

第一不完全性定理の拡張と一般化について

倉橋太志

木更津工業高等専門学校

日本数学会秋季総合分科会

山形大学

2017 年 9 月 14 日

Contents

- ① 第一不完全性定理とその拡張（背景）
- ② 第一不完全性定理の一般化（背景）
- ③ 結果

- ① 第一不完全性定理とその拡張
- ② 第一不完全性定理の一般化
- ③ 結果

準備

以降 T は Peano 算術 PA を含む理論（文の集合）とする.

定義

Γ を論理式の集合とする.

- T が **Γ -定義可能** : $\iff \mathbb{N}$ において T を定義する Γ 論理式 $\varphi(x)$ が存在する.
- T が **Γ -健全** : $\iff T$ において証明可能な Γ 文はすべて $\mathbb{N}$ において正しい.
- T が **Γ -無矛盾** : $\iff$ 任意の Γ 論理式 $\varphi(x)$ について, $T \vdash \exists x \varphi(x)$ ならば $T \not\vdash \neg \varphi(k)$ となる自然数 k がある.
- $\Delta_n := \{\varphi \mid \varphi \text{ と } \mathbb{N} \text{ 上で同値な } \Sigma_n \text{ 論理式と } \Pi_n \text{ 論理式がある}\}.$
- $\Delta_n(\text{PA}) := \{\varphi \mid \varphi \text{ と PA 上で同値な } \Sigma_n \text{ 論理式, } \Pi_n \text{ 論理式がある}\}.$

事実

- T は r.e. $\iff T$ は Σ_1 -定義可能
- T は無矛盾 $\iff T$ は Σ_0 -健全

準備

以降 T は Peano 算術 PA を含む理論（文の集合）とする.

定義

Γ を論理式の集合とする.

- T が **Γ -定義可能** : $\iff \mathbb{N}$ において T を定義する Γ 論理式 $\varphi(x)$ が存在する.
- T が **Γ -健全** : $\iff T$ において証明可能な Γ 文はすべて $\mathbb{N}$ において正しい.
- T が **Γ -無矛盾** : $\iff$ 任意の Γ 論理式 $\varphi(x)$ について, $T \vdash \exists x \varphi(x)$ ならば $T \not\vdash \neg \varphi(k)$ となる自然数 k がある.
- $\Delta_n := \{\varphi \mid \varphi \text{ と } \mathbb{N} \text{ 上で同値な } \Sigma_n \text{ 論理式と } \Pi_n \text{ 論理式がある}\}.$
- $\Delta_n(\text{PA}) := \{\varphi \mid \varphi \text{ と PA 上で同値な } \Sigma_n \text{ 論理式, } \Pi_n \text{ 論理式がある}\}.$

事実

- T は r.e. $\iff T$ は Σ_1 -定義可能
- T は無矛盾 $\iff T$ は Σ_0 -健全

Gödel の第一不完全性定理

Gödel の第一不完全性定理 (A)

 T が Σ_1 -定義可能かつ Σ_1 -健全 $\Rightarrow T \not\models \varphi$ かつ $T \not\models \neg\varphi$ となる Π_1 文 φ が存在する。

Gödel の第一不完全性定理 (B)

 T が Σ_1 -定義可能かつ無矛盾 $\Rightarrow \mathbb{N} \models \varphi$ かつ $T \not\models \varphi$ となる Π_1 文 φ が存在する。

(A) と (B) は、互いを直ちに導くことができるという点で同等。

(A) $\Rightarrow$ (B): T を Σ_1 -定義可能かつ無矛盾とする。(i) T が Σ_1 -健全のとき: (A) より $T \not\models \varphi$ かつ $T \not\models \neg\varphi$ となる Π_1 文 φ がある。
 $\mathbb{N} \models \neg\varphi$ ならば $T \vdash \neg\varphi$ となりおかしいため、 $\mathbb{N} \models \varphi$ 。(ii) T が Σ_1 -健全でないとき: $\mathbb{N} \models \varphi$ かつ $T \vdash \neg\varphi$ となる Π_1 文 φ が存在する。
 T は無矛盾なので $T \not\models \varphi$ 。(B) $\Rightarrow$ (A): T を Σ_1 -定義可能かつ Σ_1 -健全とする。(B) より $\mathbb{N} \models \varphi$ かつ $T \not\models \varphi$ となる Π_1 文 φ がとれる。 T は Σ_1 -健全なので $T \not\models \neg\varphi$ 。

Gödel の第一不完全性定理

Gödel の第一不完全性定理 (A)

 T が Σ_1 -定義可能かつ Σ_1 -健全 $\Rightarrow T \not\models \varphi$ かつ $T \not\models \neg\varphi$ となる Π_1 文 φ が存在する。

Gödel の第一不完全性定理 (B)

 T が Σ_1 -定義可能かつ無矛盾 $\Rightarrow \mathbb{N} \models \varphi$ かつ $T \not\models \varphi$ となる Π_1 文 φ が存在する。

(A) と (B) は、互いを直ちに導くことができるという点で同等。

(A) $\Rightarrow$ (B): T を Σ_1 -定義可能かつ無矛盾とする。(i) T が Σ_1 -健全のとき: (A) より $T \not\models \varphi$ かつ $T \not\models \neg\varphi$ となる Π_1 文 φ がある。
 $\mathbb{N} \models \neg\varphi$ ならば $T \vdash \neg\varphi$ となりおかしいため、 $\mathbb{N} \models \varphi$ 。(ii) T が Σ_1 -健全でないとき: $\mathbb{N} \models \varphi$ かつ $T \vdash \neg\varphi$ となる Π_1 文 φ が存在する。
 T は無矛盾なので $T \not\models \varphi$ 。(B) $\Rightarrow$ (A): T を Σ_1 -定義可能かつ Σ_1 -健全とする。(B) より $\mathbb{N} \models \varphi$ かつ $T \not\models \varphi$ となる Π_1 文 φ がとれる。 T は Σ_1 -健全なので $T \not\models \neg\varphi$ 。

Gödel の第一不完全性定理

Gödel の第一不完全性定理 (A)

 T が Σ_1 -定義可能かつ Σ_1 -健全 $\Rightarrow T \not\models \varphi$ かつ $T \not\models \neg\varphi$ となる Π_1 文 φ が存在する。

Gödel の第一不完全性定理 (B)

 T が Σ_1 -定義可能かつ無矛盾 $\Rightarrow \mathbb{N} \models \varphi$ かつ $T \not\models \varphi$ となる Π_1 文 φ が存在する。

(A) と (B) は、互いを直ちに導くことができるという点で同等。

(A) $\Rightarrow$ (B): T を Σ_1 -定義可能かつ無矛盾とする。(i) T が Σ_1 -健全のとき: (A) より $T \not\models \varphi$ かつ $T \not\models \neg\varphi$ となる Π_1 文 φ がある。
 $\mathbb{N} \models \neg\varphi$ ならば $T \vdash \neg\varphi$ となりおかしいため、 $\mathbb{N} \models \varphi$ 。(ii) T が Σ_1 -健全でないとき: $\mathbb{N} \models \varphi$ かつ $T \vdash \neg\varphi$ となる Π_1 文 φ が存在する。
 T は無矛盾なので $T \not\models \varphi$ 。(B) $\Rightarrow$ (A): T を Σ_1 -定義可能かつ Σ_1 -健全とする。(B) より $\mathbb{N} \models \varphi$ かつ $T \not\models \varphi$ となる Π_1 文 φ がとれる。 T は Σ_1 -健全なので $T \not\models \neg\varphi$ 。

