理論の部分保存性について

倉橋太志

木更津工業高等専門学校

第 **3** 回山陰基礎論・解析学研究集会
@皆生
2016 年 **1** 月 **30** 日（土）

内容

内容

論理式，文，理論

数学的事象を記述するのに用いる演算や関係の記号を決めると，それらの記号で書ける内容が決まる．

- あらかじめ決めておいた記号と，$\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \exists, \forall$ などを用いて書ける次のような文字列を論理式という．
  $\exists u(x = u + u) \vee x = 1$
  $\forall u \exists v(u \in v)$

論理式，文，理論

数学的事象を記述するのに用いる演算や関係の記号を決めると，それらの記号で書ける内容が決まる.

- あらかじめ決めておいた記号と，$\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \exists, \forall$ などを用いて書ける次のような文字列を論理式という.
  $\exists u(x = u + u) \vee x = 1$
  $\forall u \exists v(u \in v)$
  一つ目の論理式において x は自由変数であり，二つ目の論理式は自由変数をもたない.
- 自由変数をもたない論理式を文という.

論理式，文，理論

数学的事象を記述するのに用いる演算や関係の記号を決めると，それらの記号で書ける内容が決まる．

- あらかじめ決めておいた記号と，$\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \exists, \forall$ などを用いて書ける次のような文字列を論理式という．
  $\exists u(x = u + u) \vee x = 1$
  $\forall u \exists v(u \in v)$
  一つ目の論理式において x は自由変数であり，二つ目の論理式は自由変数をもたない．
- 自由変数をもたない論理式を文という．
- 文の集合を理論という（群の公理からなる集合は群の理論）．

本発表では算術の言語 $\{0, 1, +, \times, \leq\}$ の記号のみを用いて書ける文からなる理論のみを扱う．

証明可能性，無矛盾性

T, S を理論，φ を論理式とする．

- T の有限個の文を用いて φ を導出できるとき，φ は T において証明可能であるといい，$T \vdash \varphi$ とかく．

証明可能性，無矛盾性

T, S を理論，φ を論理式とする.

- T の有限個の文を用いて φ を導出できるとき，φ は T において証明可能であるといい，$T \vdash \varphi$ とかく.
- T において φ が証明可能でないとき，$T \nvdash \varphi$ とかく.

証明可能性，無矛盾性

$\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{S}$ を理論，φ を論理式とする．

- $\boldsymbol{T}$ の有限個の文を用いて φ を導出できるとき，φ は $\boldsymbol{T}$ において証明可能であるといい，$\boldsymbol{T} \vdash \varphi$ とかく．
- $\boldsymbol{T}$ において φ が証明可能でないとき，$\boldsymbol{T} \nvdash \varphi$ とかく．
- $\boldsymbol{S}$ において証明可能な文が全て $\boldsymbol{T}$ において証明可能なとき $\boldsymbol{T}$ は $\boldsymbol{S}$ の拡大といい，$\boldsymbol{T} \nvdash \boldsymbol{S}$ とかく．

証明可能性，無矛盾性

T, S を理論，φ を論理式とする．

- T の有限個の文を用いて φ を導出できるとき，φ は T において証明可能であるといい，$T \vdash \varphi$ とかく．
- T において φ が証明可能でないとき，$T \nvdash \varphi$ とかく．
- S において証明可能な文が全て T において証明可能なとき T は S の拡大といい，$T \vdash S$ とかく．
- $T \vdash \psi$ かつ $T \vdash \neg\psi$ となる文 ψ が存在するとき，T は矛盾するという．

証明可能性，無矛盾性

T, S を理論，φ を論理式とする．

- T の有限個の文を用いて φ を導出できるとき，φ は T において証明可能であるといい，$T \vdash \varphi$ とかく．
- T において φ が証明可能でないとき，$T \nvdash \varphi$ とかく．
- S において証明可能な文が全て T において証明可能なとき T は S の拡大といい，$T \nvdash S$ とかく．
- $T \vdash \psi$ かつ $T \vdash \neg\psi$ となる文 ψ が存在するとき，T は矛盾するという．
- T が矛盾しないとき，T は無矛盾であるという．

