

Rosser 証明可能性述語と超準的な証明

倉橋 太志

木更津工業高等専門学校

超準解析と数学基礎論のシンポジウム (NSA2017)

早稲田大学

2017 年 12 月 16 日

はじめに

第一不完全性定理 (Gödel, 1931)

T を再帰的公理化された $\mathbf{PA}$ の拡大理論とする.

T が Σ_1 -健全ならば T は不完全.

- Gödel は “ x は T で証明可能” を意味する論理式 $\mathbf{Pr}_T(x)$ (証明可能性述語) を用いて, 自分自身の T における証明不可能性を主張する文 φ を構成することでこの定理を示した.
- Rosser は $\mathbf{Pr}_T(x)$ に手を加えて得られる Rosser 証明可能性述語 $\mathbf{Pr}_T^R(x)$ を用いて Gödel の定理を改良した.

第一不完全性定理 (Rosser, 1936)

T を再帰的公理化された $\mathbf{PA}$ の拡大理論とする.

T が無矛盾ならば T は不完全.

はじめに

本講演の内容

いろいろな性質をもつ Rosser 証明可能性述語が超準的な証明の並べ替えによって構成できることを紹介する.

- ① 超準モデル上で良い振る舞いをするもの
M. Kikuchi and T. Kurahashi, *Universal Rosser Predicates, JSL*, 2017.
- ② 様相論理とうまく繋がるもの (最近証明できた内容について)

なぜ Rosser 証明可能性述語なのか?

次のもの等を分析するのに有用.

- ① 独立命題の性質
- ② (第二) 不完全性定理の限界
- ③ 超準的な証明の並び方

(本音) 標準, 超準が混ざった状況で証明の並びをいじるのが楽しい.

Contents

- ① 不完全性定理
- ② Rosser 証明可能性述語と Derivability Conditions
- ③ 超準モデルにおける Rosser 証明可能性述語
- ④ Rosser 証明可能性述語と様相論理

- ① 不完全性定理
- ② Rosser 証明可能性述語と Derivability Conditions
- ③ 超準モデルにおける Rosser 証明可能性述語
- ④ Rosser 証明可能性述語と様相論理

この講演では T はペアノ算術 PA を含む再帰的公理化された算術の言語 $\mathcal{L}_A$ の理論を表す.

PA

- $\forall x(0 \neq x + 1)$
- $\forall x \forall y(x + 1 = y + 1 \rightarrow x = y)$
- $\forall x(x + 0 = x)$
- $\forall x \forall y(x + (y + 1) = (x + y) + 1)$
- $\forall x(x \times 0 = 0)$
- $\forall x \forall y(x \times (y + 1) = (x \times y) + x)$
- 各 $\mathcal{L}_A$ -論理式 φ について,

$$\forall y_0 \cdots \forall y_{k-1}((\varphi(0) \wedge \forall x(\varphi(x) \rightarrow \varphi(x + 1))) \rightarrow \forall x \varphi(x))$$

基本的な定義

定義

- 含まれる量化記号が全てある項 t について $\forall x \leq t$ もしくは $\exists x \leq t$ という形である論理式を Δ_0 論理式という.
- Δ_0 論理式 ψ に対して
 $\exists x_0 \cdots \exists x_{k-1} \psi$ という形の論理式を Σ_1 論理式という.
- Δ_0 論理式 ψ に対して
 $\forall x_0 \cdots \forall x_{k-1} \psi$ という形の論理式を Π_1 論理式という.
- 論理式 φ が $\Delta_1(T) :\Leftrightarrow \varphi$ が T において Σ_1 論理式と Π_1 論理式の両方と同値.

基本的な定義

$\mathbb{N}$ を算術の標準モデルとする.

定義

- T は **Σ_1 -健全** : $\Leftrightarrow$ 任意の Σ_1 文 φ について, $T \vdash \varphi$ ならば $\mathbb{N} \models \varphi$.
- T は **Σ_1 -完全** : $\Leftrightarrow$ 任意の Σ_1 文 φ について, $\mathbb{N} \models \varphi$ ならば $T \vdash \varphi$.

事実

PA は Σ_1 -健全かつ Σ_1 -完全.

すなわち, 任意の Σ_1 文 φ について, $\mathbb{N} \models \varphi \iff \mathbf{PA} \vdash \varphi$.

