

PA を含む算術の部分的な選言特性と存在特性

倉橋 太志（木更津工業高等専門学校）

日本数学会 2017 年度年会
首都大学東京
2017 年 3 月 25 日

Contents

- ① 背景
- ② 選言特性と存在特性
- ③ 結果

- ① 背景
- ② 選言特性と存在特性
- ③ 結果

背景

Gödel-Rosser の第一不完全性定理

PA を含む算術の理論 T が Σ_1 -定義可能かつ無矛盾ならば、 T では証明も反証もできない Σ_1 文が存在する。

Gödel-Rosser の第一不完全性定理の一般化（菊池・倉橋）

PA を含む算術の理論 T が Σ_{n+1} -定義可能かつ Σ_n -健全ならば、 T では証明も反証もできない Σ_{n+1} 文が存在する。

一般化のモチベーション

一般の Σ_{n+1} -定義可能な理論の証明可能性を調べることで、Gödel および Rosser の不完全定理の理解が深まるのでは。

- Σ_{n+1} -定義可能な理論の性質を更に分析したい。
- 今回の研究：部分的な選言特性と存在特性に着目。

背景

Gödel-Rosser の第一不完全性定理

PA を含む算術の理論 T が Σ_1 -定義可能かつ無矛盾ならば,
 T では証明も反証もできない Σ_1 文が存在する.

Gödel-Rosser の第一不完全性定理の一般化 (菊池・倉橋)

PA を含む算術の理論 T が Σ_{n+1} -定義可能かつ Σ_n -健全ならば,
 T では証明も反証もできない Σ_{n+1} 文が存在する.

一般化のモチベーション

一般の Σ_{n+1} -定義可能な理論の証明可能性を調べることで,
Gödel および Rosser の不完全定理の理解が深まるのでは.

- Σ_{n+1} -定義可能な理論の性質を更に分析したい.
- 今回の研究: 部分的な選言特性と存在特性に着目.

背景

Gödel-Rosser の第一不完全性定理

PA を含む算術の理論 T が Σ_1 -定義可能かつ無矛盾ならば、 T では証明も反証もできない Σ_1 文が存在する。

Gödel-Rosser の第一不完全性定理の一般化（菊池・倉橋）

PA を含む算術の理論 T が Σ_{n+1} -定義可能かつ Σ_n -健全ならば、 T では証明も反証もできない Σ_{n+1} 文が存在する。

一般化のモチベーション

一般の Σ_{n+1} -定義可能な理論の証明可能性を調べることで、Gödel および Rosser の不完全定理の理解が深まるのでは。

- Σ_{n+1} -定義可能な理論の性質を更に分析したい。
- 今回の研究：部分的な選言特性と存在特性に着目。

背景

Gödel-Rosser の第一不完全性定理

PA を含む算術の理論 T が Σ_1 -定義可能かつ無矛盾ならば、 T では証明も反証もできない Σ_1 文が存在する。

Gödel-Rosser の第一不完全性定理の一般化（菊池・倉橋）

PA を含む算術の理論 T が Σ_{n+1} -定義可能かつ Σ_n -健全ならば、 T では証明も反証もできない Σ_{n+1} 文が存在する。

一般化のモチベーション

一般の Σ_{n+1} -定義可能な理論の証明可能性を調べることで、Gödel および Rosser の不完全定理の理解が深まるのでは。

- Σ_{n+1} -定義可能な理論の性質を更に分析したい。
- 今回の研究：部分的な選言特性と存在特性に着目。

背景

Gödel-Rosser の第一不完全性定理

PA を含む算術の理論 T が Σ_1 -定義可能かつ無矛盾ならば、 T では証明も反証もできない Σ_1 文が存在する。

Gödel-Rosser の第一不完全性定理の一般化（菊池・倉橋）

PA を含む算術の理論 T が Σ_{n+1} -定義可能かつ Σ_n -健全ならば、 T では証明も反証もできない Σ_{n+1} 文が存在する。

一般化のモチベーション

一般の Σ_{n+1} -定義可能な理論の証明可能性を調べることで、Gödel および Rosser の不完全定理の理解が深まるのでは。

- Σ_{n+1} -定義可能な理論の性質を更に分析したい。
- 今回の研究：部分的な選言特性と存在特性に着目。

- ① 背景
- ② 選言特性と存在特性
- ③ 結果

選言特性と存在特性

選言特性

理論 T が選言特性 (disjunction property) をもつ

$\stackrel{\text{def}}{\iff}$ 任意の文 φ, ψ について,
 $T \vdash \varphi \vee \psi$ ならば $T \vdash \varphi$ または $T \vdash \psi$.