証明可能性，無矛盾性

T, S を理論，φ を論理式とする．

- T の有限個の文を用いて φ を導出できるとき，φ は T において証明可能であるといい，$T \vdash \varphi$ とかく．
- T において φ が証明可能でないとき，$T \nvdash \varphi$ とかく．
- S において証明可能な文が全て T において証明可能なとき T は S の拡大といい，$T \nvdash S$ とかく．
- $T \vdash \psi$ かつ $T \vdash \neg\psi$ となる文 ψ が存在するとき，T は矛盾するという．
- T が矛盾しないとき，T は無矛盾であるという．
- 与えられた文 ψ が T の元かどうかを判定するプログラムをかけるとき，T は計算可能であるという．

ペアノ算術

PA: ペアノ算術 **(Peano Arithmetic)**
⋯ 算術の基本的な公理と帰納法公理を持つ理論

ペアノ算術

PA: ペアノ算術 (Peano Arithmetic)
$\cdots$ 算術の基本的な公理と帰納法公理を持つ理論

PA の公理

- $\forall x(0 \neq x+1)$
- $\forall x \forall y(x+1=y+1 \to x=y)$
- $\forall x(x+0=x)$
- $\forall x \forall y(x+(y+1)=(x+y)+1)$
- $\forall x(x \times 0=0)$
- $\forall x \forall y(x \times (y+1)=(x \times y)+x)$
- 全ての論理式 φ について
  $\forall y_0 \cdots \forall y_{k-1}((\varphi(0) \land \forall x(\varphi(x) \to \varphi(x+1))) \to \forall x \varphi(x))$

ペアノ算術

PA: ペアノ算術 (Peano Arithmetic)
⋯ 算術の基本的な公理と帰納法公理を持つ理論

PA の公理

- $\forall x(0 \neq x+1)$
- $\forall x \forall y(x+1=y+1 \to x=y)$
- $\forall x(x+0=x)$
- $\forall x \forall y(x+(y+1)=(x+y)+1)$
- $\forall x(x \times 0=0)$
- $\forall x \forall y(x \times (y+1)=(x \times y)+x)$
- 全ての論理式 φ について
  $\forall y_0 \cdots \forall y_{k-1}((\varphi(0) \land \forall x(\varphi(x) \to \varphi(x+1))) \to \forall x \varphi(x))$

本発表では計算可能かつ無矛盾な **PA** の拡大理論のみを扱う.
単に理論といえば，このような理論を意味するとし，T や S で理論を表すとする.

算術的階層

論理式を量化記号 $\forall$, $\exists$ の含み方で分類する.

論理式のクラス $\boldsymbol{\Sigma_n}$ と $\boldsymbol{\Pi_n}$ を再帰的に定義する.

- 含まれる量化記号が全て $\forall x \le t$, $\exists x \le t$ という形をしている論理式を $\boldsymbol{\Sigma_0}$ 論理式もしくは $\boldsymbol{\Pi_0}$ 論理式という.
- $\boldsymbol{\Pi_n}$ 論理式 φ について，$\exists x \varphi$ という形の論理式を $\boldsymbol{\Sigma_{n+1}}$ 論理式という.
- $\boldsymbol{\Sigma_n}$ 論理式 φ について，$\forall x \varphi$ という形の論理式を $\boldsymbol{\Pi_{n+1}}$ 論理式という.

