Sacchetti の論理に対する算術的健全性と完全性

倉橋太志
木更津工業高等専門学校

日本数学会秋季総合分科会
山形大学
2017 年 9 月 14 日

Contents

Numerations

以降 T は PA の再帰的な無矛盾拡大理論とする.

定義

論理式 $\tau(v)$ が T の **numeration**

$:\Longleftrightarrow$ 任意の文 φ に対して $(\varphi \in T \Longleftrightarrow \mathbf{PA} \vdash \tau(\ulcorner \varphi \urcorner))$.

事実

T が r.e. $\Leftrightarrow$ T の Σ_1 numeration が存在する.

Numerations

以降 T は PA の再帰的な無矛盾拡大理論とする.

定義

論理式 $\tau(v)$ が T の **numeration**
$:\Longleftrightarrow$ 任意の文 φ に対して $(\varphi \in T \iff \mathrm{PA} \vdash \tau(\ulcorner \varphi \urcorner))$.

事実

T が r.e. $\Leftrightarrow$ T の Σ_1 numeration が存在する.

証明可能性述語

T の各 numeration $\tau(v)$ に対して，

"x は $\tau(v)$ の定める理論から証明可能"

という内容をもつ論理式 $\mathbf{Pr}_\tau(x)$ を自然に定めることができる．
論理式 $\mathbf{Pr}_\tau(x)$ を $\tau(v)$ の証明可能性述語という．

事実

$\tau(v)$ を T の numeration とする．

- $T \vdash \varphi \Rightarrow \mathbf{PA} \vdash \mathbf{Pr}_\tau(\ulcorner \varphi \urcorner)$.
- $\mathbf{PA} \vdash \mathbf{Pr}_\tau(\ulcorner \varphi \to \psi \urcorner) \to (\mathbf{Pr}_\tau(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathbf{Pr}_\tau(\ulcorner \psi \urcorner))$.
- φ が $\Sigma_1 \Rightarrow \mathbf{PA} \vdash \varphi \to \mathbf{Pr}_\tau(\ulcorner \varphi \urcorner)$.

'証明可能性論理' は証明可能性述語のもつこれらの性質を，様相論理を用いて分析する研究領域．

証明可能性述語

T の各 numeration $\tau(v)$ に対して，

$$\text{“}x \text{ は } \tau(v) \text{ の定める理論から証明可能”}$$

という内容をもつ論理式 $\mathbf{Pr}_\tau(x)$ を自然に定めることができる．
論理式 $\mathbf{Pr}_\tau(x)$ を $\tau(v)$ の証明可能性述語という．

事実

$\tau(v)$ を T の numeration とする．

- $T \vdash \varphi \Rightarrow \mathbf{PA} \vdash \mathbf{Pr}_\tau(\ulcorner \varphi \urcorner)$.
- $\mathbf{PA} \vdash \mathbf{Pr}_\tau(\ulcorner \varphi \to \psi \urcorner) \to (\mathbf{Pr}_\tau(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathbf{Pr}_\tau(\ulcorner \psi \urcorner))$.
- φ が $\Sigma_1 \Rightarrow \mathbf{PA} \vdash \varphi \to \mathbf{Pr}_\tau(\ulcorner \varphi \urcorner)$.

‘証明可能性論理’ は証明可能性述語のもつこれらの性質を，様相論理を用いて分析する研究領域．

様相論理 K と GL

定義

様相論理 **K** は次の公理をもつ：

- 全ての恒真式
- $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$.

K の推論規則は

モダス・ポネンス $\dfrac{A,\ A \to B}{B}$, ネセシテーション $\dfrac{A}{\Box A}$, 代入則.

定義

様相論理 **GL** は **K** に公理 $\Box(\Box p \to p) \to \Box p$ を加えたもの.

様相論理 K と GL

定義

様相論理 K は次の公理をもつ：

- 全ての恒真式
- $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$.