超数学の算術化と不動点補題

コーディング (Gödel 数化) を行うことで, T に関する性質を $\mathbf{PA}$ の内部で議論することができる.

論理式 φ の Gödel 数を $\ulcorner \varphi \urcorner$ で表すとする.

任意の論理式 φ について, $T \vdash \varphi \iff \mathbb{N} \models \mathbf{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$

となる Σ_1 論理式 $\mathbf{Pr}_T(x)$ がとれる (T の証明可能性述語).

任意の論理式 φ について, $T \vdash \varphi \iff \mathbf{PA} \vdash \mathbf{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$.

不動点補題

各 (Π_1) 論理式 $\varphi(x)$ に対して, $\mathbf{PA} \vdash \varphi(\ulcorner \psi \urcorner) \leftrightarrow \psi$ を満たす (Π_1) 文 ψ が存在する.

第一不完全性定理

定義

$PA \vdash \varphi \leftrightarrow \neg \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$ を満たす Π_1 文 φ を T の **Gödel 文** という。

第一不完全性定理 (Gödel, 1931)

T の Gödel 文 φ について次が成り立つ：

- ① T が無矛盾ならば $T \not\vdash \varphi$.
- ② T が Σ_1 -健全ならば $T \not\vdash \neg\varphi$.

Proof.

$$\begin{aligned}
 T \vdash \varphi &\iff \mathbb{N} \models \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \\
 &\iff T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \quad (\Rightarrow \text{は } \Sigma_1\text{-完全性}, \Leftarrow \text{は } \Sigma_1\text{-健全性}) \\
 &\iff T \vdash \neg\varphi.
 \end{aligned}$$



Derivability Conditions

第二不完全性定理を証明するには Gödel の第一不完全性定理の証明を **PA** において実行すればよい。

そのためには、 T における証明可能性に関する事実を **PA** において証明できる必要がある。

Hilbert-Bernays-Löb Derivability Conditions (DC)

$$\mathbf{D1} : T \vdash \varphi \Rightarrow \mathbf{PA} \vdash \mathbf{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner).$$

$$\mathbf{D2} : \mathbf{PA} \vdash \mathbf{Pr}_T(\ulcorner \varphi \rightarrow \psi \urcorner) \rightarrow (\mathbf{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \mathbf{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner)).$$

$$\mathbf{D3} : \mathbf{PA} \vdash \mathbf{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \mathbf{Pr}_T(\ulcorner \mathbf{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \urcorner).$$

これらをまとめて **DC** と書くことにする。

特に **D3** は Σ_1 -完全性の形式化である次の条件の特別な場合。

$$\mathbf{S} : \varphi \text{ が } \Sigma_1 \text{ ならば, } \mathbf{PA} \vdash \varphi \rightarrow \mathbf{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner).$$

事実

Gödel の作った証明可能性述語 $\mathbf{Pr}_T(x)$ は **D1**, **D2**, **S** を満たす。
つまり **DC** を満たす。

第二不完全性定理

定義

Π_1 文 $\neg \text{Pr}_T(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$ を Con_T とかく.

第二不完全性定理 (Gödel, 1931)

T が無矛盾ならば, $T \not\vdash \text{Con}_T$.

特に DC を満たす証明可能性述語に対してこのことが成立する.

Proof.

$\text{Pr}_T(x)$ は DC を満たすので, 第一不完全性定理の証明を PA で実行できる.

すなわち T の Gödel 文 φ について $\text{PA} \vdash \text{Con}_T \rightarrow \neg \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$.

$\text{PA} \vdash \varphi \leftrightarrow \neg \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$ なので $\text{PA} \vdash \text{Con}_T \rightarrow \varphi$.

$T \vdash \text{Con}_T$ ならば $T \vdash \varphi$ となるので第一不完全性定理に反する. □

系

T が無矛盾ならば, $T \vdash \neg \text{Con}_T$ のモデルが存在する.