存在特性

理論 T が (numerical な) 存在特性 (existence property) をもつ

$\stackrel{\text{def}}{\iff}$ 任意の 1 変数論理式 $\varphi(x)$ について,
 $T \vdash \exists x \varphi(x)$ ならば $\exists n$: 自然数 s.t. $T \vdash \varphi(\bar{n})$.

選言特性と存在特性

選言特性

理論 T が選言特性 (disjunction property) をもつ

$\stackrel{\text{def}}{\iff}$ 任意の文 φ, ψ について,
 $T \vdash \varphi \vee \psi$ ならば $T \vdash \varphi$ または $T \vdash \psi$.

存在特性

理論 T が (numerical な) 存在特性 (existence property) をもつ

$\stackrel{\text{def}}{\iff}$ 任意の 1 変数論理式 $\varphi(x)$ について,
 $T \vdash \exists x \varphi(x)$ ならば $\exists n$: 自然数 s.t. $T \vdash \varphi(\bar{n})$.

ハイティング算術と選言特性・存在特性

Kleene, 1945

ハイティング算術 **HA** は選言特性と存在特性を持つ.

Friedman, 1975

T を **HA** の Σ_1 -定義可能な無矛盾拡大理論とすると,
 T は選言特性を持つ $\iff T$ は存在特性を持つ.

Myhill, 1973

T を **HA** の Σ_1 -定義可能な無矛盾拡大理論とすると,
 T が選言特性を持つならば, T は「 T が選言特性を持つこと」を証明できない.

ハイティング算術と選言特性・存在特性

Kleene, 1945

ハイティング算術 **HA** は選言特性と存在特性を持つ.

Friedman, 1975

T を **HA** の Σ_1 -定義可能な無矛盾拡大理論とすると,
 T は選言特性を持つ $\iff$ T は存在特性を持つ.

Myhill, 1973

T を **HA** の Σ_1 -定義可能な無矛盾拡大理論とすると,
 T が選言特性を持つならば, T は「 T が選言特性を持つこと」を証明できない.

ハイティング算術と選言特性・存在特性

Kleene, 1945

ハイティング算術 **HA** は選言特性と存在特性を持つ.

Friedman, 1975

T を **HA** の Σ_1 -定義可能な無矛盾拡大理論とすると,
 T は選言特性を持つ $\iff$ T は存在特性を持つ.

Myhill, 1973

T を **HA** の Σ_1 -定義可能な無矛盾拡大理論とすると,
 T が選言特性を持つならば, T は「 T が選言特性を持つこと」を証明できない.

古典論理における選言特性

古典論理における無矛盾な理論 T については、排中律により
 T は選言特性を持つ $\iff T$ は完全.

不完全性定理は、条件を満たす理論が選言特性を持たないことを主張する定理.

Gödel-Rosser の不完全性定理

T を PA の Σ_1 -定義可能な無矛盾拡大理論とすると,
 Σ_1 文 φ が存在して, $T \vdash \varphi \vee \neg\varphi$ かつ $T \not\vdash \varphi$ かつ $T \not\vdash \neg\varphi$.

一方, PA は部分的な選言特性を持つ.

事実

任意の Σ_1 文 φ, ψ について,
 $PA \vdash \varphi \vee \psi$ ならば $PA \vdash \varphi$ または $PA \vdash \psi$.

古典論理における選言特性

古典論理における無矛盾な理論 T については、排中律により
 T は選言特性を持つ $\iff T$ は完全.

不完全性定理は、条件を満たす理論が選言特性を持たないことを主張する定理.

Gödel-Rosser の不完全性定理

T を $\mathbf{PA}$ の Σ_1 -定義可能な無矛盾拡大理論とすると,
 Σ_1 文 φ が存在して, $T \vdash \varphi \vee \neg\varphi$ かつ $T \not\vdash \varphi$ かつ $T \not\vdash \neg\varphi$.

一方, $\mathbf{PA}$ は部分的な選言特性を持つ.

事実

任意の Σ_1 文 φ, ψ について,
 $\mathbf{PA} \vdash \varphi \vee \psi$ ならば $\mathbf{PA} \vdash \varphi$ または $\mathbf{PA} \vdash \psi$.