K の推論規則は

モダス・ポネンス $\dfrac{A,\ A \to B}{B}$, ネセシテーション $\dfrac{A}{\Box A}$, 代入則.

定義

様相論理 GL は K に公理 $\Box(\Box p \to p) \to \Box p$ を加えたもの.

様相論理 K と GL

定義

様相論理 **K** は次の公理をもつ：

- 全ての恒真式
- $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$.

K の推論規則は

モダス・ポネンス $\dfrac{A,\ A \to B}{B}$, ネセシテーション $\dfrac{A}{\Box A}$, 代入則.

定義

様相論理 **GL** は **K** に公理 $\Box(\Box p \to p) \to \Box p$ を加えたもの.

算術的解釈

定義

命題変数全体の集合から算術の文の集合への写像 f を**算術的解釈**という.

$\tau(v)$ を T の numeration とする.
各算術的解釈 f は, 次を満たすような, 様相論理式全体の集合から算術の文の集合への写像 f_τ に一意に拡張できる:

- $f_\tau(\bot)$ は $0 = 1$.
- $f_\tau(A \land B)$ は $f_\tau(A) \land f_\tau(B)$.
- $\cdots$
- $f_\tau(\Box A)$ は $\mathrm{Pr}_\tau(\ulcorner f_\tau(A) \urcorner)$.

算術的解釈

定義

命題変数全体の集合から算術の文の集合への写像 f を**算術的解釈**という.

$\tau(v)$ を T の numeration とする.

各算術的解釈 f は，次を満たすような，様相論理式全体の集合から算術の文の集合への写像 f_τ に一意に拡張できる：

- $f_\tau(\bot)$ は $0 = 1$.
- $f_\tau(A \wedge B)$ は $f_\tau(A) \wedge f_\tau(B)$.
- $\cdots$
- $f_\tau(\Box A)$ は $\mathrm{Pr}_\tau(\ulcorner f_\tau(A) \urcorner)$.

算術的解釈

定義

命題変数全体の集合から算術の文の集合への写像 f を**算術的解釈**という.

$\tau(v)$ を T の numeration とする.
各算術的解釈 f は，次を満たすような，様相論理式全体の集合から算術の文の集合への写像 f_τ に一意に拡張できる：

- $f_\tau(\bot)$ は $0 = 1$.
- $f_\tau(A \land B)$ は $f_\tau(A) \land f_\tau(B)$.
- $\cdots$
- $f_\tau(\Box A)$ は $\mathrm{Pr}_\tau(\ulcorner f_\tau(A) \urcorner)$.

証明可能性論理

定義

$\boldsymbol{\tau(v)}$ を $\boldsymbol{T}$ の **numeration** とする.

PL$(\tau) := \{A \mid$ 全ての算術的解釈 f について $T \vdash f_\tau(A)\}$.

集合 **PL**(τ) を $\tau(v)$ の証明可能性論理という.

命題

T の任意の numeration $\tau(v)$ について，**PL**(τ) は正規様相論理である.

すなわち，**PL**(τ) は **K** を含み，**K** の推論規則で閉じている.

事実【再掲】

$\tau(v)$ を T の numeration とする.

- $T \vdash \varphi \Rightarrow \mathrm{PA} \vdash \mathrm{Pr}_\tau(\ulcorner \varphi \urcorner)$.
- $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Pr}_\tau(\ulcorner \varphi \to \psi \urcorner) \to (\mathrm{Pr}_\tau(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathrm{Pr}_\tau(\ulcorner \psi \urcorner))$.
- φ が $\Sigma_1 \Rightarrow \mathrm{PA} \vdash \varphi \to \mathrm{Pr}_\tau(\ulcorner \varphi \urcorner)$.

証明可能性論理

定義

$\tau(v)$ を T の numeration とする.
$\mathsf{PL}(\tau) := \{A \mid$ 全ての算術的解釈 f について $T \vdash f_\tau(A)\}$.
集合 $\mathsf{PL}(\tau)$ を $\tau(v)$ の証明可能性論理という.