- ④ 不完全性定理
- ② **Rosser 証明可能性述語と Derivability Conditions**
- ③ 超準モデルにおける Rosser 証明可能性述語
- ④ Rosser 証明可能性述語と様相論理

Rosser 証明可能性述語

定義

Gödel の証明可能性述語 $\text{Pr}_T(x)$ に対して、次を満たす $\Delta_1(\text{PA})$ 論理式 $\text{Prf}_T(x, y)$ を **T の証明述語** という：

$$\text{PA} \vdash \forall x (\text{Pr}_T(x) \leftrightarrow \exists y \text{Prf}_T(x, y)).$$

定義

T の証明述語 $\text{Prf}_T(x, y)$ に対して、 Σ_1 論理式 $\text{Pr}_T^R(x)$ を

$$\exists y (\text{Prf}_T(x, y) \wedge \forall z \leq y \neg \text{Prf}_T(\neg(x), z))$$

と定め、これを T の **Rosser 証明可能性述語** という。

各証明述語に対して一つの Rosser 証明可能性述語が決まる。

Rosser の第一不完全性定理

命題

- ① $T \vdash$ ならば $PA \vdash \text{Pr}_T^R(\ulcorner \varphi \urcorner)$.
- ② $T \vdash \neg \varphi$ ならば $PA \vdash \neg \text{Pr}_T^R(\ulcorner \varphi \urcorner)$.

定義

$PA \vdash \varphi \leftrightarrow \neg \text{Pr}_T^R(\ulcorner \varphi \urcorner)$ を満たす Π_1 文 φ を T の **Rosser 文** という.

第一不完全性定理 (Rosser, 1936)

T が無矛盾ならば, T の Rosser 文 φ について, $T \not\vdash \varphi$ かつ $T \not\vdash \neg \varphi$.

Proof.

$T \vdash \varphi \Rightarrow PA \vdash \text{Pr}_T^R(\ulcorner \varphi \urcorner) \Rightarrow T \vdash \neg \varphi$.

$T \vdash \neg \varphi \Rightarrow PA \vdash \neg \text{Pr}_T^R(\ulcorner \varphi \urcorner) \Rightarrow T \vdash \varphi$.



Rosser 証明可能性述語と第二不完全性定理

定義

Π_1 文 $\neg \text{Pr}_T^R(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$ を Con_T^R とかく.

命題

$\text{PA} \vdash \text{Con}_T^R$.

Proof.

$T \vdash \neg 0 = 1$ なので $\text{PA} \vdash \neg \text{Pr}_T^R(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$. □

系

Rosser 証明可能性述語 $\text{Pr}_T^R(x)$ は DC を満たさない.
特に D2 と D3 の少なくとも一方を満たさない.

Kreisel and Takeuti の問題

問題 (Kreisel and Takeuti, 1974)

T の Rosser 証明可能性述語に対してどのような性質が成り立つか？

$$D2 : PA \vdash \text{Pr}_T^R(\ulcorner \varphi \rightarrow \psi \urcorner) \rightarrow (\text{Pr}_T^R(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_T^R(\ulcorner \psi \urcorner)).$$

$$D3 : PA \vdash \text{Pr}_T^R(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_T^R(\ulcorner \text{Pr}_T^R(\ulcorner \varphi \urcorner) \urcorner).$$

$$S : \varphi \text{ が } \Sigma_1 \text{ ならば, } PA \vdash \varphi \rightarrow \text{Pr}_T^R(\ulcorner \varphi \urcorner).$$

条件 S は必ず成立しない。

命題

T が無矛盾ならば, ある Σ_1 文 φ があって, $T \not\vdash \varphi \rightarrow \text{Pr}_T^R(\ulcorner \varphi \urcorner)$.

Proof.

$$PA \vdash \varphi \leftrightarrow \exists x(\text{Prf}_T(\ulcorner \neg \varphi \urcorner, x) \wedge \forall y < x \neg \text{Prf}_T(\ulcorner \varphi \urcorner, y))$$

を満たす Σ_1 文 φ をとればよい。



様々な Rosser 証明可能性述語

定理 (Guaspari and Solovay, 1979)

D2 と D3 の成立しないような Rosser 証明可能性述語が存在する.

定理 (Arai, 1990)

D2 の成立する Rosser 証明可能性述語と D3 の成立する Rosser 証明可能性述語が存在する.

系

D2, D3 の一方のみでは第二不完全性定理は証明できない.

これらの定理の証明は、超準的な証明を並べ替えることで新たな証明述語を作る、というもの.