- 本発表では $\boldsymbol{\Gamma}$ を $\boldsymbol{\Sigma_n}$ もしくは $\boldsymbol{\Pi_n}$ $(n \ge 1)$ とする.
- $\boldsymbol{\Gamma} = \boldsymbol{\Sigma_n}$ のとき，$\boldsymbol{\Gamma^d} = \boldsymbol{\Pi_n}$
  $\boldsymbol{\Gamma} = \boldsymbol{\Pi_n}$ のとき，$\boldsymbol{\Gamma^d} = \boldsymbol{\Sigma_n}$ とする（$\boldsymbol{\Gamma^d}$ は $\boldsymbol{\Gamma}$ の双対）.

内容

不完全性定理

$\boldsymbol{T}$ を理論とすると，必ず $\boldsymbol{T}$ において証明も反証もできない文がとれてしまう，というのが **Gödel** による第一不完全性定理.

第一不完全性定理（Gödel, 1931; Rosser, 1936）

ある $\boldsymbol{\Pi_1}$ 文 φ が存在して，$\boldsymbol{T} \nvdash \varphi$ かつ $\boldsymbol{T} \nvdash \neg\varphi$.

不完全性定理

T を理論とすると，必ず T において証明も反証もできない文がとれてしまう，というのが **Gödel** による第一不完全性定理.

第一不完全性定理（Gödel, 1931; Rosser, 1936）

ある Π_1 文 φ が存在して，$T \nvdash \varphi$ かつ $T \nvdash \neg\varphi$.

Π_1 文 Con_T を “T は無矛盾である” を意味する文とすると，Con_T は T においては証明できない.

第二不完全性定理（Gödel, 1931）

$T \nvdash \mathsf{Con}_T$.

第一不完全性定理の拡張

問

うまく理論 S と T を選んで，どんな文も S と T の少なくとも一方で証明，または反証されるようにできるか？

第一不完全性定理の拡張

問

うまく理論 $\boldsymbol{S}$ と $\boldsymbol{T}$ を選んで，どんな文も $\boldsymbol{S}$ と $\boldsymbol{T}$ の少なくとも一方で証明，または反証されるようにできるか？

答えは **NO.**

定理（Mostowski, 1961）

$\{\boldsymbol{T_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ を理論の **r.e.** 列とする．
このとき，ある文 φ が存在して，全ての $i \in \mathbb{N}$ について $\boldsymbol{T_i} \nvdash \varphi$ かつ $\boldsymbol{T_i} \nvdash \neg\varphi$.

つまり，$\boldsymbol{S}$ と $\boldsymbol{T}$ の両方から証明も反証でもできない文が存在する．

第二不完全性定理の拡張

Kreisel は次のような性質に気づいた.

定理 (Kreisel, 1962)

任意の $\mathbf{\Pi_1}$ 文 φ について, $T \cup \{\neg\mathsf{Con}_T \vdash \varphi\}$ ならば $T \vdash \varphi$ である.

- つまり, $\neg\mathsf{Con}_T$ という主張は T に対して $\mathbf{\Pi_1}$ 文に関する新たな事実を付け加えない.

第二不完全性定理の拡張

Kreisel は次のような性質に気づいた．

定理 (Kreisel, 1962)

任意の Π_1 文 φ について，$T \cup \{\neg \mathsf{Con}_T \vdash \varphi\}$ ならば $T \vdash \varphi$ である．

- つまり，$\neg \mathsf{Con}_T$ という主張は T に対して Π_1 文に関する新たな事実を付け加えない．
- **Kreisel** の定理は第二不完全性定理の拡張である．

Π_1 文 φ として $0 = 1$ をとると，
$T \nvdash 0 = 1$ なので $T + \neg \mathsf{Con}_T \nvdash 0 = 1$，つまり $T \nvdash \mathsf{Con}_T$．

第二不完全性定理の拡張

Kreisel は次のような性質に気づいた.

定理 (Kreisel, 1962)

任意の Π_1 文 φ について, $T \cup \{\neg \mathrm{Con}_T \vdash \varphi\}$ ならば $T \vdash \varphi$ である.