命題

T の任意の numeration $\tau(v)$ について，$\mathsf{PL}(\tau)$ は正規様相論理である.
すなわち，$\mathsf{PL}(\tau)$ は K を含み，K の推論規則で閉じている.

事実 【再掲】

$\tau(v)$ を T の numeration とする.

- $T \vdash \varphi \Rightarrow \mathrm{PA} \vdash \mathrm{Pr}_\tau(\ulcorner \varphi \urcorner)$.
- $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Pr}_\tau(\ulcorner \varphi \to \psi \urcorner) \to (\mathrm{Pr}_\tau(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathrm{Pr}_\tau(\ulcorner \psi \urcorner))$.
- φ が $\Sigma_1 \Rightarrow \mathrm{PA} \vdash \varphi \to \mathrm{Pr}_\tau(\ulcorner \varphi \urcorner)$.

証明可能性論理

定義

$\tau(v)$ を T の numeration とする.
$\mathsf{PL}(\tau) := \{A \mid$ 全ての算術的解釈 f について $T \vdash f_\tau(A)\}$.
集合 $\mathsf{PL}(\tau)$ を $\tau(v)$ の証明可能性論理という.

命題

T の任意の numeration $\tau(v)$ について，$\mathsf{PL}(\tau)$ は正規様相論理である.
すなわち，$\mathsf{PL}(\tau)$ は K を含み，K の推論規則で閉じている.

事実 【再掲】

$\tau(v)$ を T の numeration とする.

- $T \vdash \varphi \Rightarrow \mathrm{PA} \vdash \mathrm{Pr}_\tau(\ulcorner \varphi \urcorner)$.
- $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Pr}_\tau(\ulcorner \varphi \to \psi \urcorner) \to (\mathrm{Pr}_\tau(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathrm{Pr}_\tau(\ulcorner \psi \urcorner))$.
- φ が $\Sigma_1 \Rightarrow \mathrm{PA} \vdash \varphi \to \mathrm{Pr}_\tau(\ulcorner \varphi \urcorner)$.

証明可能性論理

定義

$\tau(v)$ を T の numeration とする．
$\mathsf{PL}(\tau) := \{A \mid$ 全ての算術的解釈 f について $T \vdash f_\tau(A)\}$.
集合 $\mathsf{PL}(\tau)$ を $\tau(v)$ の**証明可能性論理**という．

命題

T の任意の numeration $\tau(v)$ について，$\mathsf{PL}(\tau)$ は正規様相論理である．
すなわち，$\mathsf{PL}(\tau)$ は K を含み，K の推論規則で閉じている．

事実 【再掲】

$\tau(v)$ を T の numeration とする．

- $T \vdash \varphi \Rightarrow \mathrm{PA} \vdash \mathrm{Pr}_\tau(\ulcorner \varphi \urcorner)$.
- $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Pr}_\tau(\ulcorner \varphi \to \psi \urcorner) \to (\mathrm{Pr}_\tau(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathrm{Pr}_\tau(\ulcorner \psi \urcorner))$.
- φ が $\Sigma_1 \Rightarrow \mathrm{PA} \vdash \varphi \to \mathrm{Pr}_\tau(\ulcorner \varphi \urcorner)$.

Σ_1 numeration による証明可能性論理

Σ_1-健全な理論の Σ_1 numeration による証明可能性論理が **GL** と一致することが Solovay によって証明された．すなわち，

算術的完全性定理 (Solovay, 1976)

T を Σ_1-健全とすると，
$\{\mathsf{PL}(\tau) \mid \tau(v)$ は T の Σ_1 numeration$\} = \{\mathsf{GL}\}$.