- ① 不完全性定理
- ② Rosser 証明可能性述語と Derivability Conditions
- ③ 超準モデルにおける **Rosser** 証明可能性述語
- ④ Rosser 証明可能性述語と様相論理

超準モデルにおける Rosser 証明可能性述語

命題

$PA \vdash \text{Con}_T \rightarrow \forall x (\text{Pr}_T(x) \leftrightarrow \text{Pr}_T^R(x)).$

- $PA + \text{Con}_T$ のモデルにおいて $\text{Pr}_T(x)$ と $\text{Pr}_T^R(x)$ には違いはない。
- $\text{Pr}_T^R(x)$ の性質は $PA + \neg \text{Con}_T$ のモデルにおいてどのような挙動をするかで決まる。

定義

PA のモデル M について,

$$\text{Pr}_T^R(M) = \{\varphi : \varphi \text{ は文で } M \models \text{Pr}_T^R(\ulcorner \varphi \urcorner)\}.$$

問い

$M \models \neg \text{Con}_T$ について, $\text{Pr}_T^R(M)$ はどんな理論? 無矛盾? 完全?

$M \models \neg \text{Con}_T$ に対して $\text{Pr}_T^R(M)$ に秩序がないようにするのは簡単.

命題

ある $\text{Pr}_T^R(x)$ が存在して, 全ての $\text{PA} + \neg \text{Con}_T$ のモデル M について $\text{Pr}_T^R(M)$ が矛盾した理論となる.

Proof.

T の Rosser 文 π をとり, ψ を $\pi \wedge 0 = 0$ とする.

再帰的関数 $g(x)$ を次のように定める:

$$g(m) = \begin{cases} \varphi & m \text{ が } \varphi \text{ の } T \text{ における証明のとき,} \\ 0 = 0 & m \text{ がどんな論理式の証明でもないとき.} \end{cases}$$

再帰的関数 $f(x)$ を次のように定める:

- $g(0), g(1), \dots, g(m)$ の中に $\pi, \neg\pi, \neg\neg\psi, \neg\psi$ がないとき: $f(m) = g(m)$.
- p が $g(p)$ が上の文のいずれかとなる最小数のとき, $f(p) = \pi$,
 $f(p+1) = \neg\psi$, それ以降は $f(p+2+m) = g(p+m)$ とする.

$\text{Prf}_T(x, y)$ を $f(y) = x$ と定めればよい.

このとき $\text{PA} \vdash \forall x (\text{Pr}_T(x) \leftrightarrow \exists y \text{Prf}_T(x, y))$,

$$\text{PA} \vdash \neg \text{Con}_T \rightarrow \text{Pr}_T^R(\ulcorner \pi \urcorner) \wedge \text{Pr}_T^R(\ulcorner \neg\psi \urcorner).$$



問い

$M \models \neg \text{Con}_T$ に対して $\text{Pr}_T^R(M)$ に秩序をつくるには？

答え

D2 と D4.

D4 : $T \vdash \neg \text{Pr}_T^R(\ulcorner \varphi \urcorner)$ ならば $T \vdash \neg \varphi$.

定理 (Kikuchi and Kurahashi, 2017)

D2 と D4 を満たす T の Rosser 証明可能性述語 $\text{Pr}_T^R(x)$ が存在する.

超準モデルにおける D2

補題

$\text{Pr}_T^R(x)$ が D2 を満たすなら,
 $\text{PA} \vdash \text{Pr}_T^R(\ulcorner \varphi \wedge \psi \urcorner) \leftrightarrow \text{Pr}_T^R(\ulcorner \varphi \urcorner) \wedge \text{Pr}_T^R(\ulcorner \psi \urcorner).$

命題

$\text{Pr}_T^R(x)$ が D2 を満たすなら, 任意のモデル M において $\text{Pr}_T^R(M)$ は無矛盾.

Proof.

