

不完全性定理と証明可能性述語について

倉橋 太志
木更津工業高等専門学校

2016 年 9 月 17 日 (土)
日本数学会 2016 年度秋季総合分科会 特別講演
@関西大学

はじめに

Gödel の第一不完全性定理

T が PA を含む Σ_1 -健全な再帰的可算理論ならば, T は不完全.

Gödel の第二不完全性定理

T が PA を含む無矛盾な再帰的可算理論ならば, T は自分自身の無矛盾性を表す文 Con_T を証明できない.

はじめに

Gödel の第一不完全性定理

T が $\mathbf{PA}$ を含む Σ_1 -健全な再帰的可算理論ならば, T は不完全.

Gödel の第二不完全性定理

T が $\mathbf{PA}$ を含む無矛盾な再帰的可算理論ならば, T は自分自身の無矛盾性を表す文 $\mathbf{Con}_T$ を証明できない.

証明の流れ

- $\mathbf{Pr}_T(x)$ を “ x は T で証明可能” を意味する Σ_1 論理式とする.

はじめに

Gödel の第一不完全性定理

T が $\mathbf{PA}$ を含む Σ_1 -健全な再帰的可算理論ならば、 T は不完全。

Gödel の第二不完全性定理

T が $\mathbf{PA}$ を含む無矛盾な再帰的可算理論ならば、 T は自分自身の無矛盾性を表す文 $\mathbf{Con}_T$ を証明できない。

証明の流れ

- $\mathbf{Pr}_T(x)$ を “ x は T で証明可能” を意味する Σ_1 論理式とする。
- $\mathbf{PA} \vdash \varphi \leftrightarrow \neg \mathbf{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$ となる Π_1 文 φ がとれる。

はじめに

Gödel の第一不完全性定理

T が $\mathbf{PA}$ を含む Σ_1 -健全な再帰的可算理論ならば, T は不完全.

Gödel の第二不完全性定理

T が $\mathbf{PA}$ を含む無矛盾な再帰的可算理論ならば, T は自分自身の無矛盾性を表す文 $\mathbf{Con}_T$ を証明できない.

証明の流れ

- $\mathbf{Pr}_T(x)$ を “ x は T で証明可能” を意味する Σ_1 論理式とする.
- $\mathbf{PA} \vdash \varphi \leftrightarrow \neg \mathbf{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$ となる Π_1 文 φ がとれる.
- T が無矛盾ならば $T \not\vdash \varphi$, T が Σ_1 -健全ならば $T \not\vdash \neg \varphi$ となる.

はじめに

Gödel の第一不完全性定理

T が $\mathbf{PA}$ を含む Σ_1 -健全な再帰的可算理論ならば, T は不完全.

Gödel の第二不完全性定理

T が $\mathbf{PA}$ を含む無矛盾な再帰的可算理論ならば, T は自分自身の無矛盾性を表す文 $\mathbf{Con}_T$ を証明できない.

証明の流れ

- $\mathbf{Pr}_T(x)$ を “ x は T で証明可能” を意味する Σ_1 論理式とする.
- $\mathbf{PA} \vdash \varphi \leftrightarrow \neg \mathbf{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$ となる Π_1 文 φ がとれる.
- T が無矛盾ならば $T \not\vdash \varphi$, T が Σ_1 -健全ならば $T \not\vdash \neg \varphi$ となる.
- このことは $\mathbf{PA}$ で証明できる. つまり $\mathbf{PA} \vdash \mathbf{Con}_T \rightarrow \neg \mathbf{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$.

はじめに

Gödel の第一不完全性定理

T が $\mathbf{PA}$ を含む Σ_1 -健全な再帰的可算理論ならば, T は不完全.

Gödel の第二不完全性定理

T が $\mathbf{PA}$ を含む無矛盾な再帰的可算理論ならば, T は自分自身の無矛盾性を表す文 $\mathbf{Con}_T$ を証明できない.

証明の流れ

- $\mathbf{Pr}_T(x)$ を “ x は T で証明可能” を意味する Σ_1 論理式とする.
- $\mathbf{PA} \vdash \varphi \leftrightarrow \neg \mathbf{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$ となる Π_1 文 φ がとれる.
- T が無矛盾ならば $T \not\vdash \varphi$, T が Σ_1 -健全ならば $T \not\vdash \neg \varphi$ となる.
- このことは $\mathbf{PA}$ で証明できる. つまり $\mathbf{PA} \vdash \mathbf{Con}_T \rightarrow \neg \mathbf{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$.
- つまり $\mathbf{PA} \vdash \mathbf{Con}_T \rightarrow \varphi$ なので T が無矛盾ならば $T \not\vdash \mathbf{Con}_T$.

はじめに

Gödel の第一不完全性定理

T が $\mathbf{PA}$ を含む Σ_1 -健全な再帰的可算理論ならば、 T は不完全。

Gödel の第二不完全性定理

T が $\mathbf{PA}$ を含む無矛盾な再帰的可算理論ならば、 T は自分自身の無矛盾性を表す文 $\mathbf{Con}_T$ を証明できない。

証明の流れ

- $\mathbf{Pr}_T(x)$ を “ x は T で証明可能” を意味する Σ_1 論理式とする。
- $\mathbf{PA} \vdash \varphi \leftrightarrow \neg \mathbf{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$ となる Π_1 文 φ がとれる。
- T が無矛盾ならば $T \not\vdash \varphi$, T が Σ_1 -健全ならば $T \not\vdash \neg \varphi$ となる。
- このことは $\mathbf{PA}$ で証明できる。つまり $\mathbf{PA} \vdash \mathbf{Con}_T \rightarrow \neg \mathbf{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$ 。
- つまり $\mathbf{PA} \vdash \mathbf{Con}_T \rightarrow \varphi$ なので T が無矛盾ならば $T \not\vdash \mathbf{Con}_T$ 。

ここで、 T の無矛盾性を表す文 $\mathbf{Con}_T$ とは、 $\neg \mathbf{Pr}_T(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$ のこと。

はじめに

- “ x は T で証明可能” を意味する論理式 $\text{Pr}_T(x)$ (T の証明可能性述語) の取り方は一通りではない.

はじめに

- “ x は T で証明可能” を意味する論理式 $\text{Pr}_T(x)$ (T の証明可能性述語) の取り方は一通りではない.
- したがって Con_T の取り方も一通りではない.

はじめに

- “ x は T で証明可能” を意味する論理式 $\text{Pr}_T(x)$ (T の証明可能性述語) の取り方は一通りではない.
- したがって Con_T の取り方も一通りではない.

前原, 1991

第二不完全性定理の正確な表現は「形式的体系の無矛盾性を表す論理式のうち少なくとも 1 つは証明できない」であって,
「形式的体系の無矛盾性を表している論理式はすべて証明できない」こととはギャップがある.

はじめに

- “ x は T で証明可能” を意味する論理式 $\text{Pr}_T(x)$ (T の証明可能性述語) の取り方は一通りではない.
- したがって Con_T の取り方も一通りではない.

前原, 1991

第二不完全性定理の正確な表現は「形式的体系の無矛盾性を表す論理式のうち少なくとも 1 つは証明できない」であって,
「形式的体系の無矛盾性を表している論理式はすべて証明できない」こととはギャップがある.

証明可能性述語の取り方によって, 無矛盾性を表す文の性質が変化する.