T が Σ_1-健全でない場合も Σ_1 numerations による証明可能性論理の全体は既に知られている．

定理 (Visser, 1984) (Beklemishev, 1989)

T が Σ_1-健全でないとすると，
$$\{\mathsf{PL}(\tau) \mid \tau(v) \text{ は } T \text{ の } \Sigma_1 \text{ numeration}\} = \{\mathsf{GL} + \Box^n \bot \mid n \geq 1\} \cup \{\mathsf{GL}\}.$$

Σ_1 numeration による証明可能性論理

$\mathbf{\Sigma_1}$-健全な理論の $\mathbf{\Sigma_1}$ **numeration** による証明可能性論理が **GL** と一致することが **Solovay** によって証明された．すなわち，

算術的完全性定理 (Solovay, 1976)

T を Σ_1-健全とすると，
$\{\mathsf{PL}(\tau) \mid \tau(v)$ は T の Σ_1 numeration$\} = \{\mathsf{GL}\}$.

T が Σ_1-健全でない場合も $\mathbf{\Sigma_1}$ **numerations** による証明可能性論理の全体は既に知られている．

定理 (Visser, 1984) (Beklemishev, 1989)

T が Σ_1-健全でないとすると，
$\{\mathsf{PL}(\tau) \mid \tau(v)$ は T の Σ_1 numeration$\}$
$$= \{\mathsf{GL} + \Box^n \bot \mid n \geq 1\} \cup \{\mathsf{GL}\}.$$

Σ_1 でない numeration による証明可能性論理

Σ_1 でない **numeration** による証明可能性論理の状況は全くつかめていない．特に次のことが知られているのみ．

定理 (Feferman, 1960)

T の Π_1 **numeration** $\tau(v)$ が存在して，$\neg\Box\bot \in \mathbf{PL}(\tau)$ となる．

定理 (Kurahashi, 2017)

T の Σ_2 **numeration** $\tau(v)$ が存在して，$\mathbf{PL}(\tau) = \mathbf{K}$ となる．

Kurahashi, T., Arithmetical completeness theorem for modal logic K, to appear in *Studia Logica*.

問題

$\{\mathbf{PL}(\tau) \mid \tau(v)$ は T の numeration$\}$ にはどんな正規様相論理が入っている？

Σ_1 でない numeration による証明可能性論理

Σ_1 でない **numeration** による証明可能性論理の状況は全くつかめていない．特に次のことが知られているのみ．

定理 (Feferman, 1960)

T の Π_1 **numeration** $\tau(v)$ が存在して，$\neg\Box\bot \in \mathsf{PL}(\tau)$ となる．

定理 (Kurahashi, 2017)

T の Σ_2 **numeration** $\tau(v)$ が存在して，$\mathsf{PL}(\tau) = \mathsf{K}$ となる．

Kurahashi, T., Arithmetical completeness theorem for modal logic K, to appear in *Studia Logica*.

問題

$\{\mathsf{PL}(\tau) \mid \tau(v)$ は T の numeration$\}$ にはどんな正規様相論理が入っている？

Σ_1 でない numeration による証明可能性論理

Σ_1 でない **numeration** による証明可能性論理の状況は全くつかめていない．特に次のことが知られているのみ．

定理 (Feferman, 1960)

T の Π_1 **numeration** $\tau(v)$ が存在して，$\neg\Box\bot \in \mathbf{PL}(\tau)$ となる．

定理 (Kurahashi, 2017)

T の Σ_2 **numeration** $\tau(v)$ が存在して，$\mathbf{PL}(\tau) = \mathbf{K}$ となる．

Kurahashi, T., Arithmetical completeness theorem for modal logic K, to appear in *Studia Logica*.

問題

$\{\mathbf{PL}(\tau) \mid \tau(v)$ は T の **numeration**$\}$ にはどんな正規様相論理が入っている？

1. 準備
2. 証明可能性論理
3. 結果

Sacchetti の論理

- 今回注目したのは **Sacchetti (2001)** によって導入された論理 $\mathbf{wGL}_n := \mathsf{K} + \Box(\Box^n p \to p) \to \Box p \ (n \geq 2)$.
- これらの論理は **GL** よりも真に弱い.