Gödel の第一不完全性定理

Gödel の第一不完全性定理 (A)

 T が Σ_1 -定義可能かつ Σ_1 -健全 $\Rightarrow T \not\models \varphi$ かつ $T \not\models \neg\varphi$ となる Π_1 文 φ が存在する。

Gödel の第一不完全性定理 (B)

 T が Σ_1 -定義可能かつ無矛盾 $\Rightarrow \mathbb{N} \models \varphi$ かつ $T \not\models \varphi$ となる Π_1 文 φ が存在する。

(A) と (B) は、互いを直ちに導くことができるという点で同等。

(A) $\Rightarrow$ (B): T を Σ_1 -定義可能かつ無矛盾とする。(i) T が Σ_1 -健全のとき: (A) より $T \not\models \varphi$ かつ $T \not\models \neg\varphi$ となる Π_1 文 φ がある。
 $\mathbb{N} \models \neg\varphi$ ならば $T \vdash \neg\varphi$ となりおかしいため、 $\mathbb{N} \models \varphi$ 。(ii) T が Σ_1 -健全でないとき: $\mathbb{N} \models \varphi$ かつ $T \vdash \neg\varphi$ となる Π_1 文 φ が存在する。
 T は無矛盾なので $T \not\models \varphi$ 。(B) $\Rightarrow$ (A): T を Σ_1 -定義可能かつ Σ_1 -健全とする。(B) より $\mathbb{N} \models \varphi$ かつ $T \not\models \varphi$ となる Π_1 文 φ がとれる。 T は Σ_1 -健全なので $T \not\models \neg\varphi$ 。

Gödel の第一不完全性定理

Gödel の第一不完全性定理 (A)

 T が Σ_1 -定義可能かつ Σ_1 -健全 $\Rightarrow T \not\models \varphi$ かつ $T \not\models \neg\varphi$ となる Π_1 文 φ が存在する。

Gödel の第一不完全性定理 (B)

 T が Σ_1 -定義可能かつ無矛盾 $\Rightarrow \mathbb{N} \models \varphi$ かつ $T \not\models \varphi$ となる Π_1 文 φ が存在する。

(A) と (B) は、互いを直ちに導くことができるという点で同等。

(A) $\Rightarrow$ (B): T を Σ_1 -定義可能かつ無矛盾とする。(i) T が Σ_1 -健全のとき: (A) より $T \not\models \varphi$ かつ $T \not\models \neg\varphi$ となる Π_1 文 φ がある。 $\mathbb{N} \models \neg\varphi$ ならば $T \vdash \neg\varphi$ となりおかしいため、 $\mathbb{N} \models \varphi$ 。(ii) T が Σ_1 -健全でないとき: $\mathbb{N} \models \varphi$ かつ $T \vdash \neg\varphi$ となる Π_1 文 φ が存在する。 T は無矛盾なので $T \not\models \varphi$ 。(B) $\Rightarrow$ (A): T を Σ_1 -定義可能かつ Σ_1 -健全とする。(B) より $\mathbb{N} \models \varphi$ かつ $T \not\models \varphi$ となる Π_1 文 φ がとれる。 T は Σ_1 -健全なので $T \not\models \neg\varphi$ 。

Gödel の第一不完全性定理

Gödel の第一不完全性定理 (A)

 T が Σ_1 -定義可能かつ Σ_1 -健全 $\Rightarrow T \not\models \varphi$ かつ $T \not\models \neg\varphi$ となる Π_1 文 φ が存在する。

Gödel の第一不完全性定理 (B)

 T が Σ_1 -定義可能かつ無矛盾 $\Rightarrow \mathbb{N} \models \varphi$ かつ $T \not\models \varphi$ となる Π_1 文 φ が存在する。

(A) と (B) は、互いを直ちに導くことができるという点で同等。

(A) $\Rightarrow$ (B): T を Σ_1 -定義可能かつ無矛盾とする。(i) T が Σ_1 -健全のとき: (A) より $T \not\models \varphi$ かつ $T \not\models \neg\varphi$ となる Π_1 文 φ がある。 $\mathbb{N} \models \neg\varphi$ ならば $T \vdash \neg\varphi$ となりおかしいため、 $\mathbb{N} \models \varphi$ 。(ii) T が Σ_1 -健全でないとき: $\mathbb{N} \models \varphi$ かつ $T \vdash \neg\varphi$ となる Π_1 文 φ が存在する。 T は無矛盾なので $T \not\models \varphi$ 。(B) $\Rightarrow$ (A): T を Σ_1 -定義可能かつ Σ_1 -健全とする。(B) より $\mathbb{N} \models \varphi$ かつ $T \not\models \varphi$ となる Π_1 文 φ がとれる。 T は Σ_1 -健全なので $T \not\models \neg\varphi$ 。

Gödel の第一不完全性定理

Gödel の第一不完全性定理 (A)

 T が Σ_1 -定義可能かつ Σ_1 -健全 $\Rightarrow T \not\models \varphi$ かつ $T \not\models \neg\varphi$ となる Π_1 文 φ が存在する。

Gödel の第一不完全性定理 (B)

 T が Σ_1 -定義可能かつ無矛盾 $\Rightarrow \mathbb{N} \models \varphi$ かつ $T \not\models \varphi$ となる Π_1 文 φ が存在する。

(A) と (B) は、互いを直ちに導くことができるという点で同等。

(A) $\Rightarrow$ (B): T を Σ_1 -定義可能かつ無矛盾とする。(i) T が Σ_1 -健全のとき: (A) より $T \not\models \varphi$ かつ $T \not\models \neg\varphi$ となる Π_1 文 φ がある。
 $\mathbb{N} \models \neg\varphi$ ならば $T \vdash \neg\varphi$ となりおかしいため、 $\mathbb{N} \models \varphi$ 。(ii) T が Σ_1 -健全でないとき: $\mathbb{N} \models \varphi$ かつ $T \vdash \neg\varphi$ となる Π_1 文 φ が存在する。
 T は無矛盾なので $T \not\models \varphi$ 。(B) $\Rightarrow$ (A): T を Σ_1 -定義可能かつ Σ_1 -健全とする。(B) より $\mathbb{N} \models \varphi$ かつ $T \not\models \varphi$ となる Π_1 文 φ がとれる。 T は Σ_1 -健全なので $T \not\models \neg\varphi$ 。

Gödel の第一不完全性定理

Gödel の第一不完全性定理 (A)

T が Σ_1 -定義可能かつ Σ_1 -健全

$\Rightarrow T \not\models \varphi$ かつ $T \not\models \neg\varphi$ となる Π_1 文 φ が存在する。

Gödel の第一不完全性定理 (B)

T が Σ_1 -定義可能かつ無矛盾

$\Rightarrow \mathbb{N} \models \varphi$ かつ $T \not\models \varphi$ となる Π_1 文 φ が存在する。