はじめに

- “ x は T で証明可能” を意味する論理式 $\text{Pr}_T(x)$ (T の証明可能性述語) の取り方は一通りではない。
- したがって Con_T の取り方も一通りではない。

前原, 1991

第二不完全性定理の正確な表現は「形式的体系の無矛盾性を表す論理式のうち少なくとも 1 つは証明できない」であって、
「形式的体系の無矛盾性を表している論理式はすべて証明できない」こととはギャップがある。

証明可能性述語の取り方によって、無矛盾性を表す文の性質が変化しうる。
例えば第二不完全性定理に関連する次のことが知られている。

定理 (Feferman, 1960)

T の無矛盾性を表す Π_2 文 Con_T で、 $\text{PA} \vdash \text{Con}_T$ となるものが存在する。

はじめに

- “ x は T で証明可能” を意味する論理式 $\text{Pr}_T(x)$ (T の証明可能性述語) の取り方は一通りではない。
- したがって Con_T の取り方も一通りではない。

前原, 1991

第二不完全性定理の正確な表現は「形式的体系の無矛盾性を表す論理式のうち少なくとも 1 つは証明できない」であって、

「形式的体系の無矛盾性を表している論理式はすべて証明できない」こととはギャップがある。

証明可能性述語の取り方によって、無矛盾性を表す文の性質が変化しうる。
例えば第二不完全性定理に関連する次のことが知られている。

定理 (Feferman, 1960)

T の無矛盾性を表す Π_2 文 Con_T で、 $\text{PA} \vdash \text{Con}_T$ となるものが存在する。

T の Rosser 証明可能性述語を用いて定められる “ T の無矛盾性を表す文” Con_T^R は $\text{PA} \vdash \text{Con}_T^R$ を満たす。

講演の内容

テーマ

証明可能性述語の取り方や定め方によって、不完全性定理に関係する諸性質・諸問題がどのような影響を受けるのか。

講演の内容

テーマ

証明可能性述語の取り方や定め方によって，不完全性定理に関係する諸性質・諸問題がどのような影響を受けるのか。

次の3つの話題について紹介する。

- ① 不完全性定理と証明可能性述語
- ② Rosser 証明可能性述語
- ③ 証明可能性論理

内容

- ① 不完全性定理と証明可能性述語
- ② Rosser 証明可能性述語
- ③ 証明可能性論理

取り決めと記法

- 論理式や理論といえば算術の言語 $\mathcal{L}_A$ の論理式や理論を表すとする.
- 各自然数 n の数項を $\bar{n}$ で表す.
- 論理式 φ の Gödel 数の数項を $\ulcorner \varphi \urcorner$ で表す.

取り決めと記法

- 論理式や理論といえば算術の言語 $\mathcal{L}_A$ の論理式や理論を表すとする.
- 各自然数 n の数項を $\bar{n}$ で表す.
- 論理式 φ の Gödel 数の数項を「 φ 」で表す.

Craig's trick

再帰的可算理論 T に対して, 同値な再帰的理論 T' が存在する.

以降 T を **PA** を含む再帰的理論とする.

表現可能性

表現可能性

$X \subseteq \mathbb{N}^k$ とし, $\varphi(x_0, \dots, x_{k-1})$ を論理式とする.

表現可能性

表現可能性

$X \subseteq \mathbb{N}^k$ とし, $\varphi(x_0, \dots, x_{k-1})$ を論理式とする.

- ① φ が T において X を弱表現するとは, 任意の $n_0, \dots, n_{k-1} \in \mathbb{N}$ について

$$(n_0, \dots, n_{k-1}) \in X \Leftrightarrow T \vdash \varphi(\overline{n_0}, \dots, \overline{n_{k-1}})$$

が成り立つことをいう.

表現可能性

表現可能性

$X \subseteq \mathbb{N}^k$ とし, $\varphi(x_0, \dots, x_{k-1})$ を論理式とする.

- ① φ が T において X を弱表現するとは, 任意の $n_0, \dots, n_{k-1} \in \mathbb{N}$ について

$$(n_0, \dots, n_{k-1}) \in X \Leftrightarrow T \vdash \varphi(\overline{n_0}, \dots, \overline{n_{k-1}})$$

が成り立つことをいう.

- ② φ が T において X を表現するとは, 任意の $n_0, \dots, n_{k-1} \in \mathbb{N}$ について

$$(n_0, \dots, n_{k-1}) \in X \Rightarrow T \vdash \varphi(\overline{n_0}, \dots, \overline{n_{k-1}})$$

$$(n_0, \dots, n_{k-1}) \notin X \Rightarrow T \vdash \neg \varphi(\overline{n_0}, \dots, \overline{n_{k-1}})$$

が成り立つことをいう.

表現可能性

表現可能性

$X \subseteq \mathbb{N}^k$ とし, $\varphi(x_0, \dots, x_{k-1})$ を論理式とする.

- ① φ が T において X を弱表現するとは, 任意の $n_0, \dots, n_{k-1} \in \mathbb{N}$ について

$$(n_0, \dots, n_{k-1}) \in X \Leftrightarrow T \vdash \varphi(\overline{n_0}, \dots, \overline{n_{k-1}})$$

が成り立つことをいう.

- ② φ が T において X を表現するとは, 任意の $n_0, \dots, n_{k-1} \in \mathbb{N}$ について

$$(n_0, \dots, n_{k-1}) \in X \Rightarrow T \vdash \varphi(\overline{n_0}, \dots, \overline{n_{k-1}})$$

$$(n_0, \dots, n_{k-1}) \notin X \Rightarrow T \vdash \neg \varphi(\overline{n_0}, \dots, \overline{n_{k-1}})$$

が成り立つことをいう.

T において X を (弱) 表現する論理式が存在するとき, X は T において (弱) 表現可能であるという.

表現可能性定理と証明可能性述語

表現可能性定理

$X \subseteq \mathbb{N}^k$ とする.

- ① X は再帰的可算 $\Leftrightarrow X$ は **PA** において弱表現可能.
- ② X は再帰的 $\Leftrightarrow X$ は **PA** において表現可能.

表現可能性定理と証明可能性述語

表現可能性定理

$X \subseteq \mathbb{N}^k$ とする.

- ① X は再帰的可算 $\Leftrightarrow X$ は **PA** において弱表現可能.
 - ② X は再帰的 $\Leftrightarrow X$ は **PA** において表現可能.
- X を (弱) 表現する論理式は Σ_1 論理式としてとれる.

表現可能性定理と証明可能性述語

表現可能性定理

$X \subseteq \mathbb{N}^k$ とする.

- ① X は再帰的可算 $\Leftrightarrow X$ は **PA** において弱表現可能.
 - ② X は再帰的 $\Leftrightarrow X$ は **PA** において表現可能.
- X を (弱) 表現する論理式は Σ_1 論理式としてとれる.
 - T の定理全体の集合 $\text{Th}(T) = \{\varphi : \varphi \in T\}$ は再帰的可算なので, 表現可能性定理より $\text{Th}(T)$ を **PA** において弱表現する論理式が存在.

表現可能性定理と証明可能性述語

表現可能性定理

$X \subseteq \mathbb{N}^k$ とする.

- ① X は再帰的可算 $\Leftrightarrow X$ は **PA** において弱表現可能.
- ② X は再帰的 $\Leftrightarrow X$ は **PA** において表現可能.

- X を (弱) 表現する論理式は Σ_1 論理式としてとれる.
- T の定理全体の集合 $\text{Th}(T) = \{\varphi : \varphi \in T\}$ は再帰的可算なので, 表現可能性定理より $\text{Th}(T)$ を **PA** において弱表現する論理式が存在.

証明可能性述語

$\text{Th}(T)$ を **PA** において弱表現する論理式を T の**証明可能性述語**という.