Sacchetti の問題 (2001)

証明可能性論理が $\mathbf{wGL}_n$ $(n \geq 2)$ と一致するような証明可能性述語は存在するか？

Visser-Beklemishev の結果から，$\mathbf{wGL}_n$ $(n \geq 2)$ は Σ_1 **numeration** による証明可能性論理にはなりえない.

Sacchetti の論理

- 今回注目したのは **Sacchetti (2001)** によって導入された論理 $\mathbf{wGL}_n := \mathbf{K} + \Box(\Box^n p \to p) \to \Box p$ $(n \geq 2)$.
- これらの論理は **GL** よりも真に弱い.

Sacchetti の問題 (2001)

証明可能性論理が $\mathbf{wGL}_n$ $(n \geq 2)$ と一致するような証明可能性述語は存在するか？

Visser-Beklemishev の結果から，$\mathbf{wGL}_n$ $(n \geq 2)$ は Σ_1 **numeration** による証明可能性論理にはなりえない.

Sacchetti の論理

- 今回注目したのは **Sacchetti (2001)** によって導入された論理 $\mathbf{wGL}_n := \mathbf{K} + \Box(\Box^n p \to p) \to \Box p\ (n \geq 2)$.
- これらの論理は **GL** よりも真に弱い.

Sacchetti の問題 (2001)

証明可能性論理が $\mathbf{wGL}_n\ (n \geq 2)$ と一致するような証明可能性述語は存在するか？

Visser-Beklemishev の結果から，$\mathbf{wGL}_n\ (n \geq 2)$ は Σ_1 **numeration** による証明可能性論理にはなりえない.

Sacchetti の論理

- 今回注目したのは **Sacchetti (2001)** によって導入された論理 $\mathbf{wGL}_n := \mathbf{K} + \Box(\Box^n p \to p) \to \Box p \ (n \geq 2)$.
- これらの論理は **GL** よりも真に弱い.

Sacchetti の問題 (2001)

証明可能性論理が $\mathbf{wGL}_n$ $(n \geq 2)$ と一致するような証明可能性述語は存在するか？

Visser-Beklemishev の結果から，$\mathbf{wGL}_n$ $(n \geq 2)$ は Σ_1 **numeration** による証明可能性論理にはなりえない.

結果

Sacchetti の問題に肯定的な解答を与えた.

定理

各 $n \geq 2$ に対して, T のある Σ_2 numeration $\tau(v)$ が存在して,
$\mathsf{PL}(\tau) = \mathsf{wGL}_n$ となる.

- 完全性 $\mathsf{PL}(\tau) \subseteq \mathsf{wGL}_n$ は K の場合と同様にできた.
- 新しいのは健全性 $\mathsf{wGL}_n \subseteq \mathsf{PL}(\tau)$.
  $T \vdash \mathrm{Pr}_\tau(\ulcorner \mathrm{Pr}_\tau^n(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \varphi \urcorner) \to \mathrm{Pr}_\tau(\ulcorner \varphi \urcorner)$ となるように $\tau(v)$ を作る.

系

$\{\mathsf{PL}(\tau) \mid \tau(v)$ は T の Σ_2 numeration$\}$ は無限個の正規様相論理を含む.

結果

Sacchetti の問題に肯定的な解答を与えた.

定理

各 $n \geq 2$ に対して, T のある Σ_2 numeration $\tau(v)$ が存在して, $\mathsf{PL}(\tau) = \mathsf{wGL}_n$ となる.

- 完全性 $\mathsf{PL}(\tau) \subseteq \mathsf{wGL}_n$ は K の場合と同様にできた.
- 新しいのは健全性 $\mathsf{wGL}_n \subseteq \mathsf{PL}(\tau)$.
  $T \vdash \mathrm{Pr}_\tau(\ulcorner \mathrm{Pr}_\tau^n(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \varphi \urcorner) \to \mathrm{Pr}_\tau(\ulcorner \varphi \urcorner)$ となるように $\tau(v)$ を作る.

