x) \leftrightarrow \exists y \text{Prf}_T(x, y))$
- ③ 任意の自然数 n と論理式 φ について, $\text{PA} \vdash \text{Proof}_T(\ulcorner \varphi \urcorner, \bar{n}) \leftrightarrow \text{Prf}_T(\ulcorner \varphi \urcorner, \bar{n})$
- ④ $\text{PA} \vdash \forall x \forall x' \forall y' (\text{Prf}_T(x, y) \wedge \text{Prf}_T(x', y) \rightarrow x = x')$

Rosser 証明可能性述語

T の各証明述語 $\text{Prf}_T(x, y)$ に対して, Σ_1 論理式

$$\exists y (\text{Prf}_T(x, y) \wedge \forall z \leq y \neg \text{Prf}_T(\neg(x), z))$$

を $\text{Prf}_T(x, y)$ の **Rosser 証明可能性述語** という.

Rosser 証明可能性述語は T の Σ_1 証明可能性述語.

Rosser 証明可能性述語と **KD**

事実

$\text{Pr}_T^R(x)$ を Rosser 証明可能性述語とすると, $\text{PA} \vdash \neg \text{Pr}_T^R(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$.

Rosser 証明可能性述語と **KD**

事実

$\text{Pr}_T^R(x)$ を Rosser 証明可能性述語とすると, $\text{PA} \vdash \neg \text{Pr}_T^R(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$.

- しかし, 一般に $\text{PL}(\text{Pr}_T^R)$ が正規様相論理となる, つまり $\mathbf{KD} \subseteq \text{PL}(\text{Pr}_T^R)$ となるとは限らない.

Rosser 証明可能性述語と **KD**

事実

$\text{Pr}_T^R(x)$ を Rosser 証明可能性述語とすると, $\text{PA} \vdash \neg \text{Pr}_T^R(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$.

- しかし, 一般に $\text{PL}(\text{Pr}_T^R)$ が正規様相論理となる, つまり $\mathbf{KD} \subseteq \text{PL}(\text{Pr}_T^R)$ となるとは限らない.
- ただし, うまく証明述語を選ぶことで正規様相論理となるようにできる.

定理 (Arai, 1990)

$\text{PL}(\text{Pr}_T^R)$ が正規様相論理となるような Rosser 証明可能性述語 $\text{Pr}_T^R(x)$ が存在する. このとき $\mathbf{KD} \subseteq \text{PL}(\text{Pr}_T^R)$.

アウトライン

- ① 証明可能性述語と証明可能性論理
- ② 標準的でない証明可能性述語と KD
- ③ 得られた結果

得られた結果

定理 1 (K.)

$PL(\Pr_T^R) = KD$ となる Rosser 証明可能性述語 $\Pr_T^R(x)$ が存在する.

得られた結果

定理 1 (K.)

$PL(\Pr_T^R) = KD$ となる Rosser 証明可能性述語 $\Pr_T^R(x)$ が存在する.

証明可能性論理が KD を真に含むような Rosser 証明可能性述語もある.

定理 2 (K.)

$KD + (\Box p \rightarrow \Box \Diamond p) \subseteq PL(\Pr_T^R)$ となる Rosser 証明可能性述語 $\Pr_T^R(x)$ が存在する.
このとき $KD \subsetneq PL(\Pr_T^R)$.

得られた結果

定理 1 (K.)

$\text{PL}(\text{Pr}_T^R) = \mathbf{KD}$ となる Rosser 証明可能性述語 $\text{Pr}_T^R(x)$ が存在する.

証明可能性論理が $\mathbf{KD}$ を真に含むような Rosser 証明可能性述語もある.

定理 2 (K.)

$\mathbf{KD} + (\Box p \rightarrow \Box \Diamond p) \subseteq \text{PL}(\text{Pr}_T^R)$ となる Rosser 証明可能性述語 $\text{Pr}_T^R(x)$ が存在する.
このとき $\mathbf{KD} \subsetneq \text{PL}(\text{Pr}_T^R)$.

問題

$\text{PL}(\text{Pr}_T^R) = \mathbf{KD} + (\Box p \rightarrow \Box \Diamond p)$ となる Rosser 証明可能性述語 $\text{Pr}_T^R(x)$ はあるか?

得られた結果

定理 1 (K.)

$\text{PL}(\text{Pr}_T^R) = \mathbf{KD}$ となる Rosser 証明可能性述語 $\text{Pr}_T^R(x)$ が存在する。

証明可能性論理が $\mathbf{KD}$ を真に含むような Rosser 証明可能性述語もある。

定理 2 (K.)

$\mathbf{KD} + (\Box p \rightarrow \Box \Diamond p) \subseteq \text{PL}(\text{Pr}_T^R)$ となる Rosser 証明可能性述語 $\text{Pr}_T^R(x)$ が存在する。
このとき $\mathbf{KD} \subsetneq \text{PL}(\text{Pr}_T^R)$ 。

問題

$\text{PL}(\text{Pr}_T^R) = \mathbf{KD} + (\Box p \rightarrow \Box \Diamond p)$ となる Rosser 証明可能性述語 $\text{Pr}_T^R(x)$ はあるか？

問題

どの正規様相論理 L に対して $\text{PL}(\text{Pr}_T) = L$ となる証明可能性述語 $\text{Pr}_T(x)$ があるのか？