不動点補題と Gödel 文

理論 T において証明も反証もできない文は、次の不動点補題を用いて得られる。

不動点補題

含まれる自由変数が x のみである任意の論理式 $\psi(x)$ に対して、 $\mathbf{PA} \vdash \varphi \leftrightarrow \psi(\ulcorner \varphi \urcorner)$ を満たす文 φ が存在する。

不動点補題と Gödel 文

理論 T において証明も反証もできない文は，次の不動点補題を用いて得られる．

不動点補題

含まれる自由変数が x のみである任意の論理式 $\psi(x)$ に対して， $\mathbf{PA} \vdash \varphi \leftrightarrow \psi(\ulcorner \varphi \urcorner)$ を満たす文 φ が存在する．

不動点補題により，証明可能性述語の否定 $\neg \mathbf{Pr}_T(x)$ の不動点が取れる．

定義（Gödel 文）

$\mathbf{Pr}_T(x)$ を T の証明可能性述語とすると， $T \vdash \varphi \leftrightarrow \neg \mathbf{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$ を満たす文 φ を $\mathbf{Pr}_T(x)$ の **Gödel 文** という．

Gödel の第一不完全性定理

$\text{Pr}_T(x)$ の Gödel 文は, 次の意味で T からは証明も反証もできない文となる.

定理

$\text{Pr}_T(x)$ を T の証明可能性述語とすると, $\text{Pr}_T(x)$ の Gödel 文 φ について次が成り立つ:

- ① T が無矛盾ならば $T \not\vdash \varphi$.
- ② $\text{Pr}_T(x)$ が Σ_1 論理式で T が Σ_1 -健全ならば $T \not\vdash \neg\varphi$.

Gödel の第一不完全性定理

$\text{Pr}_T(x)$ の Gödel 文は、次の意味で T からは証明も反証もできない文となる。

定理

$\text{Pr}_T(x)$ を T の証明可能性述語とすると、 $\text{Pr}_T(x)$ の Gödel 文 φ について次が成り立つ：

- ① T が無矛盾ならば $T \not\vdash \varphi$.
- ② $\text{Pr}_T(x)$ が Σ_1 論理式で T が Σ_1 -健全ならば $T \not\vdash \neg\varphi$.

Σ_1 論理式である T の証明可能性述語 $\text{Pr}_T(x)$ を考えると Gödel の第一不完全性定理が得られる。

Gödel の第一不完全性定理

T が Σ_1 -健全ならば T は不完全。

標準的証明可能性述語

- T の無矛盾性を表す文 $\mathbf{Con}_T$ を T の証明可能性述語 $\mathbf{Pr}_T(x)$ に対して,
 $\neg \mathbf{Pr}_T(\ulcorner \overline{0} = \overline{1} \urcorner)$ と定める.

標準的証明可能性述語

- T の無矛盾性を表す文 Con_T を T の証明可能性述語 $\text{Pr}_T(x)$ に対して,
 $\neg \text{Pr}_T(\ulcorner \overline{0} = \overline{1} \urcorner)$ と定める.
- 第二不完全性定理の証明を実行するためには, 追加的な性質をもつ証明可能性述語を扱わなければならない.

標準的証明可能性述語

- T の無矛盾性を表す文 Con_T を T の証明可能性述語 $\text{Pr}_T(x)$ に対して,
 $\neg \text{Pr}_T(\ulcorner \bar{0} = \bar{1} \urcorner)$ と定める.
- 第二不完全性定理の証明を実行するためには, 追加的な性質をもつ証明可能性述語を扱わなければならない.

定義 (標準的証明可能性述語)

T の証明可能性述語 $\text{Pr}_T(x)$ が**標準的**であるとは, 次の条件を満たすことをいう.

- ① $\text{Pr}_T(x)$ は Σ_1 論理式.
- ② 任意の文 φ, ψ について, $\text{PA} \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \rightarrow \psi \urcorner) \rightarrow (\text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner))$.
- ③ 任意の Σ_1 文 φ について, $\text{PA} \vdash \varphi \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$.

証明可能性述語

標準的

第二不完全性定理

標準的証明可能性述語を得るには

- T を弱表現する論理式 $\sigma(u)$ を用意し,

第二不完全性定理

標準的証明可能性述語を得るには

- T を弱表現する論理式 $\sigma(u)$ を用意し,
論理式 $\text{Prf}_\sigma(x, y)$ を “ y は $\sigma(u)$ を満たす文全体の集合における x の証明” と定め,

第二不完全性定理

標準的証明可能性述語を得るには

- T を弱表現する論理式 $\sigma(u)$ を用意し,
論理式 $\text{Prf}_\sigma(x, y)$ を “ y は $\sigma(u)$ を満たす文全体の集合における x の証明” と定め,
 $\text{Pr}_\sigma(x)$ を $\exists y \text{Prf}_\sigma(x, y)$ と定めると $\text{Pr}_\sigma(x)$ は条件2と3を満たす T の証明可能性述語.

第二不完全性定理

標準的証明可能性述語を得るには

- T を弱表現する論理式 $\sigma(u)$ を用意し,
論理式 $\text{Prf}_\sigma(x, y)$ を “ y は $\sigma(u)$ を満たす文全体の集合における x の証明” と定め,
 $\text{Pr}_\sigma(x)$ を $\exists y \text{Prf}_\sigma(x, y)$ と定めると $\text{Pr}_\sigma(x)$ は条件2と3を満たす T の証明可能性述語.
- 特に $\sigma(u)$ が Σ_1 論理式なら, $\text{Pr}_\sigma(x)$ は Σ_1 論理式となるため標準的となる.

第二不完全性定理

標準的証明可能性述語を得るには

- T を弱表現する論理式 $\sigma(u)$ を用意し,
論理式 $\text{Prf}_\sigma(x, y)$ を “ y は $\sigma(u)$ を満たす文全体の集合における x の証明” と定め,
 $\text{Pr}_\sigma(x)$ を $\exists y \text{Prf}_\sigma(x, y)$ と定めると $\text{Pr}_\sigma(x)$ は条件2と3を満たす T の証明可能性述語.
- 特に $\sigma(u)$ が Σ_1 論理式なら, $\text{Pr}_\sigma(x)$ は Σ_1 論理式となるため標準的となる.
- 文 $\neg \text{Pr}_\sigma(\ulcorner \bar{0} = \bar{1} \urcorner)$ を Con_σ とかく.

第二不完全性定理

標準的証明可能性述語を得るには

- T を弱表現する論理式 $\sigma(u)$ を用意し,
論理式 $\text{Prf}_\sigma(x, y)$ を “ y は $\sigma(u)$ を満たす文全体の集合における x の証明” と定め,
 $\text{Pr}_\sigma(x)$ を $\exists y \text{Prf}_\sigma(x, y)$ と定めると $\text{Pr}_\sigma(x)$ は条件2と3を満たす T の証明可能性述語.
- 特に $\sigma(u)$ が Σ_1 論理式なら, $\text{Pr}_\sigma(x)$ は Σ_1 論理式となるため標準的となる.
- 文 $\neg \text{Pr}_\sigma(\ulcorner \bar{0} = \bar{1} \urcorner)$ を Con_σ とかく.

定理

$\text{Pr}_T(x)$ を T の標準的な証明可能性述語とし, φ をその Gödel 文とすると,
 $T \vdash \varphi \leftrightarrow \text{Con}_T$.

第二不完全性定理

標準的証明可能性述語を得るには

- T を弱表現する論理式 $\sigma(u)$ を用意し,
論理式 $\text{Prf}_\sigma(x, y)$ を “ y は $\sigma(u)$ を満たす文全体の集合における x の証明” と定め,
 $\text{Pr}_\sigma(x)$ を $\exists y \text{Prf}_\sigma(x, y)$ と定めると $\text{Pr}_\sigma(x)$ は条件2と3を満たす T の証明可能性述語.
- 特に $\sigma(u)$ が Σ_1 論理式なら, $\text{Pr}_\sigma(x)$ は Σ_1 論理式となるため標準的となる.
- 文 $\neg \text{Pr}_\sigma(\ulcorner \bar{0} = \bar{1} \urcorner)$ を Con_σ とかく.