古典論理における選言特性

古典論理における無矛盾な理論 T については、排中律により
 T は選言特性を持つ $\iff T$ は完全.

不完全性定理は、条件を満たす理論が選言特性を持たないことを主張する定理.

Gödel-Rosser の不完全性定理

T を $\mathbf{PA}$ の Σ_1 -定義可能な無矛盾拡大理論とすると,
 Σ_1 文 φ が存在して, $T \vdash \varphi \vee \neg\varphi$ かつ $T \not\vdash \varphi$ かつ $T \not\vdash \neg\varphi$.

一方, $\mathbf{PA}$ は部分的な選言特性を持つ.

事実

任意の Σ_1 文 φ, ψ について,
 $\mathbf{PA} \vdash \varphi \vee \psi$ ならば $\mathbf{PA} \vdash \varphi$ または $\mathbf{PA} \vdash \psi$.

Γ -DP と Γ -EP

Γ を論理式のクラスとする.

(Γ としては Σ_n, Π_n の他に

Σ_n 論理式のブール結合のクラス $\mathcal{B}(\Sigma_n)$ を考える).

Γ -DP

理論 T が **Γ -選言特性 (Γ -DP)** をもつ

$\stackrel{\text{def}}{\iff}$ 任意の Γ 文 φ, ψ について,
 $T \vdash \varphi \vee \psi$ ならば $T \vdash \varphi$ または $T \vdash \psi$.

Γ -EP

理論 T が **Γ -存在特性 (Γ -EP)** をもつ

$\stackrel{\text{def}}{\iff}$ 任意の 1 変数 Γ 論理式 $\varphi(x)$ について,
 $T \vdash \exists x \varphi(x)$ ならば $\exists n$: 自然数 s.t. $T \vdash \varphi(\bar{n})$.

Γ -comp.

理論 T が **Γ -完全 (Γ -comp.)**

$\stackrel{\text{def}}{\iff}$ 任意の Γ 文 φ について, $\mathbb{N} \models \varphi$ ならば $T \vdash \varphi$.

Γ -DP と Γ -EP

Γ を論理式のクラスとする.

(Γ としては Σ_n , Π_n の他に

Σ_n 論理式のブール結合のクラス $\mathcal{B}(\Sigma_n)$ を考える).

Γ -DP

理論 T が **Γ -選言特性 (Γ -DP)** をもつ

$\stackrel{\text{def}}{\iff}$ 任意の Γ 文 φ, ψ について,
 $T \vdash \varphi \vee \psi$ ならば $T \vdash \varphi$ または $T \vdash \psi$.

Γ -EP

理論 T が **Γ -存在特性 (Γ -EP)** をもつ

$\stackrel{\text{def}}{\iff}$ 任意の 1 変数 Γ 論理式 $\varphi(x)$ について,
 $T \vdash \exists x \varphi(x)$ ならば $\exists n$: 自然数 s.t. $T \vdash \varphi(\bar{n})$.

Γ -comp.

理論 T が **Γ -完全 (Γ -comp.)**

$\stackrel{\text{def}}{\iff}$ 任意の Γ 文 φ について, $\mathbb{N} \models \varphi$ ならば $T \vdash \varphi$.

Γ -DP と Γ -EP

Γ を論理式のクラスとする.

(Γ としては Σ_n, Π_n の他に

Σ_n 論理式のブール結合のクラス $\mathcal{B}(\Sigma_n)$ を考える).

Γ -DP

理論 T が **Γ -選言特性 (Γ -DP)** をもつ

$\stackrel{\text{def}}{\iff}$ 任意の Γ 文 φ, ψ について,
 $T \vdash \varphi \vee \psi$ ならば $T \vdash \varphi$ または $T \vdash \psi$.

Γ -EP

理論 T が **Γ -存在特性 (Γ -EP)** をもつ

$\stackrel{\text{def}}{\iff}$ 任意の 1 変数 Γ 論理式 $\varphi(x)$ について,
 $T \vdash \exists x \varphi(x)$ ならば $\exists n$: 自然数 s.t. $T \vdash \varphi(\bar{n})$.

Γ -comp.

理論 T が **Γ -完全 (Γ -comp.)**

$\stackrel{\text{def}}{\iff}$ 任意の Γ 文 φ について, $\mathbb{N} \models \varphi$ ならば $T \vdash \varphi$.

Γ -DP と Γ -EP

Γ を論理式のクラスとする.