(A) と (B) は、互いを直ちに導くことができるという点で同等。

(A) $\Rightarrow$ (B): T を Σ_1 -定義可能かつ無矛盾とする。

(i) T が Σ_1 -健全のとき: (A) より $T \not\models \varphi$ かつ $T \not\models \neg\varphi$ となる Π_1 文 φ がある。
 $\mathbb{N} \models \neg\varphi$ ならば $T \vdash \neg\varphi$ となりおかしいため、 $\mathbb{N} \models \varphi$ 。

(ii) T が Σ_1 -健全でないとき: $\mathbb{N} \models \varphi$ かつ $T \vdash \neg\varphi$ となる Π_1 文 φ が存在する。
 T は無矛盾なので $T \not\models \varphi$ 。

(B) $\Rightarrow$ (A): T を Σ_1 -定義可能かつ Σ_1 -健全とする。

(B) より $\mathbb{N} \models \varphi$ かつ $T \not\models \varphi$ となる Π_1 文 φ がとれる。

T は Σ_1 -健全なので $T \not\models \neg\varphi$ 。

Gödel の第一不完全性定理

Gödel の第一不完全性定理 (A)

T が Σ_1 -定義可能かつ Σ_1 -健全

$\Rightarrow T \not\models \varphi$ かつ $T \not\models \neg\varphi$ となる Π_1 文 φ が存在する。

Gödel の第一不完全性定理 (B)

T が Σ_1 -定義可能かつ無矛盾

$\Rightarrow \mathbb{N} \models \varphi$ かつ $T \not\models \varphi$ となる Π_1 文 φ が存在する。

(A) と (B) は、互いを直ちに導くことができるという点で同等。

(A) $\Rightarrow$ (B): T を Σ_1 -定義可能かつ無矛盾とする。

(i) T が Σ_1 -健全のとき: (A) より $T \not\models \varphi$ かつ $T \not\models \neg\varphi$ となる Π_1 文 φ がある。
 $\mathbb{N} \models \neg\varphi$ ならば $T \vdash \neg\varphi$ となりおかしいため、 $\mathbb{N} \models \varphi$ 。

(ii) T が Σ_1 -健全でないとき: $\mathbb{N} \models \varphi$ かつ $T \vdash \neg\varphi$ となる Π_1 文 φ が存在する。
 T は無矛盾なので $T \not\models \varphi$ 。

(B) $\Rightarrow$ (A): T を Σ_1 -定義可能かつ Σ_1 -健全とする。

(B) より $\mathbb{N} \models \varphi$ かつ $T \not\models \varphi$ となる Π_1 文 φ がとれる。

T は Σ_1 -健全なので $T \not\models \neg\varphi$ 。

Gödel の第一不完全性定理

Gödel の第一不完全性定理 (A)

T が Σ_1 -定義可能かつ Σ_1 -健全

$\Rightarrow T \not\models \varphi$ かつ $T \not\models \neg\varphi$ となる Π_1 文 φ が存在する。

Gödel の第一不完全性定理 (B)

T が Σ_1 -定義可能かつ無矛盾

$\Rightarrow \mathbb{N} \models \varphi$ かつ $T \not\models \varphi$ となる Π_1 文 φ が存在する。

(A) と (B) は、互いを直ちに導くことができるという点で同等。

(A) $\Rightarrow$ (B): T を Σ_1 -定義可能かつ無矛盾とする。

(i) T が Σ_1 -健全のとき: (A) より $T \not\models \varphi$ かつ $T \not\models \neg\varphi$ となる Π_1 文 φ がある。
 $\mathbb{N} \models \neg\varphi$ ならば $T \vdash \neg\varphi$ となりおかしいため、 $\mathbb{N} \models \varphi$ 。

(ii) T が Σ_1 -健全でないとき: $\mathbb{N} \models \varphi$ かつ $T \vdash \neg\varphi$ となる Π_1 文 φ が存在する。
 T は無矛盾なので $T \not\models \varphi$ 。

(B) $\Rightarrow$ (A): T を Σ_1 -定義可能かつ Σ_1 -健全とする。

(B) より $\mathbb{N} \models \varphi$ かつ $T \not\models \varphi$ となる Π_1 文 φ がとれる。

T は Σ_1 -健全なので $T \not\models \neg\varphi$ 。

Gödel の第一不完全性定理

Gödel の第一不完全性定理 (A)

T が Σ_1 -定義可能かつ Σ_1 -健全

$\Rightarrow T \not\models \varphi$ かつ $T \not\models \neg\varphi$ となる Π_1 文 φ が存在する。

Gödel の第一不完全性定理 (B)

T が Σ_1 -定義可能かつ無矛盾

$\Rightarrow \mathbb{N} \models \varphi$ かつ $T \not\models \varphi$ となる Π_1 文 φ が存在する。

(A) と (B) は、互いを直ちに導くことができるという点で同等。

(A) $\Rightarrow$ (B): T を Σ_1 -定義可能かつ無矛盾とする。

(i) T が Σ_1 -健全のとき: (A) より $T \not\models \varphi$ かつ $T \not\models \neg\varphi$ となる Π_1 文 φ がある。
 $\mathbb{N} \models \neg\varphi$ ならば $T \vdash \neg\varphi$ となりおかしいため、 $\mathbb{N} \models \varphi$ 。

(ii) T が Σ_1 -健全でないとき: $\mathbb{N} \models \varphi$ かつ $T \vdash \neg\varphi$ となる Π_1 文 φ が存在する。
 T は無矛盾なので $T \not\models \varphi$ 。

(B) $\Rightarrow$ (A): T を Σ_1 -定義可能かつ Σ_1 -健全とする。

(B) より $\mathbb{N} \models \varphi$ かつ $T \not\models \varphi$ となる Π_1 文 φ がとれる。

T は Σ_1 -健全なので $T \not\models \neg\varphi$ 。

Rosser による (A) の拡張

Gödel の第一不完全性定理 (A) 【再掲】

T が Σ_1 -定義可能かつ Σ_1 -健全

$\Rightarrow T \not\models \varphi$ かつ $T \not\models \neg\varphi$ となる Π_1 文 φ が存在する.

よく知られているように, Gödel の第一不完全性定理 (A) は Rosser によって拡張されている.

定理 (A') (Rosser, 1936)

T が Σ_1 -定義可能かつ **無矛盾**

$\Rightarrow T \not\models \varphi$ かつ $T \not\models \neg\varphi$ となる Π_1 文 φ が存在する.

Rosser による (A) の拡張

Gödel の第一不完全性定理 (A) 【再掲】

T が Σ_1 -定義可能かつ Σ_1 -健全

$\Rightarrow T \not\models \varphi$ かつ $T \not\models \neg\varphi$ となる Π_1 文 φ が存在する.

よく知られているように, Gödel の第一不完全性定理 (A) は Rosser によって拡張されている.

定理 (A') (Rosser, 1936)

T が Σ_1 -定義可能かつ **無矛盾**

$\Rightarrow T \not\models \varphi$ かつ $T \not\models \neg\varphi$ となる Π_1 文 φ が存在する.