定理

$\text{Pr}_T(x)$ を T の標準的な証明可能性述語とし, φ をその Gödel 文とすると,
 $T \vdash \varphi \leftrightarrow \text{Con}_T$.

この定理と Gödel 文の証明不可能性より, 第二不完全性定理が得られる.

Gödel の第二不完全性定理

$\text{Pr}_T(x)$ を T の標準的な証明可能性述語とすると, T が無矛盾ならば $T \not\vdash \text{Con}_T$.

第二不完全性定理について

具体的に標準的な証明可能性述語を得る手順を考えれば次がいえる。

定理 (Feferman, 1960)

T が無矛盾ならば, T を弱表現する Σ_1 論理式 $\sigma(u)$ について, $T \not\vdash \text{Con}_\sigma$.

第二不完全性定理について

具体的に標準的な証明可能性述語を得る手順を考えれば次がいえる.

定理 (Feferman, 1960)

T が無矛盾ならば, T を弱表現する Σ_1 論理式 $\sigma(u)$ について, $T \not\vdash \text{Con}_\sigma$.

また, T の無矛盾性を表す文として $\neg \exists x (\text{Pr}_T(x) \wedge \text{Pr}_T(\neg(x)))$ を採用すれば, 標準的でない証明可能性述語についても次が成り立つ.

第二不完全性定理について

具体的に標準的な証明可能性述語を得る手順を考えれば次がいえる。

定理 (Feferman, 1960)

T が無矛盾ならば, T を弱表現する Σ_1 論理式 $\sigma(u)$ について, $T \not\vdash \text{Con}_\sigma$.

また, T の無矛盾性を表す文として $\neg \exists x (\text{Pr}_T(x) \wedge \text{Pr}_T(\neg(x)))$ を採用すれば, 標準的でない証明可能性述語についても次が成り立つ。

定理 (Jeroslow, 1973)

無矛盾な理論 T の証明可能性述語 $\text{Pr}_T(x)$ が標準的事であることの条件の 1 と 3 を満たせば, $T \not\vdash \neg \exists x (\text{Pr}_T(x) \wedge \text{Pr}_T(\neg(x)))$ が成り立つ。

標準的証明可能性述語の条件 (再掲)

- ① $\text{Pr}_T(x)$ は Σ_1 論理式.
- ② 任意の文 φ, ψ について, $\text{PA} \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \rightarrow \psi \urcorner) \rightarrow (\text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner))$.
- ③ 任意の Σ_1 文 φ について, $\text{PA} \vdash \varphi \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$.

Feferman の定理

一方、 Σ_1 論理式でない $\sigma(u)$ から得られる証明可能性述語 $\text{Pr}_\sigma(x)$ について第二不完全性定理は一般には成立しない。

定理 (Feferman, 1960)

T を表現する Π_1 論理式 $\pi(u)$ が存在して、 $\text{PA} \vdash \text{Con}_\pi$ となる。

Feferman の定理

一方、 Σ_1 論理式でない $\sigma(u)$ から得られる証明可能性述語 $\text{Pr}_\sigma(x)$ について第二不完全性定理は一般には成立しない。

定理 (Feferman, 1960)

T を表現する Π_1 論理式 $\pi(u)$ が存在して、 $\text{PA} \vdash \text{Con}_\pi$ となる。

- 第二不完全性定理が成立するかどうかは、無矛盾性を表す文を得る際に T をどのように表現するのに依存。

Feferman の定理

一方、 Σ_1 論理式でない $\sigma(u)$ から得られる証明可能性述語 $\text{Pr}_\sigma(x)$ について第二不完全性定理は一般には成立しない。

定理 (Feferman, 1960)

T を表現する Π_1 論理式 $\pi(u)$ が存在して、 $\text{PA} \vdash \text{Con}_\pi$ となる。

- 第二不完全性定理が成立するかどうかは、無矛盾性を表す文を得る際に T をどのように表現するのに依存。
- 更に Con_σ の強さは Σ_1 論理式 $\sigma(u)$ の取り方によっても変化。

Feferman の定理

一方、 Σ_1 論理式でない $\sigma(u)$ から得られる証明可能性述語 $\text{Pr}_\sigma(x)$ について第二不完全性定理は一般には成立しない。

定理 (Feferman, 1960)

T を表現する Π_1 論理式 $\pi(u)$ が存在して、 $\text{PA} \vdash \text{Con}_\pi$ となる。

- 第二不完全性定理が成立するかどうかは、無矛盾性を表す文を得る際に T をどのように表現するのに依存。
- 更に Con_σ の強さは Σ_1 論理式 $\sigma(u)$ の取り方によっても変化。

定理 (Feferman, 1960)

T が無矛盾ならば、 T を表現する任意の Σ_1 論理式 $\sigma(u)$ に対して、 T を表現する Σ_1 論理式 $\sigma'(u)$ が存在して、 $\text{PA} \vdash \text{Con}_\sigma \rightarrow \text{Con}_{\sigma'}$ かつ $T \not\vdash \text{Con}_{\sigma'} \rightarrow \text{Con}_\sigma$ となる。

Rosser の第一不完全性定理

$T \not\models \text{Con}_{\sigma'} \rightarrow \text{Con}_{\sigma}$ ならば $T \not\models \neg \text{Con}_{\sigma'}$ なので,

系

T が無矛盾ならば, T を表現する Σ_1 論理式 $\sigma'(u)$ が存在して, $T \not\models \neg \text{Con}_{\sigma'}$ となる.

Rosser の第一不完全性定理

$T \not\models \text{Con}_{\sigma'} \rightarrow \text{Con}_{\sigma}$ ならば $T \not\models \neg \text{Con}_{\sigma'}$ なので,

系

T が無矛盾ならば, T を表現する Σ_1 論理式 $\sigma'(u)$ が存在して, $T \not\models \neg \text{Con}_{\sigma'}$ となる.

第二不完全性定理から上記の $\sigma'(u)$ について $T \not\models \text{Con}_{\sigma'}$ なので,

系 (Rosser の第一不完全性定理)

T が無矛盾ならば, T は不完全.

Rosser の第一不完全性定理

$T \not\models \text{Con}_{\sigma'} \rightarrow \text{Con}_{\sigma}$ ならば $T \not\models \neg \text{Con}_{\sigma'}$ なので,

系

T が無矛盾ならば, T を表現する Σ_1 論理式 $\sigma'(u)$ が存在して, $T \not\models \neg \text{Con}_{\sigma'}$ となる.

第二不完全性定理から上記の $\sigma'(u)$ について $T \not\models \text{Con}_{\sigma'}$ なので,

系 (Rosser の第一不完全性定理)

T が無矛盾ならば, T は不完全.

- T から証明も反証もできない文は T の無矛盾性を表す文としてとれる.

Rosser の第一不完全性定理

$T \not\models \text{Con}_{\sigma'} \rightarrow \text{Con}_{\sigma}$ ならば $T \not\models \neg \text{Con}_{\sigma'}$ なので,

系

T が無矛盾ならば, T を表現する Σ_1 論理式 $\sigma'(u)$ が存在して, $T \not\models \neg \text{Con}_{\sigma'}$ となる.

第二不完全性定理から上記の $\sigma'(u)$ について $T \not\models \text{Con}_{\sigma'}$ なので,

系 (Rosser の第一不完全性定理)

T が無矛盾ならば, T は不完全.

- T から証明も反証もできない文は T の無矛盾性を表す文としてとれる.
- 例えば $T = \text{PA} + \neg \text{Con}_{\text{PA}}$ とすると, $T \vdash \neg \text{Con}_T$ となる.