$\text{Pr}_T^R(M)$ が矛盾すると仮定すると, ある $\varphi_0, \dots, \varphi_{n-1} \in \text{Pr}_T^R(M)$ があって $T \vdash \neg(\varphi_0 \wedge \dots \wedge \varphi_{n-1}).$

このとき $M \models \bigwedge_{i < n} \text{Pr}_T^R(\ulcorner \varphi_i \urcorner)$ かつ $\text{PA} \vdash \neg \text{Pr}_T^R(\ulcorner \bigwedge_{i < n} \varphi_i \urcorner).$

$\text{Pr}_T^R(x)$ は D2 を満たすので, $\text{PA} \vdash \neg \bigwedge_{i < n} \text{Pr}_T^R(\ulcorner \varphi_i \urcorner)$ となりおかしい. □

超準モデルにおける D4

命題

$\text{Pr}_T^R(x)$ が D2 と D4 を満たすなら, T の任意の無矛盾拡大理論 T' について $T + \{\text{Pr}_T^R(\ulcorner \varphi \urcorner) : \varphi \in T'\}$ は無矛盾.

Proof.

$T + \{\text{Pr}_T^R(\ulcorner \varphi \urcorner) : \varphi \in T'\}$ が矛盾すると仮定すると,
ある $\varphi_0, \dots, \varphi_{n-1} \in T'$ について, $T \vdash \neg \bigwedge_{i < n} \text{Pr}_T^R(\ulcorner \varphi_i \urcorner)$.
D2 より $T \vdash \neg \text{Pr}_T^R(\ulcorner \bigwedge_{i < n} \varphi_i \urcorner)$.
D4 より $T \vdash \neg (\varphi_0 \wedge \dots \wedge \varphi_{n-1})$.
これは T' の無矛盾性に反する.



定理 (Kikuchi and Kurahashi, 2017)

ある T の Rosser 証明可能性述語 $\text{Pr}_T^R(x)$ が存在して、 T の任意の無矛盾完全拡大理論 T' についてある $M \models T$ が存在して、 $\text{Pr}_T^R(M) = T'$ となる。

Proof.

$\text{Pr}_T^R(x)$ を D2 と D4 を満たす T の Rosser 証明可能性述語とする。

D2 と D4 より $T + \{\text{Pr}_T^R(\ulcorner \varphi \urcorner) : \varphi \in T'\}$ は無矛盾なので、そのモデル M がとれる。

D2 より $\text{Pr}_T^R(M)$ は無矛盾で、 T' は完全なので $\text{Pr}_T^R(M) = T'$ 。 □

例えば $T = \text{PA}$ の場合を考えてみる。

$\text{TA} = \{\varphi : \mathbb{N} \models \varphi\}$ は PA の無矛盾完全拡大。

あるモデル $M \models \text{PA} + \neg \text{Con}_{\text{PA}}$ が存在して、 $\text{Pr}_{\text{PA}}^R(M) = \text{TA}$ となる。

つまり、 M において、常に $\mathbb{N}$ で正しい文がその否定よりも先に必ず証明できる。

- ① 不完全性定理
- ② Rosser 証明可能性述語と Derivability Conditions
- ③ 超準モデルにおける Rosser 証明可能性述語
- ④ **Rosser 証明可能性述語と様相論理**

Löb の定理

Löb の定理, 1955

任意の文 φ について, $T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \varphi$ ならば $T \vdash \varphi$.

形式化された Löb の定理

任意の文 φ について, $\text{PA} \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$.

- $\text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$ を $\Box_T \varphi$ と略記すれば, $T \vdash \varphi$ ならば $T \vdash \Box_T \varphi$.
- $T \vdash \Box_T(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box_T \varphi \rightarrow \Box_T \psi)$ や
 $T \vdash \Box_T(\Box_T \varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \Box_T \varphi$.
- こういった性質は様相論理で取り扱われるものであり, この点に注目して, 様相論理を用いて T の証明可能性述語に関してどのような性質が成り立つのかを分析する研究が行われている.

様相論理 K と GL

様相命題論理の言語は命題論理の言語に新たな論理結合子 $\Box$ を加えたもの。
 次の公理と推論規則から得られる様相命題論理を **K** という。

定義 (様相論理 K)

公理

- 様相命題論理の言語の恒真式,
- 様相命題論理式 A, B について $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$.

推論規則

モダス・ポネンス
$$\frac{A \rightarrow B, A}{B}$$

ネセシテーション
$$\frac{A}{\Box A}$$

定義 (様相論理 GL)

K に次の公理を加えることで得られる様相命題論理を **GL** という。

- 様相命題論理式 A について $\Box(\Box A \rightarrow A) \rightarrow \Box A$.