- つまり, $\neg \mathrm{Con}_T$ という主張は T に対して Π_1 文に関する新たな事実を付け加えない.
- **Kreisel** の定理は第二不完全性定理の拡張である.

Π_1 文 φ として $0 = 1$ をとると,
$T \nvdash 0 = 1$ なので $T + \neg \mathrm{Con}_T \nvdash 0 = 1$, つまり $T \nvdash \mathrm{Con}_T$.

注意

Kreisel の定理（第二不完全性定理）は $T \vdash \neg \mathrm{Con}_T$ となる理論 T については自明な結果である.

内容

部分保存性

S と T を理論，φ を文とする．

定義

- S が T 上で Γ-保存的 $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ 任意の Γ 文 ψ について，$S \vdash \psi$ ならば $T \vdash \psi$.
- φ が T 上で Γ-保存的 $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ $T \cup \{\varphi\}$ が T 上で Γ-保存的.

- **Kreisel** の定理は，Σ_1 文 $\neg\mathrm{Con}_T$ が T 上で Π_1-保存的であることを主張している．

部分保存性

S と T を理論，φ を文とする．

定義

- S が T 上で Γ-保存的 $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ 任意の Γ 文 ψ について，$S \vdash \psi$ ならば $T \vdash \psi$.
- φ が T 上で Γ-保存的 $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ $T \cup \{\varphi\}$ が T 上で Γ-保存的.

- **Kreisel** の定理は，Σ_1 文 $\neg\mathrm{Con}_T$ が T 上で Π_1-保存的であることを主張している．
- Π_1 文 Con_T については **Smoryński** によって次が示されている．

定理 (Smoryński, 1980)

以下は同値：

1. Con_T は T 上で Σ_1-保存的.
2. T は Σ_1-健全 （T において証明可能な Σ_1 文は全て正しい）.

部分保存性

S と T を理論，φ を文とする．

定義

- S が T 上で Γ-保存的 $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ 任意の Γ 文 ψ について，$S \vdash \psi$ ならば $T \vdash \psi$.
- φ が T 上で Γ-保存的 $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ $T \cup \{\varphi\}$ が T 上で Γ-保存的.

- **Kreisel** の定理は，Σ_1 文 $\neg\mathrm{Con}_T$ が T 上で Π_1-保存的であることを主張している．
- Π_1 文 Con_T については **Smoryński** によって次が示されている．

定理 (Smoryński, 1980)

以下は同値：

1. Con_T は T 上で Σ_1-保存的.
2. T は Σ_1-健全 （T において証明可能な Σ_1 文は全て正しい）.

つまり T が Σ_1-健全ならば
Con_T は T 上で Σ_1-保存的であり，$\neg\mathrm{Con}_T$ は T 上で Π_1-保存的.

非自明に $\mathbf{\Gamma}$-保存的な $\mathbf{\Gamma}^d$ 文

- $\boldsymbol{T} \vdash \varphi$ ならば φ は自明に $\boldsymbol{T}$ 上で $\mathbf{\Gamma}$-保存的.

非自明に $\mathbf{\Gamma}$-保存的な $\mathbf{\Gamma}^d$ 文

- $\boldsymbol{T} \vdash \varphi$ ならば φ は自明に $\boldsymbol{T}$ 上で $\mathbf{\Gamma}$-保存的.
- なので，“$\boldsymbol{T}$ 上で $\mathbf{\Gamma}$-保存的” である文 φ は $\boldsymbol{T} \nvdash \varphi$ でないと意味がない.
- では，そのような文は必ずとれるか？

非自明に $\mathbf{\Gamma}$-保存的な $\mathbf{\Gamma}^d$ 文

- $\boldsymbol{T} \vdash \varphi$ ならば φ は自明に $\boldsymbol{T}$ 上で $\mathbf{\Gamma}$-保存的.
- なので，“$\boldsymbol{T}$ 上で $\mathbf{\Gamma}$-保存的” である文 φ は $\boldsymbol{T} \nvdash \varphi$ でないと意味がない.
- では，そのような文は必ずとれるか？

答え：**YES**

定理 (Guaspari, 1979)

$\boldsymbol{T} \nvdash \varphi$ かつ φ が $\boldsymbol{T}$ 上で $\mathbf{\Gamma}$-保存的であるような $\mathbf{\Gamma}^d$ 文 φ が存在する.