Rosser の第一不完全性定理

$T \not\vdash \text{Con}_{\sigma'} \rightarrow \text{Con}_{\sigma}$ ならば $T \not\vdash \neg \text{Con}_{\sigma'}$ なので,

系

T が無矛盾ならば, T を表現する Σ_1 論理式 $\sigma'(u)$ が存在して, $T \not\vdash \neg \text{Con}_{\sigma'}$ となる.

第二不完全性定理から上記の $\sigma'(u)$ について $T \not\vdash \text{Con}_{\sigma'}$ なので,

系 (Rosser の第一不完全性定理)

T が無矛盾ならば, T は不完全.

- T から証明も反証もできない文は T の無矛盾性を表す文としてとれる.
- 例えば $T = \text{PA} + \neg \text{Con}_{\text{PA}}$ とすると, $T \vdash \neg \text{Con}_T$ となる.
- 一方, この理論 T に対しても T を表現する Σ_1 論理式 $\sigma'(u)$ をうまく選べば $T \not\vdash \neg \text{Con}_{\sigma'}$ とできる.

Feferman-Orey の定理

反対に, $\mathbf{Con}_\sigma$ はより強くもできる.

定理 (Feferman-Orey)

T を表現する Σ_1 論理式 $\sigma(u)$ と $T \vdash \varphi \rightarrow \mathbf{Con}_\sigma$ かつ $\mathbb{N} \models \varphi$ となる Π_1 文 φ について, T を表現する Σ_1 論理式 $\sigma'(u)$ が存在して, $T \vdash \mathbf{Con}_{\sigma'} \leftrightarrow \varphi$ となる.

Feferman-Orey の定理

反対に, $\mathbf{Con}_\sigma$ はより強くもできる.

定理 (Feferman-Orey)

T を表現する Σ_1 論理式 $\sigma(u)$ と $T \vdash \varphi \rightarrow \mathbf{Con}_\sigma$ かつ $\mathbb{N} \models \varphi$ となる Π_1 文 φ について, T を表現する Σ_1 論理式 $\sigma'(u)$ が存在して, $T \vdash \mathbf{Con}_{\sigma'} \leftrightarrow \varphi$ となる.

Σ_1 -健全でない理論 T について, Feferman-Orey の定理の φ として T で反証可能な正しい Π_1 文とすると次が得られる.

系

T が Σ_1 -健全でないならば, T を表現する Σ_1 論理式 $\sigma(u)$ が存在して, $T \vdash \neg \mathbf{Con}_\sigma$ となる.

Feferman-Orey の定理

反対に, Con_σ はより強くもできる.

定理 (Feferman-Orey)

T を表現する Σ_1 論理式 $\sigma(u)$ と $T \vdash \varphi \rightarrow \text{Con}_\sigma$ かつ $\mathbb{N} \models \varphi$ となる Π_1 文 φ について, T を表現する Σ_1 論理式 $\sigma'(u)$ が存在して, $T \vdash \text{Con}_{\sigma'} \leftrightarrow \varphi$ となる.

Σ_1 -健全でない理論 T について, Feferman-Orey の定理の φ として T で反証可能な正しい Π_1 文とすると次が得られる.

系

T が Σ_1 -健全でないならば, T を表現する Σ_1 論理式 $\sigma(u)$ が存在して, $T \vdash \neg \text{Con}_\sigma$ となる.

以上のことをまとめると次のようになる.

系

- T は無矛盾 $\Leftrightarrow T$ を表現するある Σ_1 論理式 $\sigma(u)$ について, $T \not\vdash \neg \text{Con}_\sigma$.

Feferman-Orey の定理

反対に, Con_σ はより強くもできる.

定理 (Feferman-Orey)

T を表現する Σ_1 論理式 $\sigma(u)$ と $T \vdash \varphi \rightarrow \text{Con}_\sigma$ かつ $\mathbb{N} \models \varphi$ となる Π_1 文 φ について, T を表現する Σ_1 論理式 $\sigma'(u)$ が存在して, $T \vdash \text{Con}_{\sigma'} \leftrightarrow \varphi$ となる.

Σ_1 -健全でない理論 T について, Feferman-Orey の定理の φ として T で反証可能な正しい Π_1 文とすると次が得られる.

系

T が Σ_1 -健全でないならば, T を表現する Σ_1 論理式 $\sigma(u)$ が存在して, $T \vdash \neg \text{Con}_\sigma$ となる.

以上のことをまとめると次のようになる.

系

- T は無矛盾 $\Leftrightarrow T$ を表現するある Σ_1 論理式 $\sigma(u)$ について, $T \not\vdash \neg \text{Con}_\sigma$.
- T は Σ_1 -健全 $\Leftrightarrow T$ を表現する全ての Σ_1 論理式 $\sigma(u)$ について, $T \not\vdash \neg \text{Con}_\sigma$.

証明可能性述語の高さ

文 Con_σ についてこれまでに述べたことは次のように拡張できる。

定義

証明可能性述語 $\text{Pr}_T(x)$ に対して、文の列 $\{\text{Con}_T^n\}_{n \in \omega}$ を次のように定める：

- $\text{Con}_T^0 := 0 = 0$;
- $\text{Con}_T^{n+1} := \text{Con}_{T+\text{Con}_T^n}$.

証明可能性述語の高さ

文 Con_σ についてこれまでに述べたことは次のように拡張できる。

定義

証明可能性述語 $\text{Pr}_T(x)$ に対して、文の列 $\{\text{Con}_T^n\}_{n \in \omega}$ を次のように定める：

- $\text{Con}_T^0 := 0 = 0$;
- $\text{Con}_T^{n+1} := \text{Con}_{T+\text{Con}_T^n}$.

命題

- ① $\text{PA} \vdash \text{Con}_T^{n+1} \rightarrow \text{Con}_T^n$.
- ② T が無矛盾ならば、 $T \not\vdash \text{Con}_T^n \rightarrow \text{Con}_T^{n+1}$.

証明可能性述語の高さ

文 Con_σ についてこれまでに述べたことは次のように拡張できる。

定義

証明可能性述語 $\text{Pr}_T(x)$ に対して、文の列 $\{\text{Con}_T^n\}_{n \in \omega}$ を次のように定める：

- $\text{Con}_T^0 \equiv 0 = 0$;
- $\text{Con}_T^{n+1} \equiv \text{Con}_{T+\text{Con}_T^n}$.

命題

- ① $\text{PA} \vdash \text{Con}_T^{n+1} \rightarrow \text{Con}_T^n$.
- ② T が無矛盾ならば、 $T \not\vdash \text{Con}_T^n \rightarrow \text{Con}_T^{n+1}$.

定義

$T \vdash \neg \text{Con}_T^n$ となる自然数 n があるとき、そのような最小の n を $\text{Pr}_T(x)$ の高さという。

証明可能性述語の高さ

文 Con_σ についてこれまでに述べたことは次のように拡張できる。

定義

証明可能性述語 $\text{Pr}_T(x)$ に対して、文の列 $\{\text{Con}_T^n\}_{n \in \omega}$ を次のように定める：

- $\text{Con}_T^0 := 0 = 0$;
- $\text{Con}_T^{n+1} := \text{Con}_{T+\text{Con}_T^n}$.

命題

- ① $\text{PA} \vdash \text{Con}_T^{n+1} \rightarrow \text{Con}_T^n$.
- ② T が無矛盾ならば、 $T \not\vdash \text{Con}_T^n \rightarrow \text{Con}_T^{n+1}$.

定義

$T \vdash \neg \text{Con}_T^n$ となる自然数 n があるとき、そのような最小の n を $\text{Pr}_T(x)$ の高さという。

そのような n がないとき、 $\text{Pr}_T(x)$ の高さは無限であるという。

証明可能性述語の高さについて

- Σ_1 -健全な理論の Σ_1 証明可能性述語の高さは無限.