算術的解釈と GL の算術的健全性

様相命題論理 GL の公理と推論規則は、標準的な証明可能性述語がもつ性質を抜き出したもの。

そのことを明確に述べるために次の概念を用意する。

定義（算術的解釈）

様相論理式から算術の文への写像 f で次の条件を満たすものを $\mathbf{Pr}_T(x)$ に基づく算術的解釈という：

- $f(\perp)$ は $0 = 1$.
- $f(\neg A)$ は $\neg f(A)$.
- $f(A \circ B)$ は $f(A) \circ f(B)$.
- $f(\Box A)$ は $\mathbf{Pr}_T(\ulcorner f(A) \urcorner)$.

命題（GL の算術的健全性）

任意の様相論理式 A について

GL $\vdash A$ ならば、 $\mathbf{Pr}_T(x)$ に基づく任意の算術的解釈 f について $T \vdash f(A)$.

Solovay の算術的完全性定理

定義 ($\text{Pr}_T(x)$ の証明可能性論理)

$\text{PL}(\text{Pr}_T) = \{A : \text{Pr}_T(x) \text{ に基づく任意の } f \text{ について } T \vdash f(A)\}$
 を $\text{Pr}_T(x)$ の証明可能性論理という。

- 算術的健全性は $\text{GL} \subseteq \text{PL}(\text{Pr}_T)$ とかける。
- 各 $A \in \text{PL}(\text{Pr}_T)$ は、 T が証明できる、 $\text{Pr}_T(x)$ の様相演算子としての性質といえる。

$\text{Pr}_T(x)$ の証明可能性論理が GL と一致することが Solovay によって証明されており、その定理と証明方法はこの研究分野の一つの礎となっている。

Solovay の算術的完全性定理, 1976

T を Σ_1 -健全とすると、 $\text{PL}(\text{Pr}_T) = \text{GL}$ 。

Rosser 証明可能性述語と様相論理

Rosser 証明可能性述語 $\text{Pr}_T^R(x)$ について, その証明可能性論理 $\text{PL}(\text{Pr}_T^R)$ はどんな論理か?

定義 (正規様相論理)

K を含み, モダス・ポネンス, ネセシテーション, 代入で閉じている様相論理を **正規様相論理** という.

$\text{Pr}_T^R(x)$ が D2 を満たす $\iff \text{PL}(\text{Pr}_T^R)$ は正規様相論理.

$T \vdash \text{Con}_T^R$ なので $\neg \Box \perp \in \text{PL}(\text{Pr}_T^R)$.

定義 (様相論理 KD)

K に公理 $\neg \Box \perp$ を加えることで得られる様相命題論理を **KD** という.

命題

$\text{Pr}_T^R(x)$ が D2 を満たすならば $\text{KD} \subseteq \text{PL}(\text{Pr}_T^R)$.

KD の算術的完全性

D2 を満たす $\text{Pr}_T^R(x)$ について共通して成立する性質はまだあるか？

定理

$\text{PL}(\text{Pr}_T^R) = \text{KD}$ となる Rosser 証明可能性述語 $\text{Pr}_T^R(x)$ が存在する.

Solovay の手法および超準的な証明の並べ替えにより証明した.

今後の課題

$\text{Pr}_T(x)$ と $\text{Pr}_T^R(x)$ に対応する様相 $\Box, \Box^R$ を同時に扱う 2 重様相論理 **GR** が Shavrukov (1991) によって分析されている.

$\text{Pr}_T(x)$ と D2 を満たす $\text{Pr}_T^R(x)$ に対応する様相論理を構築する！

参考文献

Rosser 文に関する性質など、紹介しきれなかったことがいろいろある。

- Kurahashi, Henkin sentences and local reflection principles for Rosser provability, *APAL*, 2016.
- 倉橋太志, Rosser 可証性述語について, 科学基礎論研究, 2014.

参考文献

- Arai, T., Derivability conditions on Rosser's provability predicates, *Notre Dame J. Fml. Log.*, 1990.
- Guaspari, D. and Solovay, R. M., Rosser sentences, *Ann. Math. Log.*, 1979.
- Shavrukov, Yu. V., On Rosser's provability predicates, *Zeit. Math. Log. Grund. Math.*, 1991.