このような文 φ は $\boldsymbol{T}$ 上で非自明に $\mathbf{\Gamma}$-保存的であるということにする.

非自明に $\mathbf{\Gamma}$-保存的な $\mathbf{\Gamma}^d$ 文

- $T \vdash \varphi$ ならば φ は自明に T 上で $\mathbf{\Gamma}$-保存的.
- なので，“T 上で $\mathbf{\Gamma}$-保存的” である文 φ は $T \nvdash \varphi$ でないと意味がない.
- では，そのような文は必ずとれるか？

答え：**YES**

定理 (Guaspari, 1979)

$T \nvdash \varphi$ かつ φ が T 上で $\mathbf{\Gamma}$-保存的であるような $\mathbf{\Gamma}^d$ 文 φ が存在する.

このような文 φ は T 上で非自明に $\mathbf{\Gamma}$-保存的であるということにする.
Con_T の場合のように次も成り立つ.

定理 (Solovay, 19??)

次を満たす $\mathbf{\Gamma}^d$ 文 φ が存在する：

- φ は T 上で非自明に $\mathbf{\Gamma}$-保存的;
- $\neg\varphi$ は T 上で非自明に $\mathbf{\Gamma}^d$-保存的.

Guaspari の問題

- $\boldsymbol{T}$ 上で非自明に $\boldsymbol{\Gamma}$-保存的な $\boldsymbol{\Gamma^d}$ 文は $\boldsymbol{T}$ において証明も反証もできない文である.
- つまり **Guaspari** の定理は第一不完全性定理の拡張である.

Guaspari の問題

- T 上で非自明に Γ-保存的な Γ^d 文は T において証明も反証もできない文である.
- つまり **Guaspari** の定理は第一不完全性定理の拡張である.
- それでは，Guaspari の定理を Mostowski の定理の形で拡張できないだろうか？

Guaspari の問題

理論の任意の r.e 列 $\{T_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ に対して，ある Γ^d 文 φ が存在して次を満たすか？

- 全ての $i \in \mathbb{N}$ について $T_i \vdash \varphi$,
- 全ての $i \in \mathbb{N}$ について φ は T_i 上で Γ-保存的.

Guaspari は特に２つの理論 S と T について成り立つだろうか？とも述べている.

遺伝的保存性

Guaspri はこの問に対して部分的な解答を与えている.

遺伝的保存性

Guaspri はこの問に対して部分的な解答を与えている.

定義

φ が T 上で遺伝的に Γ-保存的
$\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ $T \vdash S \vdash \mathbf{PA}$ となる任意の理論 S について, φ は S 上で Γ-保存的.

遺伝的保存性

Guaspri はこの問に対して部分的な解答を与えている.

定義

φ が T 上で遺伝的に Γ-保存的
$\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ $T \vdash S \vdash \mathsf{PA}$ となる任意の理論 S について，φ は S 上で Γ-保存的.

定理 (Guaspari, 1979)

$T \nvdash \varphi$ かつ φ が T 上で遺伝的に Γ-保存的であるような Γ^d 文 φ が存在する.

つまり，T が S の拡大である場合には共通の非自明に Γ-保存的な Γ^d 文がとれる.