証明可能性述語の高さについて

- Σ_1 -健全な理論の Σ_1 証明可能性述語の高さは無限.
- 理論 T を $\text{PA} + \neg \text{Con}_{\text{PA}}^n$ と定めれば, 自然にとった T の証明可能性述語 $\text{Pr}_T(x)$ の高さは n .

証明可能性述語の高さについて

- Σ_1 -健全な理論の Σ_1 証明可能性述語の高さは無限.
- 理論 T を $\text{PA} + \neg \text{Con}_{\text{PA}}^n$ と定めれば, 自然にとった T の証明可能性述語 $\text{Pr}_T(x)$ の高さは n .

これまでに $\neg \text{Con}_\sigma$ の証明可能性について述べたことは次のように言い換えられる.

Σ_1 -健全でない理論に対して, 高さが 1 でない証明可能性述語と高さが 1 の証明可能性述語がとれる.

証明可能性述語の高さについて

- Σ_1 -健全な理論の Σ_1 証明可能性述語の高さは無限.
- 理論 T を $\text{PA} + \neg\text{Con}_{\text{PA}}^n$ と定めれば, 自然にとった T の証明可能性述語 $\text{Pr}_T(x)$ の高さは n .

これまでに $\neg\text{Con}_\sigma$ の証明可能性について述べたことは次のように言い換えられる.

Σ_1 -健全でない理論に対して, 高さが 1 でない証明可能性述語と高さが 1 の証明可能性述語がとれる.

更に, Σ_1 -健全でない理論に対して, 任意の高さの証明可能性述語をとることができる.

定理 (倉橋)

Σ_1 -健全でない理論に対して, 高さが無限である証明可能性述語と, 高さが $n + 1$ の証明可能性述語がとれる.

内容

- ① 不完全性定理と証明可能性述語
- ② **Rosser 証明可能性述語**
- ③ 証明可能性論理

Rosser 証明可能性述語

以降では T の標準的な証明可能性述語 $\text{Pr}_T(x)$ を固定して議論する.

証明述語

次の条件を満たす $\Delta_1(\text{PA})$ 論理式 $\text{Prf}_T(x, y)$ を T の証明述語と呼ぶ:

$$\text{PA} \vdash \text{Pr}_T(x) \leftrightarrow \exists y \text{Prf}_T(x, y).$$

Rosser 証明可能性述語

以降では T の標準的な証明可能性述語 $\text{Pr}_T(x)$ を固定して議論する.

証明述語

次の条件を満たす $\Delta_1(\text{PA})$ 論理式 $\text{Prf}_T(x, y)$ を T の証明述語と呼ぶ:

$$\text{PA} \vdash \text{Pr}_T(x) \leftrightarrow \exists y \text{Prf}_T(x, y).$$

Rosser 証明可能性述語

T の証明述語 $\text{Prf}_T(x, y)$ に対して Σ_1 論理式 $\text{Pr}_T^R(x)$ を

$$\exists y (\text{Prf}_T(x, y) \wedge \forall z \leq y \neg \text{Prf}_T(\dot{\neg}(x), z))$$

と定め, これを T の Rosser 証明可能性述語という.

Rosser 証明可能性述語

以降では T の標準的な証明可能性述語 $\text{Pr}_T(x)$ を固定して議論する.

証明述語

次の条件を満たす $\Delta_1(\text{PA})$ 論理式 $\text{Prf}_T(x, y)$ を T の証明述語と呼ぶ:

$$\text{PA} \vdash \text{Pr}_T(x) \leftrightarrow \exists y \text{Prf}_T(x, y).$$

Rosser 証明可能性述語

T の証明述語 $\text{Prf}_T(x, y)$ に対して Σ_1 論理式 $\text{Pr}_T^R(x)$ を

$$\exists y (\text{Prf}_T(x, y) \wedge \forall z \leq y \neg \text{Prf}_T(\dot{\neg}(x), z))$$

と定め, これを T の Rosser 証明可能性述語という.

$\text{Pr}_T^R(x)$ は T の Σ_1 証明可能性述語.

Rosser の第一不完全性定理

Rosser は Rosser の証明可能性述語を用いて Gödel の第一不完全性定理を拡張した.

定義

T の Rosser 証明可能性述語 $\text{Pr}_T^R(x)$ について, $T \vdash \varphi \leftrightarrow \neg \text{Pr}_T^R(\ulcorner \varphi \urcorner)$ を満たす文 φ を $\text{Pr}_T^R(x)$ の **Rosser 文**という.

Rosser の第一不完全性定理

Rosser は Rosser の証明可能性述語を用いて Gödel の第一不完全性定理を拡張した。

定義

T の Rosser 証明可能性述語 $\text{Pr}_T^R(x)$ について, $T \vdash \varphi \leftrightarrow \neg \text{Pr}_T^R(\ulcorner \varphi \urcorner)$ を満たす文 φ を $\text{Pr}_T^R(x)$ の **Rosser 文**という。

定理 (Rosser の第一不完全性定理)

$\text{Pr}_T^R(x)$ を T の Rosser 証明可能性述語とすると, $\text{Pr}_T^R(x)$ の Rosser 文 φ をとれば, T が無矛盾ならば $T \not\vdash \varphi$ かつ $T \not\vdash \neg \varphi$ 。

Rosser の第一不完全性定理

Rosser は Rosser の証明可能性述語を用いて Gödel の第一不完全性定理を拡張した。

定義

T の Rosser 証明可能性述語 $\text{Pr}_T^R(x)$ について, $T \vdash \varphi \leftrightarrow \neg \text{Pr}_T^R(\ulcorner \varphi \urcorner)$ を満たす文 φ を $\text{Pr}_T^R(x)$ の **Rosser 文** という。

定理 (Rosser の第一不完全性定理)

$\text{Pr}_T^R(x)$ を T の Rosser 証明可能性述語とすると, $\text{Pr}_T^R(x)$ の Rosser 文 φ をとれば, T が無矛盾ならば $T \not\vdash \varphi$ かつ $T \not\vdash \neg \varphi$ 。

Rosser 文は Con_T より真に弱い。

命題

T の Rosser 証明可能性述語 $\text{Pr}_T^R(x)$ とその Rosser 文 φ について,

- ① $T \vdash \text{Con}_T \rightarrow \varphi$,
- ② T が無矛盾ならば $T \not\vdash \varphi \rightarrow \text{Con}_T$ 。

Rosser 文の同値性について

- 標準的な証明可能性述語 $\text{Pr}_T(x)$ の Gödel 文は Con_T と T において同値で、つまり $\text{Pr}_T(x)$ の Gödel 文はすべて T において同値。

Rosser 文の同値性について

- 標準的な証明可能性述語 $\text{Pr}_T(x)$ の Gödel 文は Con_T と T において同値で、つまり $\text{Pr}_T(x)$ の Gödel 文はすべて T において同値.
- 同様に、Rosser 証明可能性述語 $\text{Pr}_T^R(x)$ の Rosser 文は何らかの意味内容をもつ（自己言及的でない）文と同値となるか？

Rosser 文の同値性について

- 標準的な証明可能性述語 $\text{Pr}_T(x)$ の Gödel 文は Con_T と T において同値で、つまり $\text{Pr}_T(x)$ の Gödel 文はすべて T において同値.
- 同様に, Rosser 証明可能性述語 $\text{Pr}_T^R(x)$ の Rosser 文は何らかの意味内容をもつ (自己言及的でない) 文と同値となるか?
- そのためには $\text{Pr}_T^R(x)$ の Rosser 文が全て同値であることが必要.