Jeroslow による (B) の拡張

Gödel の第一不完全性定理 (B) 【再掲】

T が Σ_1 -定義可能かつ無矛盾

$\Rightarrow \mathbb{N} \models \varphi$ かつ $T \not\models \varphi$ となる Π_1 文 φ が存在する.

Gödel の第一不完全性定理 (B) の拡張も Jeroslow によって行われている.

定理 (B') (Jeroslow, 1975)

$\text{Th}(T)$ が Δ_2 -定義可能かつ無矛盾

$\Rightarrow \mathbb{N} \models \varphi$ かつ $T \not\models \varphi$ となる Π_1 文 φ が存在する.

ここで $\text{Th}(T) := \{\varphi \mid \varphi \text{ は文で } T \vdash \varphi\}$

T が Σ_1 -定義可能ならば, $\text{Th}(T)$ も Σ_1 -定義可能, 特に Δ_2 -定義可能なので, Jeroslow の定理 (B') は Gödel の定理 (B) の拡張.

Jeroslow による (B) の拡張

Gödel の第一不完全性定理 (B) 【再掲】

T が Σ_1 -定義可能かつ無矛盾

$\Rightarrow \mathbb{N} \models \varphi$ かつ $T \not\models \varphi$ となる Π_1 文 φ が存在する.

Gödel の第一不完全性定理 (B) の拡張も Jeroslow によって行われている.

定理 (B') (Jeroslow, 1975)

$\text{Th}(T)$ が Δ_2 -定義可能かつ無矛盾

$\Rightarrow \mathbb{N} \models \varphi$ かつ $T \not\models \varphi$ となる Π_1 文 φ が存在する.

ここで $\text{Th}(T) := \{\varphi \mid \varphi \text{ は文で } T \vdash \varphi\}$

T が Σ_1 -定義可能ならば, $\text{Th}(T)$ も Σ_1 -定義可能, 特に Δ_2 -定義可能なので, Jeroslow の定理 (B') は Gödel の定理 (B) の拡張.

Jeroslow による (B) の拡張

Gödel の第一不完全性定理 (B) 【再掲】

T が Σ_1 -定義可能かつ無矛盾

$\Rightarrow \mathbb{N} \models \varphi$ かつ $T \not\models \varphi$ となる Π_1 文 φ が存在する.

Gödel の第一不完全性定理 (B) の拡張も Jeroslow によって行われている.

定理 (B') (Jeroslow, 1975)

$\text{Th}(T)$ が Δ_2 -定義可能かつ無矛盾

$\Rightarrow \mathbb{N} \models \varphi$ かつ $T \not\models \varphi$ となる Π_1 文 φ が存在する.

ここで $\text{Th}(T) := \{\varphi \mid \varphi \text{ は文で } T \vdash \varphi\}$

T が Σ_1 -定義可能ならば, $\text{Th}(T)$ も Σ_1 -定義可能, 特に Δ_2 -定義可能なので, Jeroslow の定理 (B') は Gödel の定理 (B) の拡張.

- ① 第一不完全性定理とその拡張
- ② 第一不完全性定理の一般化
- ③ 結果

Rosser の定理 (A') の一般化

以降では $n \geq 0$ とする.

Rosser の定理 (A') は次のように一般化できる.

定理 (Kikuchi and Kurahashi, 20XX)

T が Σ_{n+1} -定義可能かつ Σ_n -健全

$\Rightarrow T \not\models \varphi$ かつ $T \not\models \neg\varphi$ となる Π_{n+1} 文 φ が存在する.

Rosser の定理は $n = 0$ の場合 (無矛盾性と Σ_0 -健全性は同値).

定理の系として Gödel の定理 (B) の一般化が得られる.

系

T が Σ_{n+1} -定義可能かつ無矛盾

$\Rightarrow \mathbb{N} \models \varphi$ かつ $T \not\models \varphi$ となる Π_{n+1} 文 φ が存在する.

本発表のテーマ

系の主張をどこまで改良できるか? つまり,

$\mathbb{N} \models \varphi$ かつ $T \not\models \varphi$ となる Π_{n+1} 文 φ が存在するための条件はどこまで弱められるか?

Rosser の定理 (A') の一般化

以降では $n \geq 0$ とする.

Rosser の定理 (A') は次のように一般化できる.

定理 (Kikuchi and Kurahashi, 20XX)

T が Σ_{n+1} -定義可能かつ Σ_n -健全

$\Rightarrow T \not\models \varphi$ かつ $T \not\models \neg\varphi$ となる Π_{n+1} 文 φ が存在する.

Rosser の定理は $n = 0$ の場合 (無矛盾性と Σ_0 -健全性は同値).

定理の系として Gödel の定理 (B) の一般化が得られる.

系

T が Σ_{n+1} -定義可能かつ無矛盾

$\Rightarrow \mathbb{N} \models \varphi$ かつ $T \not\models \varphi$ となる Π_{n+1} 文 φ が存在する.

本発表のテーマ

系の主張をどこまで改良できるか? つまり,

$\mathbb{N} \models \varphi$ かつ $T \not\models \varphi$ となる Π_{n+1} 文 φ が存在するための条件はどこまで弱められるか?

Rosser の定理 (A') の一般化

以降では $n \geq 0$ とする.

Rosser の定理 (A') は次のように一般化できる.

定理 (Kikuchi and Kurahashi, 20XX)

T が Σ_{n+1} -定義可能かつ Σ_n -健全

$\Rightarrow T \not\models \varphi$ かつ $T \not\models \neg\varphi$ となる Π_{n+1} 文 φ が存在する.

Rosser の定理は $n = 0$ の場合 (無矛盾性と Σ_0 -健全性は同値).

定理の系として Gödel の定理 (B) の一般化が得られる.

系

T が Σ_{n+1} -定義可能かつ無矛盾

$\Rightarrow \mathbb{N} \models \varphi$ かつ $T \not\models \varphi$ となる Π_{n+1} 文 φ が存在する.

本発表のテーマ

系の主張をどこまで改良できるか? つまり,

$\mathbb{N} \models \varphi$ かつ $T \not\models \varphi$ となる Π_{n+1} 文 φ が存在するための条件はどこまで弱められるか?

Rosser の定理 (A') の一般化

以降では $n \geq 0$ とする.

Rosser の定理 (A') は次のように一般化できる.

定理 (Kikuchi and Kurahashi, 20XX)

T が Σ_{n+1} -定義可能かつ Σ_n -健全

$\Rightarrow T \not\models \varphi$ かつ $T \not\models \neg\varphi$ となる Π_{n+1} 文 φ が存在する.

Rosser の定理は $n = 0$ の場合 (無矛盾性と Σ_0 -健全性は同値).

定理の系として Gödel の定理 (B) の一般化が得られる.

系

T が Σ_{n+1} -定義可能かつ無矛盾

$\Rightarrow \mathbb{N} \models \varphi$ かつ $T \not\models \varphi$ となる Π_{n+1} 文 φ が存在する.

本発表のテーマ

系の主張をどこまで改良できるか? つまり,

$\mathbb{N} \models \varphi$ かつ $T \not\models \varphi$ となる Π_{n+1} 文 φ が存在するための条件はどこまで弱められるか?

Rosser の定理 (A') の一般化

以降では $n \geq 0$ とする.

Rosser の定理 (A') は次のように一般化できる.