Guaspari の問題の否定的解決

しかし，**Guaspari** の問題には **Misercque** によって反例が与えられている．

Guaspari の問題の否定的解決

しかし，**Guaspari** の問題には **Misercque** によって反例が与えられている．

定理（Misercque, 1983）

ある理論の **r.e.** 列 $\{T_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ が存在して，どんな $\mathbf{\Gamma}$ についても，全ての T_i で非自明に $\mathbf{\Gamma}$-保存的である $\mathbf{\Gamma}^d$ 文をもたない．

どんな $\mathbf{\Gamma}$ についても，ということなので，**Guaspari** の問題の反例よりも強い主張である．

Guaspari の問題の否定的解決

しかし，**Guaspari** の問題には **Misercque** によって反例が与えられている．

定理（Misercque, 1983）

ある理論の **r.e.** 列 $\{T_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ が存在して，どんな Γ についても，全ての T_i で非自明に Γ-保存的である Γ^d 文をもたない．

どんな Γ についても，ということなので，**Guaspari** の問題の反例よりも強い主張である．
更に遺伝的な場合を考えると２つの理論についても成り立つ．

定理（Misercque, 1983）

ある理論 S, T が存在して，どんな Γ についても，S と T に共通の非自明な遺伝的に Γ-保存的である Γ^d 文をもたない．

Guaspari の問題の否定的解決

しかし，**Guaspari** の問題には **Misercque** によって反例が与えられている．

定理（Misercque, 1983）

ある理論の r.e. 列 $\{T_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ が存在して，どんな Γ についても，全ての T_i で非自明に Γ-保存的である Γ^d 文をもたない．

どんな Γ についても，ということなので，**Guaspari** の問題の反例よりも強い主張である．
更に遺伝的な場合を考えると２つの理論についても成り立つ．

定理（Misercque, 1983）

ある理論 S, T が存在して，どんな Γ についても，S と T に共通の非自明な遺伝的に Γ-保存的である Γ^d 文をもたない．

$\Gamma = \Sigma_n$ の場合は２つの理論についても **Guaspari** の問題の反例が得られている．

定理（おそらく Lindström）

$n \geq 1$ とする．φ は T 上で Π_n-保存的な Σ_n 文とすると，
$T \cup \{\varphi\}$ と $T \cup \{\neg\varphi\}$ は共通の非自明に Σ_n-保存的な Π_n 文をもたない．

- $\mathbf{PA} \cup \{\neg \mathbf{Con_{PA}}\}$ と $\mathbf{PA} \cup \{\mathbf{Con_{PA}}\}$ は共通の非自明に $\mathbf{\Sigma_1}$-保存的な $\mathbf{\Pi_1}$ 文をもたない.

- $\mathsf{PA} \cup \{\neg \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}\}$ と $\mathsf{PA} \cup \{\mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}\}$ は共通の非自明に $\mathbf{\Sigma_1}$-保存的な $\mathbf{\Pi_1}$ 文をもたない.
- 一方 **Guaspari** の結果により $T \vdash S$ ならば共通のものをもつ.

- $\mathsf{PA} \cup \{\neg \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}\}$ と $\mathsf{PA} \cup \{\mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}\}$ は共通の非自明に $\boldsymbol{\Sigma_1}$-保存的な $\boldsymbol{\Pi_1}$ 文をもたない.
- 一方 **Guaspari** の結果により $\boldsymbol{T} \vdash \boldsymbol{S}$ ならば共通のものをもつ.
- どんな場合に共通のものをもつのだろうか？

共通の Γ-保存的な Γ^d 文をもつための十分条件

$$\mathrm{Th}_\Gamma(T) := \{\varphi \in \Gamma : T \vdash \varphi\}$$

定理 1

$\mathrm{Th}_\Gamma(S) \cup T$ と $\mathrm{Th}_\Gamma(T) \cup S$ がともに無矛盾ならば，S と T は共通の非自明に Γ-保存的な Γ^d 文をもつ．

共通の $\mathbf{\Gamma}$-保存的な $\mathbf{\Gamma}^d$ 文をもつための十分条件

$$\mathbf{Th}_{\mathbf{\Gamma}}(T) := \{\varphi \in \mathbf{\Gamma} : T \vdash \varphi\}$$