系

$\{\mathsf{PL}(\tau) \mid \tau(v)$ は T の Σ_2 numeration$\}$ は無限個の正規様相論理を含む.

結果

Sacchetti の問題に肯定的な解答を与えた.

定理

各 $n \geq 2$ に対して, T のある Σ_2 numeration $\tau(v)$ が存在して, $\mathsf{PL}(\tau) = \mathsf{wGL}_n$ となる.

- 完全性 $\mathsf{PL}(\tau) \subseteq \mathsf{wGL}_n$ は K の場合と同様にできた.
- 新しいのは健全性 $\mathsf{wGL}_n \subseteq \mathsf{PL}(\tau)$.
  $T \vdash \mathrm{Pr}_\tau(\ulcorner \mathrm{Pr}_\tau^n(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \varphi \urcorner) \to \mathrm{Pr}_\tau(\ulcorner \varphi \urcorner)$ となるように $\tau(v)$ を作る.

系

$\{\mathsf{PL}(\tau) \mid \tau(v)$ は T の Σ_2 numeration$\}$ は無限個の正規様相論理を含む.

結果

Sacchetti の問題に肯定的な解答を与えた.

定理

各 $n \geq 2$ に対して，T のある Σ_2 numeration $\tau(v)$ が存在して，$\mathbf{PL}(\tau) = \mathbf{wGL}_n$ となる.

- 完全性 $\mathbf{PL}(\tau) \subseteq \mathbf{wGL}_n$ は $\mathbf{K}$ の場合と同様にできた.
- 新しいのは健全性 $\mathbf{wGL}_n \subseteq \mathbf{PL}(\tau)$.
  $T \vdash \mathrm{Pr}_\tau(\ulcorner \mathrm{Pr}_\tau^n(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \varphi \urcorner) \to \mathrm{Pr}_\tau(\ulcorner \varphi \urcorner)$ となるように $\tau(v)$ を作る.

系

$\{\mathbf{PL}(\tau) \mid \tau(v)$ は T の Σ_2 numeration$\}$ は無限個の正規様相論理を含む.

問題

問題

$\{\mathbf{PL}(\tau) : \tau(v)$ は T の numeration$\}$ にはどんな正規様相論理が入るか？
特に $\mathbf{KD} = \mathbf{K} + \neg\Box\bot$ は入るか？

どんな numeration の証明可能性論理にはならない正規様相論理が存在する．

命題

証明可能性論理 $\mathbf{PL}(\tau)$ が次の正規様相論理になるような numeration $\tau(v)$ は存在しない：

- $\mathbf{T} = \mathbf{K} + \Box p \to p$
- $\mathbf{B} = \mathbf{K} + p \to \Box\Diamond p$
- $\mathbf{K4} = \mathbf{K} + \Box p \to \Box\Box p$
- $\mathbf{K5} = \mathbf{K} + \Diamond p \to \Box\Diamond p$

問題

問題

$\{\mathsf{PL}(\tau) : \tau(v)$ は T の numeration$\}$ にはどんな正規様相論理が入るか？
特に $\mathsf{KD} = \mathsf{K} + \neg\Box\bot$ は入るか？

どんな numeration の証明可能性論理にはならない正規様相論理が存在する．

命題

証明可能性論理 $\mathsf{PL}(\tau)$ が次の正規様相論理になるような numeration $\tau(v)$ は存在しない：

- $\mathsf{T} = \mathsf{K} + \Box p \to p$
- $\mathsf{B} = \mathsf{K} + p \to \Box\Diamond p$
- $\mathsf{K4} = \mathsf{K} + \Box p \to \Box\Box p$
- $\mathsf{K5} = \mathsf{K} + \Diamond p \to \Box\Diamond p$