(Γ としては Σ_n, Π_n の他に

Σ_n 論理式のブール結合のクラス $\mathcal{B}(\Sigma_n)$ を考える).

Γ -DP

理論 T が **Γ -選言特性 (Γ -DP)** をもつ

$\stackrel{\text{def}}{\iff}$ 任意の Γ 文 φ, ψ について,
 $T \vdash \varphi \vee \psi$ ならば $T \vdash \varphi$ または $T \vdash \psi$.

Γ -EP

理論 T が **Γ -存在特性 (Γ -EP)** をもつ

$\stackrel{\text{def}}{\iff}$ 任意の 1 変数 Γ 論理式 $\varphi(x)$ について,
 $T \vdash \exists x \varphi(x)$ ならば $\exists n$: 自然数 s.t. $T \vdash \varphi(\bar{n})$.

Γ -comp.

理論 T が **Γ -完全 (Γ -comp.)**

$\stackrel{\text{def}}{\iff}$ 任意の Γ 文 φ について, $\mathbb{N} \models \varphi$ ならば $T \vdash \varphi$.

Σ_1 -定義可能な理論について

第一不完全性定理から、**PA** は **$\mathcal{B}(\Sigma_1)$ -DP** を持たない。

更に

Macintyre and Simmons, 1975

T を **PA** の Σ_1 -定義可能な無矛盾拡大理論とすると、 T は Π_1 -DP を持たない。

Guaspari, 1979

T を **PA** の Σ_1 -定義可能な無矛盾拡大理論とすると、以下は同値：

- ① T は Σ_1 -DP を持つ。
- ② T は Σ_1 -EP を持つ。
- ③ T は Σ_1 -健全。

問

これらの事実は論理式の複雑さの階層を上げていくとどうなるか？

Σ_1 -定義可能な理論について

第一不完全性定理から、 $\mathbf{PA}$ は $\mathcal{B}(\Sigma_1)$ -DP を持たない。
更に

Macintyre and Simmons, 1975

T を $\mathbf{PA}$ の Σ_1 -定義可能な無矛盾拡大理論とすると、 T は Π_1 -DP を持たない。

Guaspari, 1979

T を $\mathbf{PA}$ の Σ_1 -定義可能な無矛盾拡大理論とすると、以下は同値：

- ① T は Σ_1 -DP を持つ。
- ② T は Σ_1 -EP を持つ。
- ③ T は Σ_1 -健全。

問

これらの事実は論理式の複雑さの階層を上げていくとどうなるか？

Σ_1 -定義可能な理論について

第一不完全性定理から、**PA** は $\mathcal{B}(\Sigma_1)$ -DP を持たない。
更に

Macintyre and Simmons, 1975

T を **PA** の Σ_1 -定義可能な無矛盾拡大理論とすると、 T は Π_1 -DP を持たない。

Guaspari, 1979

T を **PA** の Σ_1 -定義可能な無矛盾拡大理論とすると、以下は同値：

- ① T は Σ_1 -DP を持つ。
- ② T は Σ_1 -EP を持つ。
- ③ T は Σ_1 -健全。

問

これらの事実は論理式の複雑さの階層を上げていくとどうなるか？

Σ_1 -定義可能な理論について

第一不完全性定理から、**PA** は $\mathcal{B}(\Sigma_1)$ -DP を持たない。
更に

Macintyre and Simmons, 1975

T を **PA** の Σ_1 -定義可能な無矛盾拡大理論とすると、 T は Π_1 -DP を持たない。

Guaspari, 1979

T を **PA** の Σ_1 -定義可能な無矛盾拡大理論とすると、以下は同値：

- ① T は Σ_1 -DP を持つ。
- ② T は Σ_1 -EP を持つ。
- ③ T は Σ_1 -健全。

問

これらの事実は論理式の複雑さの階層を上げていくとどうなるか？

- ① 背景
- ② 選言特性と存在特性
- ③ 結果

Γ -DP と Γ -EP の一般的な性質

T を **PA** の無矛盾拡大理論とする.

定理 1

以下は同値 :

- ① T は $\mathcal{B}(\Sigma_n)$ -DP を持つ.
- ② 任意の Σ_n 文 φ について, $T \vdash \varphi$ もしくは $T \vdash \neg\varphi$.

定理 2

T は Π_n -DP を持つ $\Rightarrow T$ は Σ_n -DP を持つ.