定理 1

$\mathbf{Th}_{\mathbf{\Gamma}}(S) \cup T$ と $\mathbf{Th}_{\mathbf{\Gamma}}(T) \cup S$ がともに無矛盾ならば，S と T は共通の非自明に $\mathbf{\Gamma}$-保存的な $\mathbf{\Gamma}^d$ 文をもつ．

定理 2

$\mathbf{Th}_{\mathbf{\Gamma}}(S) \cup T$ と $\mathbf{Th}_{\mathbf{\Gamma}}(T) \cup S$ がともに矛盾するならば，S と T は共通の非自明に $\mathbf{\Gamma}$-保存的な $\mathbf{\Gamma}^d$ 文をもつ．

共通の $\mathbf{\Gamma}$-保存的な $\mathbf{\Gamma}^d$ 文をもつための十分条件

$\mathrm{Th}_{\mathbf{\Gamma}}(T) := \{\varphi \in \mathbf{\Gamma} : T \vdash \varphi\}$

定理 1

$\mathrm{Th}_{\mathbf{\Gamma}}(S) \cup T$ と $\mathrm{Th}_{\mathbf{\Gamma}}(T) \cup S$ がともに無矛盾ならば，S と T は共通の非自明に $\mathbf{\Gamma}$-保存的な $\mathbf{\Gamma}^d$ 文をもつ．

定理 2

$\mathrm{Th}_{\mathbf{\Gamma}}(S) \cup T$ と $\mathrm{Th}_{\mathbf{\Gamma}}(T) \cup S$ がともに矛盾するならば，S と T は共通の非自明に $\mathbf{\Gamma}$-保存的な $\mathbf{\Gamma}^d$ 文をもつ．

Misercque の定理は 2 つの理論については成立しないことがこれらの結果から導かれる．

系

任意の S と T に対して，ある n があって S と T は共通の非自明に $\mathbf{\Sigma}_n(\mathbf{\Pi}_n)$-保存的な $\mathbf{\Pi}_n(\mathbf{\Sigma}_n)$ 文をもつ．

今後の課題

問題 1

$\mathbf{Th}_{\Pi_n}(S) \cup T$ は無矛盾だが $\mathbf{Th}_{\Pi_n}(T) \cup S$ は矛盾するような理論 S, T についてはどうか？

今後の課題

問題 1

$\mathbf{Th}_{\Pi_n}(S) \cup T$ は無矛盾だが $\mathbf{Th}_{\Pi_n}(T) \cup S$ は矛盾するような理論 S, T についてはどうか？

特に $S = \mathsf{PA} \cup \{\neg \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}\}$, $T = \mathsf{PA} \cup \{\mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}\}$，$\Gamma = \Pi_1$ について課題 1 の条件が成り立つ.

問題 2

$\mathsf{PA} \cup \{\mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}\}$ と $\mathsf{PA} \cup \{\neg \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}\}$ は共通の非自明に Π_1-保存的な Σ_1 文をもつか？

今後の課題

問題 1

$\mathbf{Th}_{\Pi_n}(S) \cup T$ は無矛盾だが $\mathbf{Th}_{\Pi_n}(T) \cup S$ は矛盾するような理論 S, T についてはどうか？

特に $S = \mathsf{PA} \cup \{\neg \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}\}$, $T = \mathsf{PA} \cup \{\mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}\}$，$\Gamma = \Pi_1$ について課題 1 の条件が成り立つ．

問題 2

$\mathsf{PA} \cup \{\mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}\}$ と $\mathsf{PA} \cup \{\neg \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}\}$ は共通の非自明に Π_1-保存的な Σ_1 文をもつか？

問題 3

有限個の理論 $T_0, T_1, \cdots, T_k$ について，ある n があって，共通の非自明に $\Sigma_n(\Pi_n)$-保存的な $\Pi_n(\Sigma_n)$ 文をもつことが示せるか？