定理 (Kikuchi and Kurahashi, 20XX)

T が Σ_{n+1} -定義可能かつ Σ_n -健全

$\Rightarrow T \not\models \varphi$ かつ $T \not\models \neg\varphi$ となる Π_{n+1} 文 φ が存在する.

Rosser の定理は $n = 0$ の場合 (無矛盾性と Σ_0 -健全性は同値).

定理の系として Gödel の定理 (B) の一般化が得られる.

系

T が Σ_{n+1} -定義可能かつ無矛盾

$\Rightarrow \mathbb{N} \models \varphi$ かつ $T \not\models \varphi$ となる Π_{n+1} 文 φ が存在する.

本発表のテーマ

系の主張をどこまで改良できるか? つまり,

$\mathbb{N} \models \varphi$ かつ $T \not\models \varphi$ となる Π_{n+1} 文 φ が存在するための条件はどこまで弱められるか?

Hájek の定理

Hájek は Jeroslow の流れに沿って、前述の系より強い次の一般化を与えた。

定理 (Hájek, 1977)

$\text{Th}(T)$ が $\Delta_{n+2}(\text{PA})$ -定義可能かつ無矛盾

$\Rightarrow \mathbb{N} \models \varphi$ かつ $T \not\models \varphi$ となる Π_{n+1} 文 φ が存在する。

Δ_2 -定義可能な集合で $\Delta_2(\text{PA})$ -定義可能でないものが存在するので、Hájek の定理は Jeroslow の定理 (B') の一般化、というわけではないことに注意。更に Hájek は次の形の一般化も与えた。

定理 (Hájek, 1977)

$\text{Th}(T)$ が Π_{n+2} -定義可能かつ Σ_{n+2} -無矛盾

$\Rightarrow \mathbb{N} \models \varphi$ かつ $T \not\models \varphi$ となる Π_{n+1} 文 φ が存在する。

Hájek の定理

Hájek は Jeroslow の流れに沿って、前述の系より強い次の一般化を与えた。

定理 (Hájek, 1977)

$\text{Th}(T)$ が $\Delta_{n+2}(\text{PA})$ -定義可能かつ無矛盾

$\Rightarrow \mathbb{N} \models \varphi$ かつ $T \not\models \varphi$ となる Π_{n+1} 文 φ が存在する。

Δ_2 -定義可能な集合で $\Delta_2(\text{PA})$ -定義可能でないものが存在するので、Hájek の定理は Jeroslow の定理 (B') の一般化、というわけではないことに注意。
更に Hájek は次の形の一般化も与えた。

定理 (Hájek, 1977)

$\text{Th}(T)$ が Π_{n+2} -定義可能かつ Σ_{n+2} -無矛盾

$\Rightarrow \mathbb{N} \models \varphi$ かつ $T \not\models \varphi$ となる Π_{n+1} 文 φ が存在する。

Hájek の定理

Hájek は Jeroslow の流れに沿って、前述の系より強い次の一般化を与えた.

定理 (Hájek, 1977)

$\text{Th}(T)$ が $\Delta_{n+2}(\text{PA})$ -定義可能かつ無矛盾

$\Rightarrow \mathbb{N} \models \varphi$ かつ $T \not\models \varphi$ となる Π_{n+1} 文 φ が存在する.

Δ_2 -定義可能な集合で $\Delta_2(\text{PA})$ -定義可能でないものが存在するので, Hájek の定理は Jeroslow の定理 (B') の一般化, というわけではないことに注意. 更に Hájek は次の形の一般化も与えた.

定理 (Hájek, 1977)

$\text{Th}(T)$ が Π_{n+2} -定義可能かつ Σ_{n+2} -無矛盾

$\Rightarrow \mathbb{N} \models \varphi$ かつ $T \not\models \varphi$ となる Π_{n+1} 文 φ が存在する.

背景のまとめ

$\mathbb{N} \models \varphi$ かつ $T \not\models \varphi$ となる Π_{n+1} 文 φ が存在するための十分条件

Th(T) の定義可能性	無矛盾性	
Σ_{n+1}	無矛盾	Gödel, 1931 ($n = 0$ のみ)
$\Delta_{n+2}(\text{PA})$	無矛盾	Hájek, 1977 ($n \geq 0$)
Δ_{n+2}	無矛盾	Jeroslow, 1975 ($n = 0$ のみ)
Π_{n+2}	Σ_{n+2} -無矛盾	Hájek, 1977 ($n \geq 0$)

Hájek の問題 (1977)

一番下の行の ' Σ_{n+2} -無矛盾' を '無矛盾' にできるか？

(実際には $n = 1$ の場合のみを聞いた)

背景のまとめ

$\mathbb{N} \models \varphi$ かつ $T \not\models \varphi$ となる Π_{n+1} 文 φ が存在するための十分条件

Th(T) の定義可能性	無矛盾性	
Σ_{n+1}	無矛盾	Gödel, 1931 ($n = 0$ のみ)
$\Delta_{n+2}(\text{PA})$	無矛盾	Hájek, 1977 ($n \geq 0$)
Δ_{n+2}	無矛盾	Jeroslow, 1975 ($n = 0$ のみ)
Π_{n+2}	Σ_{n+2} -無矛盾	Hájek, 1977 ($n \geq 0$)

Hájek の問題 (1977)

一番下の行の ' Σ_{n+2} -無矛盾' を '無矛盾' にできるか?
(実際には $n = 1$ の場合のみを聞いた)

- ① 第一不完全性定理とその拡張
- ② 第一不完全性定理の一般化
- ③ 結果

結果

Hájek の問題に対する解答が得られた.

定理

$\text{Th}(T)$ が Π_{n+1} -定義可能かつ無矛盾

$\Rightarrow \mathbb{N} \models \varphi$ かつ $T \not\models \varphi$ となる Π_n 文 φ が存在する.

- $n \geq 1$ の場合が Hájek の問題に対する解答.
- $n = 0$ の場合を考えれば次の系が得られる.

系

$\text{Th}(T)$ が Π_1 -定義可能かつ無矛盾となる T は存在しない.

また次の系も得られる.

系

$\text{Th}(T)$ が Π_{n+2} -定義可能かつ Σ_{n+1} -健全

$\Rightarrow T \not\models \varphi$ かつ $T \not\models \neg\varphi$ となる Π_{n+1} 文 φ が存在する.

結果

Hájek の問題に対する解答が得られた.

定理

$\text{Th}(T)$ が Π_{n+1} -定義可能かつ無矛盾

$\Rightarrow \mathbb{N} \models \varphi$ かつ $T \not\models \varphi$ となる Π_n 文 φ が存在する.

- $n \geq 1$ の場合が Hájek の問題に対する解答.
- $n = 0$ の場合を考えれば次の系が得られる.

系

$\text{Th}(T)$ が Π_1 -定義可能かつ無矛盾となる T は存在しない.

また次の系も得られる.

系

$\text{Th}(T)$ が Π_{n+2} -定義可能かつ Σ_{n+1} -健全

$\Rightarrow T \not\models \varphi$ かつ $T \not\models \neg\varphi$ となる Π_{n+1} 文 φ が存在する.

結果

Hájek の問題に対する解答が得られた.