Rosser 文の同値性について

- 標準的な証明可能性述語 $\text{Pr}_T(x)$ の Gödel 文は Con_T と T において同値で、つまり $\text{Pr}_T(x)$ の Gödel 文はすべて T において同値。
- 同様に、Rosser 証明可能性述語 $\text{Pr}_T^R(x)$ の Rosser 文は何らかの意味内容をもつ（自己言及的でない）文と同値となるか？
- そのためには $\text{Pr}_T^R(x)$ の Rosser 文が全て同値であることが必要。

定理 (Guaspari and Solovay, 1979)

- ① T が無矛盾ならば T で同値でないような二つの Rosser 文があるような T の Rosser 証明可能性述語が存在。

Rosser 文の同値性について

- 標準的な証明可能性述語 $\text{Pr}_T(x)$ の Gödel 文は Con_T と T において同値で、つまり $\text{Pr}_T(x)$ の Gödel 文はすべて T において同値。
- 同様に、Rosser 証明可能性述語 $\text{Pr}_T^R(x)$ の Rosser 文は何らかの意味内容をもつ（自己言及的でない）文と同値となるか？
- そのためには $\text{Pr}_T^R(x)$ の Rosser 文が全て同値であることが必要。

定理 (Guaspari and Solovay, 1979)

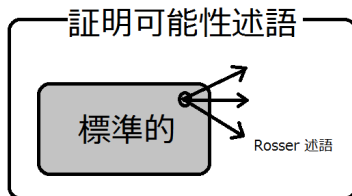
- ① T が無矛盾ならば T で同値でないような二つの Rosser 文があるような T の Rosser 証明可能性述語が存在。
- ② 全ての Rosser 文が T で同値であるような T の Rosser 証明可能性述語が存在。

Rosser 文の同値性について

- 標準的な証明可能性述語 $\text{Pr}_T(x)$ の Gödel 文は Con_T と T において同値で、つまり $\text{Pr}_T(x)$ の Gödel 文はすべて T において同値。
- 同様に、Rosser 証明可能性述語 $\text{Pr}_T^R(x)$ の Rosser 文は何らかの意味内容をもつ（自己言及的でない）文と同値となるか？
- そのためには $\text{Pr}_T^R(x)$ の Rosser 文が全て同値であることが必要。

定理 (Guaspari and Solovay, 1979)

- T が無矛盾ならば T で同値でないような二つの Rosser 文があるような T の Rosser 証明可能性述語が存在。
- 全ての Rosser 文が T で同値であるような T の Rosser 証明可能性述語が存在。



Rosser 文と Con_T の関係

系

全ての Rosser 文が同値であるような Rosser 証明可能性述語 $\text{Pr}_T^R(x)$ について,
 $T + \{\varphi : \varphi \text{ は } \text{Pr}_T^R(x) \text{ の Rosser 文} \} \not\vdash \text{Con}_T$.

Rosser 文と Con_T の関係

系

全ての Rosser 文が同値であるような Rosser 証明可能性述語 $\text{Pr}_T^R(x)$ について,
 $T + \{\varphi : \varphi \text{ は } \text{Pr}_T^R(x) \text{ の Rosser 文} \} \not\vdash \text{Con}_T$.

一方、二つの Rosser 文から Con_T を証明できるような Rosser 証明可能性述語も存在する.

定理 (倉橋, 2016)

T の Rosser 証明可能性述語とその Rosser 文 φ_1, φ_2 が存在して,
 $\text{PA} \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2 \leftrightarrow \text{Con}_T$ となる.

$\text{Pr}_T^R(x)$ と Rosser 文の関係

Rosser 文の強さは、 Con_T との関係だけでなく、Rosser 証明可能性述語 $\text{Pr}_T^R(x)$ そのものとの関係も変化する。

$\text{Pr}_T^R(x)$ と Rosser 文の関係

Rosser 文の強さは, Con_T との関係だけでなく, Rosser 証明可能性述語 $\text{Pr}_T^R(x)$ そのものとの関係も変化する.

定義

T の Rosser 証明可能性述語 $\text{Pr}_T^R(x)$ について, その Σ_1 反映原理 $\text{Rfn}_{\Sigma_1}(\text{Pr}_T^R)$ を $\{\text{Pr}_T^R(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \varphi : \varphi \in \Sigma_1\}$ とする.

$\text{Rfn}_{\Sigma_1}(\text{Pr}_T^R)$ は T の Σ_1 -健全性を形式化したもの.

$\text{Pr}_T^R(x)$ と Rosser 文の関係

Rosser 文の強さは、 Con_T との関係だけでなく、Rosser 証明可能性述語 $\text{Pr}_T^R(x)$ そのものとの関係も変化する。

定義

T の Rosser 証明可能性述語 $\text{Pr}_T^R(x)$ について、その Σ_1 反映原理 $\text{Rfn}_{\Sigma_1}(\text{Pr}_T^R)$ を $\{\text{Pr}_T^R(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \varphi : \varphi \in \Sigma_1\}$ とする。

$\text{Rfn}_{\Sigma_1}(\text{Pr}_T^R)$ は T の Σ_1 -健全性を形式化したもの。

定理 (倉橋, 2016)

T を無矛盾な理論とする。

- ① ある Rosser 証明可能性述語 $\text{Pr}_T^R(x)$ が存在して、その全ての Rosser 文 φ に対して $T + \text{Rfn}_{\Sigma_1}(\text{Pr}_T^R) \vdash \varphi$ が成り立つ。

$\text{Pr}_T^R(x)$ と Rosser 文の関係

Rosser 文の強さは、 Con_T との関係だけでなく、Rosser 証明可能性述語 $\text{Pr}_T^R(x)$ そのものとの関係も変化しうる。

定義

T の Rosser 証明可能性述語 $\text{Pr}_T^R(x)$ について、その Σ_1 反映原理 $\text{Rfn}_{\Sigma_1}(\text{Pr}_T^R)$ を $\{\text{Pr}_T^R(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \varphi : \varphi \in \Sigma_1\}$ とする。

$\text{Rfn}_{\Sigma_1}(\text{Pr}_T^R)$ は T の Σ_1 -健全性を形式化したもの。

定理 (倉橋, 2016)

T を無矛盾な理論とする。

- ① ある Rosser 証明可能性述語 $\text{Pr}_T^R(x)$ が存在して、その全ての Rosser 文 φ に対して $T + \text{Rfn}_{\Sigma_1}(\text{Pr}_T^R) \vdash \varphi$ が成り立つ。
- ② ある Rosser 証明可能性述語 $\text{Pr}_T^R(x)$ とその Rosser 文 φ が存在して、 $T + \text{Rfn}_{\Sigma_1}(\text{Pr}_T^R) \not\vdash \varphi$ 。

Rosser 証明可能性述語による無矛盾性

$\neg \text{Pr}_T^R(\ulcorner \bar{0} = \bar{1} \urcorner)$ を Con_T^R と書く.

Rosser 証明可能性述語による無矛盾性

$\neg \text{Pr}_T^R(\ulcorner \bar{0} = \bar{1} \urcorner)$ を Con_T^R と書く.

- Rosser 証明可能性述語がもし標準的な証明可能性述語なら, Gödel の第二不完全性定理より $T \not\models \text{Con}_T^R$ が成り立つはず.

Rosser 証明可能性述語による無矛盾性

$\neg \text{Pr}_T^R(\ulcorner \bar{0} = \bar{1} \urcorner)$ を Con_T^R と書く.

- Rosser 証明可能性述語がもし標準的な証明可能性述語なら, Gödel の第二不完全性定理より $T \not\models \text{Con}_T^R$ が成り立つはず.
- しかし, Rosser 証明可能性述語について第二不完全性定理は成立しない.

Kreisel の注意

$\text{Pr}_T^R(x)$ を T の Rosser 証明可能性述語とすると, $\text{PA} \vdash \text{Con}_T^R$ である.

Rosser 証明可能性述語による無矛盾性

$\neg \text{Pr}_T^R(\ulcorner \bar{0} = \bar{1} \urcorner)$ を Con_T^R と書く.