定理 3

以下は同値 :

- ① T は Σ_n -EP を持つ.
- ② T は Π_{n-1} -EP を持つ.
- ③ T は Σ_n -DP を持ち Σ_n -健全.
- ④ T は Σ_n -完全かつ Σ_n -健全.

Γ -DP と Γ -EP の一般的な性質

T を **PA** の無矛盾拡大理論とする.

定理 1

以下は同値 :

- ① T は $\mathcal{B}(\Sigma_n)$ -DP を持つ.
- ② 任意の Σ_n 文 φ について, $T \vdash \varphi$ もしくは $T \vdash \neg\varphi$.

定理 2

T は Π_n -DP を持つ $\Rightarrow T$ は Σ_n -DP を持つ.

定理 3

以下は同値 :

- ① T は Σ_n -EP を持つ.
- ② T は Π_{n-1} -EP を持つ.
- ③ T は Σ_n -DP を持ち Σ_n -健全.
- ④ T は Σ_n -完全かつ Σ_n -健全.

Γ -DP と Γ -EP の一般的な性質

T を **PA** の無矛盾拡大理論とする.

定理 1

以下は同値 :

- ① T は $\mathcal{B}(\Sigma_n)$ -DP を持つ.
- ② 任意の Σ_n 文 φ について, $T \vdash \varphi$ もしくは $T \vdash \neg\varphi$.

定理 2

T は Π_n -DP を持つ $\Rightarrow T$ は Σ_n -DP を持つ.

定理 3

以下は同値 :

- ① T は Σ_n -EP を持つ.
- ② T は Π_{n-1} -EP を持つ.
- ③ T は Σ_n -DP を持ち Σ_n -健全.
- ④ T は Σ_n -完全かつ Σ_n -健全.

Γ -DP と Γ -EP の一般的な性質

T を **PA** の無矛盾拡大理論とする.

定理 1

以下は同値 :

- ① T は $\mathcal{B}(\Sigma_n)$ -DP を持つ.
- ② 任意の Σ_n 文 φ について, $T \vdash \varphi$ もしくは $T \vdash \neg\varphi$.

定理 2

T は Π_n -DP を持つ $\Rightarrow T$ は Σ_n -DP を持つ.

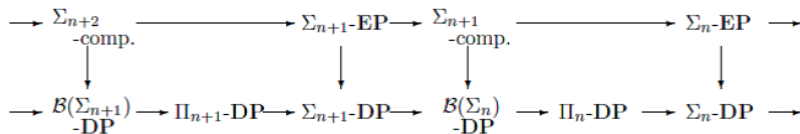
定理 3

以下は同値 :

- ① T は Σ_n -EP を持つ.
- ② T は Π_{n-1} -EP を持つ.
- ③ T は Σ_n -DP を持ち Σ_n -健全.
- ④ T は Σ_n -完全かつ Σ_n -健全.

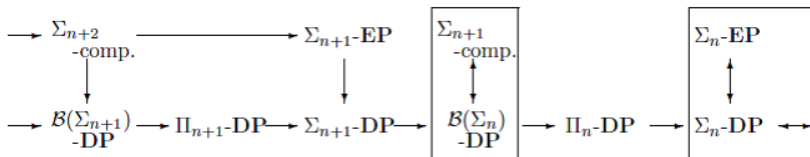
各性質の関係 1

PA の無矛盾拡大理論について.



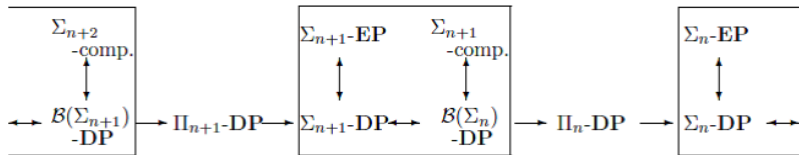
各性質の関係 2

PA の Σ_n -健全な拡大理論について.



各性質の関係 3

PA の健全な拡大理論について.



Σ_{n+1} -定義可能な理論について

T を Σ_{n+1} -定義可能な **PA** の無矛盾拡大理論とする.

菊池・倉橋による Gödel-Rosser の第一不完全性定理の一般化を強められる.

定理 4

T が Σ_n -健全ならば T は Π_{n+1} -DP を持たない.

Friedman の定理に類似した結果が得られた.

定理 5

T が Σ_n -健全ならば,

T は Σ_{n+1} -DP を持つ $\iff T$ は Σ_{n+1} -EP を持つ.