定理

$\text{Th}(T)$ が Π_{n+1} -定義可能かつ無矛盾

$\Rightarrow \mathbb{N} \models \varphi$ かつ $T \not\models \varphi$ となる Π_n 文 φ が存在する.

- $n \geq 1$ の場合が Hájek の問題に対する解答.
- $n = 0$ の場合を考えれば次の系が得られる.

系

$\text{Th}(T)$ が Π_1 -定義可能かつ無矛盾となる T は存在しない.

また次の系も得られる.

系

$\text{Th}(T)$ が Π_{n+2} -定義可能かつ Σ_{n+1} -健全

$\Rightarrow T \not\models \varphi$ かつ $T \not\models \neg\varphi$ となる Π_{n+1} 文 φ が存在する.

結果

Hájek の問題に対する解答が得られた.

定理

$\text{Th}(T)$ が Π_{n+1} -定義可能かつ無矛盾

$\Rightarrow \mathbb{N} \models \varphi$ かつ $T \not\models \varphi$ となる Π_n 文 φ が存在する.

- $n \geq 1$ の場合が Hájek の問題に対する解答.
- $n = 0$ の場合を考えれば次の系が得られる.

系

$\text{Th}(T)$ が Π_1 -定義可能かつ無矛盾となる T は存在しない.

また次の系も得られる.

系

$\text{Th}(T)$ が Π_{n+2} -定義可能かつ Σ_{n+1} -健全

$\Rightarrow T \not\models \varphi$ かつ $T \not\models \neg\varphi$ となる Π_{n+1} 文 φ が存在する.

定理の証明

Proof.

T を無矛盾かつ $\text{Th}(T)$ が Π_{n+1} -定義可能な理論とする.

Σ_n 論理式 $\tau(x, y)$ について, $\forall y \tau(x, y)$ が $\text{Th}(T)$ を定義するとする.
 次を満たす Σ_{n+1} 文 φ をとる:

$$\text{PA} \vdash \varphi \leftrightarrow \exists y (\neg \tau(\ulcorner \varphi \urcorner, y) \wedge \forall z \leq y \tau(\ulcorner \neg \varphi \urcorner, z)).$$

ψ を Σ_{n+1} 文 $\exists y (\neg \tau(\ulcorner \neg \varphi \urcorner, y) \wedge \forall z < y \tau(\ulcorner \varphi \urcorner, z))$ とする.

T は無矛盾なので $\varphi \notin \text{Th}(T)$ もしくは $\neg \varphi \notin \text{Th}(T)$.

つまり $N \models \exists y \neg \tau(\ulcorner \varphi \urcorner, y) \vee \exists y \neg \tau(\ulcorner \neg \varphi \urcorner, y)$ なので $N \models \varphi \vee \psi$.

(i) $N \models \varphi$ とすると, $N \models \exists y \neg \tau(\ulcorner \varphi \urcorner, y)$ なので $\varphi \notin \text{Th}(T)$.

(ii) $N \models \psi$ とすると同様に $\neg \varphi \notin \text{Th}(T)$.

$\text{PA} \vdash \psi \rightarrow \neg \varphi$ なので $\psi \notin \text{Th}(T)$.

いずれにせよ N で正しいが T で証明できない Σ_{n+1} 文がある.

よって N で正しいが T で証明できない Π_n 文がある.



定理の証明

Proof.

T を無矛盾かつ $\text{Th}(T)$ が Π_{n+1} -定義可能な理論とする.

Σ_n 論理式 $\tau(x, y)$ について, $\forall y \tau(x, y)$ が $\text{Th}(T)$ を定義するとする.

次を満たす Σ_{n+1} 文 φ をとる:

$$\text{PA} \vdash \varphi \leftrightarrow \exists y (\neg \tau(\ulcorner \varphi \urcorner, y) \wedge \forall z \leq y \tau(\ulcorner \neg \varphi \urcorner, z)).$$

ψ を Σ_{n+1} 文 $\exists y (\neg \tau(\ulcorner \neg \varphi \urcorner, y) \wedge \forall z < y \tau(\ulcorner \varphi \urcorner, z))$ とする.

T は無矛盾なので $\varphi \notin \text{Th}(T)$ もしくは $\neg \varphi \notin \text{Th}(T)$.

つまり $N \models \exists y \neg \tau(\ulcorner \varphi \urcorner, y) \vee \exists y \neg \tau(\ulcorner \neg \varphi \urcorner, y)$ なので $N \models \varphi \vee \psi$.

(i) $N \models \varphi$ とすると, $N \models \exists y \neg \tau(\ulcorner \varphi \urcorner, y)$ なので $\varphi \notin \text{Th}(T)$.

(ii) $N \models \psi$ とすると同様に $\neg \varphi \notin \text{Th}(T)$.

$\text{PA} \vdash \psi \rightarrow \neg \varphi$ なので $\psi \notin \text{Th}(T)$.

いずれにせよ N で正しいが T で証明できない Σ_{n+1} 文がある.

よって N で正しいが T で証明できない Π_n 文がある. □

定理の証明

Proof.

T を無矛盾かつ $\text{Th}(T)$ が Π_{n+1} -定義可能な理論とする.

Σ_n 論理式 $\tau(x, y)$ について, $\forall y \tau(x, y)$ が $\text{Th}(T)$ を定義するとする.
 次を満たす Σ_{n+1} 文 φ をとる:

$$\text{PA} \vdash \varphi \leftrightarrow \exists y (\neg \tau(\ulcorner \varphi \urcorner, y) \wedge \forall z \leq y \tau(\ulcorner \neg \varphi \urcorner, z)).$$

ψ を Σ_{n+1} 文 $\exists y (\neg \tau(\ulcorner \neg \varphi \urcorner, y) \wedge \forall z < y \tau(\ulcorner \varphi \urcorner, z))$ とする.

T は無矛盾なので $\varphi \notin \text{Th}(T)$ もしくは $\neg \varphi \notin \text{Th}(T)$.

つまり $N \models \exists y \neg \tau(\ulcorner \varphi \urcorner, y) \vee \exists y \neg \tau(\ulcorner \neg \varphi \urcorner, y)$ なので $N \models \varphi \vee \psi$.

(i) $N \models \varphi$ とすると, $N \models \exists y \neg \tau(\ulcorner \varphi \urcorner, y)$ なので $\varphi \notin \text{Th}(T)$.

(ii) $N \models \psi$ とすると同様に $\neg \varphi \notin \text{Th}(T)$.

$\text{PA} \vdash \psi \rightarrow \neg \varphi$ なので $\psi \notin \text{Th}(T)$.

いずれにせよ N で正しいが T で証明できない Σ_{n+1} 文がある.

よって N で正しいが T で証明できない Π_n 文がある. □

定理の証明

Proof.

T を無矛盾かつ $\text{Th}(T)$ が Π_{n+1} -定義可能な理論とする.

Σ_n 論理式 $\tau(x, y)$ について, $\forall y \tau(x, y)$ が $\text{Th}(T)$ を定義するとする.
 次を満たす Σ_{n+1} 文 φ をとる:

$$\text{PA} \vdash \varphi \leftrightarrow \exists y (\neg \tau(\ulcorner \varphi \urcorner, y) \wedge \forall z \leq y \tau(\ulcorner \neg \varphi \urcorner, z)).$$

ψ を Σ_{n+1} 文 $\exists y (\neg \tau(\ulcorner \neg \varphi \urcorner, y) \wedge \forall z < y \tau(\ulcorner \varphi \urcorner, z))$ とする.

T は無矛盾なので $\varphi \notin \text{Th}(T)$ もしくは $\neg \varphi \notin \text{Th}(T)$.

つまり $\mathbb{N} \models \exists y \neg \tau(\ulcorner \varphi \urcorner, y) \vee \exists y \neg \tau(\ulcorner \neg \varphi \urcorner, y)$ なので $\mathbb{N} \models \varphi \vee \psi$.

(i) $\mathbb{N} \models \varphi$ とすると, $\mathbb{N} \models \exists y \neg \tau(\ulcorner \varphi \urcorner, y)$ なので $\varphi \notin \text{Th}(T)$.

(ii) $\mathbb{N} \models \psi$ とすると同様に $\neg \varphi \notin \text{Th}(T)$.

$\text{PA} \vdash \psi \rightarrow \neg \varphi$ なので $\psi \notin \text{Th}(T)$.

いずれにせよ $\mathbb{N}$ で正しいが T で証明できない Σ_{n+1} 文がある.

よって $\mathbb{N}$ で正しいが T で証明できない Π_n 文がある. □

定理の証明

Proof.

T を無矛盾かつ $\text{Th}(T)$ が Π_{n+1} -定義可能な理論とする.

Σ_n 論理式 $\tau(x, y)$ について, $\forall y \tau(x, y)$ が $\text{Th}(T)$ を定義するとする.
 次を満たす Σ_{n+1} 文 φ をとる:

$$\text{PA} \vdash \varphi \leftrightarrow \exists y (\neg \tau(\ulcorner \varphi \urcorner, y) \wedge \forall z \leq y \tau(\ulcorner \neg \varphi \urcorner, z)).$$

ψ を Σ_{n+1} 文 $\exists y (\neg \tau(\ulcorner \neg \varphi \urcorner, y) \wedge \forall z < y \tau(\ulcorner \varphi \urcorner, z))$ とする.

T は無矛盾なので $\varphi \notin \text{Th}(T)$ もしくは $\neg \varphi \notin \text{Th}(T)$.

つまり $\mathbb{N} \models \exists y \neg \tau(\ulcorner \varphi \urcorner, y) \vee \exists y \neg \tau(\ulcorner \neg \varphi \urcorner, y)$ なので $\mathbb{N} \models \varphi \vee \psi$.

(i) $\mathbb{N} \models \varphi$ とすると, $\mathbb{N} \models \exists y \neg \tau(\ulcorner \varphi \urcorner, y)$ なので $\varphi \notin \text{Th}(T)$.

(ii) $\mathbb{N} \models \psi$ とすると同様に $\neg \varphi \notin \text{Th}(T)$.

$\text{PA} \vdash \psi \rightarrow \neg \varphi$ なので $\psi \notin \text{Th}(T)$.

いずれにせよ $\mathbb{N}$ で正しいが T で証明できない Σ_{n+1} 文がある.

よって $\mathbb{N}$ で正しいが T で証明できない Π_n 文がある. □

定理の証明

Proof.

T を無矛盾かつ $\text{Th}(T)$ が Π_{n+1} -定義可能な理論とする.

Σ_n 論理式 $\tau(x, y)$ について, $\forall y \tau(x, y)$ が $\text{Th}(T)$ を定義するとする.
 次を満たす Σ_{n+1} 文 φ をとる:

$$\text{PA} \vdash \varphi \leftrightarrow \exists y (\neg \tau(\ulcorner \varphi \urcorner, y) \wedge \forall z \leq y \tau(\ulcorner \neg \varphi \urcorner, z)).$$

ψ を Σ_{n+1} 文 $\exists y (\neg \tau(\ulcorner \neg \varphi \urcorner, y) \wedge \forall z < y \tau(\ulcorner \varphi \urcorner, z))$ とする.

T は無矛盾なので $\varphi \notin \text{Th}(T)$ もしくは $\neg \varphi \notin \text{Th}(T)$.

つまり $\mathbb{N} \models \exists y \neg \tau(\ulcorner \varphi \urcorner, y) \vee \exists y \neg \tau(\ulcorner \neg \varphi \urcorner, y)$ なので $\mathbb{N} \models \varphi \vee \psi$.

(i) $\mathbb{N} \models \varphi$ とすると, $\mathbb{N} \models \exists y \neg \tau(\ulcorner \varphi \urcorner, y)$ なので $\varphi \notin \text{Th}(T)$.

(ii) $\mathbb{N} \models \psi$ とすると同様に $\neg \varphi \notin \text{Th}(T)$.

$\text{PA} \vdash \psi \rightarrow \neg \varphi$ なので $\psi \notin \text{Th}(T)$.

いずれにせよ $\mathbb{N}$ で正しいが T で証明できない Σ_{n+1} 文がある.

よって $\mathbb{N}$ で正しいが T で証明できない Π_n 文がある. □

定理の証明

Proof.

T を無矛盾かつ $\text{Th}(T)$ が Π_{n+1} -定義可能な理論とする.

Σ_n 論理式 $\tau(x, y)$ について, $\forall y \tau(x, y)$ が $\text{Th}(T)$ を定義するとする.
 次を満たす Σ_{n+1} 文 φ をとる:

$$\text{PA} \vdash \varphi \leftrightarrow \exists y (\neg \tau(\ulcorner \varphi \urcorner, y) \wedge \forall z \leq y \tau(\ulcorner \neg \varphi \urcorner, z)).$$

ψ を Σ_{n+1} 文 $\exists y (\neg \tau(\ulcorner \neg \varphi \urcorner, y) \wedge \forall z < y \tau(\ulcorner \varphi \urcorner, z))$ とする.

T は無矛盾なので $\varphi \notin \text{Th}(T)$ もしくは $\neg \varphi \notin \text{Th}(T)$.

つまり $\mathbb{N} \models \exists y \neg \tau(\ulcorner \varphi \urcorner, y) \vee \exists y \neg \tau(\ulcorner \neg \varphi \urcorner, y)$ なので $\mathbb{N} \models \varphi \vee \psi$.

(i) $\mathbb{N} \models \varphi$ とすると, $\mathbb{N} \models \exists y \neg \tau(\ulcorner \varphi \urcorner, y)$ なので $\varphi \notin \text{Th}(T)$.

(ii) $\mathbb{N} \models \psi$ とすると同様に $\neg \varphi \notin \text{Th}(T)$.

$\text{PA} \vdash \psi \rightarrow \neg \varphi$ なので $\psi \notin \text{Th}(T)$.

いずれにせよ $\mathbb{N}$ で正しいが T で証明できない Σ_{n+1} 文がある.

よって $\mathbb{N}$ で正しいが T で証明できない Π_n 文がある. □

定理の証明

Proof.

T を無矛盾かつ $\text{Th}(T)$ が Π_{n+1} -定義可能な理論とする.