Myhill の定理に類似した結果も得られた.

定理 6

T が Σ_{n+1} -EP を持つならば,

T は「 T が Σ_{n+1} -DP を持つこと」を証明できない.

Σ_{n+1} -定義可能な理論について

T を Σ_{n+1} -定義可能な **PA** の無矛盾拡大理論とする.

菊池・倉橋による Gödel-Rosser の第一不完全性定理の一般化を強められる.

定理 4

T が Σ_n -健全ならば T は Π_{n+1} -DP を持たない.

Friedman の定理に類似した結果が得られた.

定理 5

T が Σ_n -健全ならば,

T は Σ_{n+1} -DP を持つ $\iff T$ は Σ_{n+1} -EP を持つ.

Myhill の定理に類似した結果も得られた.

定理 6

T が Σ_{n+1} -EP を持つならば,

T は 「 T が Σ_{n+1} -DP を持つこと」 を証明できない.

Σ_{n+1} -定義可能な理論について

T を Σ_{n+1} -定義可能な **PA** の無矛盾拡大理論とする.

菊池・倉橋による Gödel-Rosser の第一不完全性定理の一般化を強められる.

定理 4

T が Σ_n -健全ならば T は Π_{n+1} -DP を持たない.

Friedman の定理に類似した結果が得られた.

定理 5

T が Σ_n -健全ならば,

T は Σ_{n+1} -DP を持つ $\iff T$ は Σ_{n+1} -EP を持つ.

Myhill の定理に類似した結果も得られた.

定理 6

T が Σ_{n+1} -EP を持つならば,

T は 「 T が Σ_{n+1} -DP を持つこと」 を証明できない.

Σ_{n+1} -定義可能な理論について

T を Σ_{n+1} -定義可能な **PA** の無矛盾拡大理論とする.

菊池・倉橋による Gödel-Rosser の第一不完全性定理の一般化を強められる.

定理 4

T が Σ_n -健全ならば T は Π_{n+1} -DP を持たない.

Friedman の定理に類似した結果が得られた.

定理 5

T が Σ_n -健全ならば,

T は Σ_{n+1} -DP を持つ $\iff T$ は Σ_{n+1} -EP を持つ.

Myhill の定理に類似した結果も得られた.

定理 6

T が Σ_{n+1} -EP を持つならば,

T は 「 T が Σ_{n+1} -DP を持つこと」 を証明できない.

最後に

菊池・倉橋（第二不完全性定理の一般化）

T が Σ_{n+1} -定義可能かつ Σ_n -健全ならば、
 T は「 T の Σ_n -健全性」を証明できない。

Σ_n -EP $\Rightarrow$ Σ_n -健全 なので

系

T が Σ_{n+1} -定義可能かつ Σ_n -健全ならば、
 T は「 T が Σ_n -EP を持つこと」を証明できない。

これと

定理 6（再掲）

T が Σ_{n+1} -定義可能かつ Σ_{n+1} -EP を持つならば、
 T は「 T が Σ_{n+1} -DP を持つこと」を証明できない。

の関係は？

最後に

菊池・倉橋（第二不完全性定理の一般化）

T が Σ_{n+1} -定義可能かつ Σ_n -健全ならば、
 T は「 T の Σ_n -健全性」を証明できない。

Σ_n -EP $\Rightarrow$ Σ_n -健全 なので

系

T が Σ_{n+1} -定義可能かつ Σ_n -健全ならば、
 T は「 T が Σ_n -EP を持つこと」を証明できない。

これと

定理 6（再掲）

T が Σ_{n+1} -定義可能かつ Σ_{n+1} -EP を持つならば、
 T は「 T が Σ_{n+1} -DP を持つこと」を証明できない。

の関係は？

最後に

菊池・倉橋（第二不完全性定理の一般化）

T が Σ_{n+1} -定義可能かつ Σ_n -健全ならば、
 T は「 T の Σ_n -健全性」を証明できない。

Σ_n -EP $\Rightarrow$ Σ_n -健全 なので

系

T が Σ_{n+1} -定義可能かつ Σ_n -健全ならば、
 T は「 T が Σ_n -EP を持つこと」を証明できない。

これと

定理 6（再掲）

T が Σ_{n+1} -定義可能かつ Σ_{n+1} -EP を持つならば、
 T は「 T が Σ_{n+1} -DP を持つこと」を証明できない。

の関係は？