Σ_n 論理式 $\tau(x, y)$ について, $\forall y \tau(x, y)$ が $\text{Th}(T)$ を定義するとする.
 次を満たす Σ_{n+1} 文 φ をとる:

$$\text{PA} \vdash \varphi \leftrightarrow \exists y (\neg \tau(\ulcorner \varphi \urcorner, y) \wedge \forall z \leq y \tau(\ulcorner \neg \varphi \urcorner, z)).$$

ψ を Σ_{n+1} 文 $\exists y (\neg \tau(\ulcorner \neg \varphi \urcorner, y) \wedge \forall z < y \tau(\ulcorner \varphi \urcorner, z))$ とする.

T は無矛盾なので $\varphi \notin \text{Th}(T)$ もしくは $\neg \varphi \notin \text{Th}(T)$.

つまり $\mathbb{N} \models \exists y \neg \tau(\ulcorner \varphi \urcorner, y) \vee \exists y \neg \tau(\ulcorner \neg \varphi \urcorner, y)$ なので $\mathbb{N} \models \varphi \vee \psi$.

(i) $\mathbb{N} \models \varphi$ とすると, $\mathbb{N} \models \exists y \neg \tau(\ulcorner \varphi \urcorner, y)$ なので $\varphi \notin \text{Th}(T)$.

(ii) $\mathbb{N} \models \psi$ とすると同様に $\neg \varphi \notin \text{Th}(T)$.

$\text{PA} \vdash \psi \rightarrow \neg \varphi$ なので $\psi \notin \text{Th}(T)$.

いずれにせよ $\mathbb{N}$ で正しいが T で証明できない Σ_{n+1} 文がある.

よって $\mathbb{N}$ で正しいが T で証明できない Π_n 文がある. □

定理の証明

Proof.

T を無矛盾かつ $\text{Th}(T)$ が Π_{n+1} -定義可能な理論とする.

Σ_n 論理式 $\tau(x, y)$ について, $\forall y \tau(x, y)$ が $\text{Th}(T)$ を定義するとする.
 次を満たす Σ_{n+1} 文 φ をとる:

$$\text{PA} \vdash \varphi \leftrightarrow \exists y (\neg \tau(\ulcorner \varphi \urcorner, y) \wedge \forall z \leq y \tau(\ulcorner \neg \varphi \urcorner, z)).$$

ψ を Σ_{n+1} 文 $\exists y (\neg \tau(\ulcorner \neg \varphi \urcorner, y) \wedge \forall z < y \tau(\ulcorner \varphi \urcorner, z))$ とする.

T は無矛盾なので $\varphi \notin \text{Th}(T)$ もしくは $\neg \varphi \notin \text{Th}(T)$.

つまり $\mathbb{N} \models \exists y \neg \tau(\ulcorner \varphi \urcorner, y) \vee \exists y \neg \tau(\ulcorner \neg \varphi \urcorner, y)$ なので $\mathbb{N} \models \varphi \vee \psi$.

(i) $\mathbb{N} \models \varphi$ とすると, $\mathbb{N} \models \exists y \neg \tau(\ulcorner \varphi \urcorner, y)$ なので $\varphi \notin \text{Th}(T)$.

(ii) $\mathbb{N} \models \psi$ とすると同様に $\neg \varphi \notin \text{Th}(T)$.

$\text{PA} \vdash \psi \rightarrow \neg \varphi$ なので $\psi \notin \text{Th}(T)$.

いずれにせよ $\mathbb{N}$ で正しいが T で証明できない Σ_{n+1} 文がある.

よって $\mathbb{N}$ で正しいが T で証明できない Π_n 文がある.



定理の証明

Proof.

T を無矛盾かつ $\text{Th}(T)$ が Π_{n+1} -定義可能な理論とする.

Σ_n 論理式 $\tau(x, y)$ について, $\forall y \tau(x, y)$ が $\text{Th}(T)$ を定義するとする.
 次を満たす Σ_{n+1} 文 φ をとる:

$$\text{PA} \vdash \varphi \leftrightarrow \exists y (\neg \tau(\ulcorner \varphi \urcorner, y) \wedge \forall z \leq y \tau(\ulcorner \neg \varphi \urcorner, z)).$$

ψ を Σ_{n+1} 文 $\exists y (\neg \tau(\ulcorner \neg \varphi \urcorner, y) \wedge \forall z < y \tau(\ulcorner \varphi \urcorner, z))$ とする.

T は無矛盾なので $\varphi \notin \text{Th}(T)$ もしくは $\neg \varphi \notin \text{Th}(T)$.

つまり $\mathbb{N} \models \exists y \neg \tau(\ulcorner \varphi \urcorner, y) \vee \exists y \neg \tau(\ulcorner \neg \varphi \urcorner, y)$ なので $\mathbb{N} \models \varphi \vee \psi$.

(i) $\mathbb{N} \models \varphi$ とすると, $\mathbb{N} \models \exists y \neg \tau(\ulcorner \varphi \urcorner, y)$ なので $\varphi \notin \text{Th}(T)$.

(ii) $\mathbb{N} \models \psi$ とすると同様に $\neg \varphi \notin \text{Th}(T)$.

$\text{PA} \vdash \psi \rightarrow \neg \varphi$ なので $\psi \notin \text{Th}(T)$.

いずれにせよ $\mathbb{N}$ で正しいが T で証明できない Σ_{n+1} 文がある.

よって $\mathbb{N}$ で正しいが T で証明できない Π_n 文がある.



定理の証明

Proof.

T を無矛盾かつ $\text{Th}(T)$ が Π_{n+1} -定義可能な理論とする.

Σ_n 論理式 $\tau(x, y)$ について, $\forall y \tau(x, y)$ が $\text{Th}(T)$ を定義するとする.
 次を満たす Σ_{n+1} 文 φ をとる:

$$\text{PA} \vdash \varphi \leftrightarrow \exists y (\neg \tau(\ulcorner \varphi \urcorner, y) \wedge \forall z \leq y \tau(\ulcorner \neg \varphi \urcorner, z)).$$

ψ を Σ_{n+1} 文 $\exists y (\neg \tau(\ulcorner \neg \varphi \urcorner, y) \wedge \forall z < y \tau(\ulcorner \varphi \urcorner, z))$ とする.

T は無矛盾なので $\varphi \notin \text{Th}(T)$ もしくは $\neg \varphi \notin \text{Th}(T)$.

つまり $\mathbb{N} \models \exists y \neg \tau(\ulcorner \varphi \urcorner, y) \vee \exists y \neg \tau(\ulcorner \neg \varphi \urcorner, y)$ なので $\mathbb{N} \models \varphi \vee \psi$.

(i) $\mathbb{N} \models \varphi$ とすると, $\mathbb{N} \models \exists y \neg \tau(\ulcorner \varphi \urcorner, y)$ なので $\varphi \notin \text{Th}(T)$.

(ii) $\mathbb{N} \models \psi$ とすると同様に $\neg \varphi \notin \text{Th}(T)$.

$\text{PA} \vdash \psi \rightarrow \neg \varphi$ なので $\psi \notin \text{Th}(T)$.

いずれにせよ $\mathbb{N}$ で正しいが T で証明できない Σ_{n+1} 文がある.

よって $\mathbb{N}$ で正しいが T で証明できない Π_n 文がある.