- Rosser 証明可能性述語がもし標準的な証明可能性述語なら, Gödel の第二不完全性定理より $T \not\models \text{Con}_T^R$ が成り立つはず.
- しかし, Rosser 証明可能性述語について第二不完全性定理は成立しない.

Kreisel の注意

$\text{Pr}_T^R(x)$ を T の Rosser 証明可能性述語とすると, $\text{PA} \vdash \text{Con}_T^R$ である.

標準的であることの条件のいずれかが Rosser 証明可能性述語について成立しない.

標準的証明可能性述語の条件 (再掲)

- ① $\text{Pr}_T(x)$ は Σ_1 論理式.
- ② 任意の文 φ, ψ について, $\text{PA} \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \rightarrow \psi \urcorner) \rightarrow (\text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner))$.
- ③ 任意の Σ_1 文 φ について, $\text{PA} \vdash \varphi \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$.

Rosser 証明可能性述語に関する諸条件

Rosser 証明可能性述語についてどの性質が成り立つのか？.

Rosser 証明可能性述語に関する諸条件

Rosser 証明可能性述語についてどの性質が成り立つのか？.

諸条件

それぞれの条件に次のように名前を付けておく.

D2 : 任意の文 φ, ψ について,

$$\text{PA} \vdash \text{Pr}_T^R(\ulcorner \varphi \rightarrow \psi \urcorner) \rightarrow (\text{Pr}_T^R(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_T^R(\ulcorner \psi \urcorner)).$$

D3 : 任意の文 φ について, $\text{PA} \vdash \text{Pr}_T^R(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_T^R(\ulcorner \text{Pr}_T^R(\ulcorner \varphi \urcorner) \urcorner).$

S : 任意の Σ_1 文 φ について, $\text{PA} \vdash \varphi \rightarrow \text{Pr}_T^R(\ulcorner \varphi \urcorner).$

Rosser 証明可能性述語に関する諸条件

Rosser 証明可能性述語についてどの性質が成り立つのか？.

諸条件

それぞれの条件に次のように名前を付けておく.

D2 : 任意の文 φ, ψ について,

$$\text{PA} \vdash \text{Pr}_T^R(\ulcorner \varphi \rightarrow \psi \urcorner) \rightarrow (\text{Pr}_T^R(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_T^R(\ulcorner \psi \urcorner)).$$

D3 : 任意の文 φ について, $\text{PA} \vdash \text{Pr}_T^R(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_T^R(\ulcorner \text{Pr}_T^R(\ulcorner \varphi \urcorner) \urcorner).$

S : 任意の Σ_1 文 φ について, $\text{PA} \vdash \varphi \rightarrow \text{Pr}_T^R(\ulcorner \varphi \urcorner).$

- D2 か D3 のどちらかは必ず成立しない.

Rosser 証明可能性述語に関する諸条件

Rosser 証明可能性述語についてどの性質が成り立つのか？

諸条件

それぞれの条件に次のように名前を付けておく。

D2 : 任意の文 φ, ψ について,

$$\text{PA} \vdash \text{Pr}_T^R(\ulcorner \varphi \rightarrow \psi \urcorner) \rightarrow (\text{Pr}_T^R(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_T^R(\ulcorner \psi \urcorner)).$$

D3 : 任意の文 φ について, $\text{PA} \vdash \text{Pr}_T^R(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_T^R(\ulcorner \text{Pr}_T^R(\ulcorner \varphi \urcorner) \urcorner).$

S : 任意の Σ_1 文 φ について, $\text{PA} \vdash \varphi \rightarrow \text{Pr}_T^R(\ulcorner \varphi \urcorner).$

- D2 か D3 のどちらかは必ず成立しない。
- S は必ず成立しない。

命題

T が無矛盾ならば $T \not\vdash \varphi \rightarrow \text{Pr}_T^R(\ulcorner \varphi \urcorner)$ となる Σ_1 文 φ がある。

Guaspari and Solovay, Arai の定理

この問題については次の結果が得られている。

Guaspari and Solovay, Arai の定理

この問題については次の結果が得られている。

定理 (Guaspari and Solovay, 1979)

D2 と **D3** の成立しないような **Rosser** 証明可能性述語が存在する。

Guaspari and Solovay, Arai の定理

この問題については次の結果が得られている。

定理 (Guaspari and Solovay, 1979)

D2 と **D3** の成立しないような Rosser 証明可能性述語が存在する。

定理 (Arai, 1990)

D2 の成り立つ Rosser 証明可能性述語と **D3** の成立する Rosser 証明可能性述語が存在する。

Guaspari and Solovay, Arai の定理

この問題については次の結果が得られている。

定理 (Guaspari and Solovay, 1979)

D2 と **D3** の成立しないような Rosser 証明可能性述語が存在する。

定理 (Arai, 1990)

D2 の成り立つ Rosser 証明可能性述語と **D3** の成立する Rosser 証明可能性述語が存在する。

- **D2** もしくは **D3** の一方だけでは第二不完全性定理が証明できない。

Kreisel の注意への注意

- $\sigma(u)$ が T を表現する $\Delta_1(\text{PA})$ 論理式ならば $\text{Prf}_\sigma(x, y)$ は T の $\Delta_1(\text{PA})$ 証明述語.

Kreisel の注意への注意

- $\sigma(u)$ が T を表現する $\Delta_1(\text{PA})$ 論理式ならば $\text{Prf}_\sigma(x, y)$ は T の $\Delta_1(\text{PA})$ 証明述語.
- $\text{Prf}_\sigma(x, y)$ から得られる Rosser 証明可能性述語 から定められる無矛盾性を表す文 Con_σ^R について $\text{PA} \vdash \text{Con}_\sigma^R$.

Kreisel の注意への注意

- $\sigma(u)$ が T を表現する $\Delta_1(\text{PA})$ 論理式ならば $\text{Prf}_\sigma(x, y)$ は T の $\Delta_1(\text{PA})$ 証明述語.
- $\text{Prf}_\sigma(x, y)$ から得られる Rosser 証明可能性述語 から定められる無矛盾性を表す文 Con_σ^R について $\text{PA} \vdash \text{Con}_\sigma^R$.

しかし, $\sigma(u)$ が $\Delta_1(\text{PA})$ 論理式であるという条件を落とせば, Con_σ^R が一般には証明可能であるとはいえなくなる.

定理 (倉橋, 2014)

T が無矛盾ならば, T を弱表現する Σ_1 論理式 $\sigma(u)$ が存在して, $T \not\vdash \text{Con}_\sigma^R$ が成り立つ.

Kreisel の注意への注意

- $\sigma(u)$ が T を表現する $\Delta_1(\text{PA})$ 論理式ならば $\text{Prf}_\sigma(x, y)$ は T の $\Delta_1(\text{PA})$ 証明述語.
- $\text{Prf}_\sigma(x, y)$ から得られる Rosser 証明可能性述語 から定められる無矛盾性を表す文 Con_σ^R について $\text{PA} \vdash \text{Con}_\sigma^R$.

しかし, $\sigma(u)$ が $\Delta_1(\text{PA})$ 論理式であるという条件を落とせば, Con_σ^R が一般には証明可能であるとはいえなくなる.

定理 (倉橋, 2014)

T が無矛盾ならば, T を弱表現する Σ_1 論理式 $\sigma(u)$ が存在して, $T \not\vdash \text{Con}_\sigma^R$ が成り立つ.

しかしこの場合, 論理式 $\text{Pr}_\sigma^R(x)$ がもはや T の証明可能性述語になっているとは限らない.

内容

- ① 不完全性定理と証明可能性述語
- ② Rosser 証明可能性述語
- ③ 証明可能性論理

Löb の定理

$\mathbf{Pr}_T(x)$ を T の標準的な証明可能性述語とする.

定理 (Löb の定理, 1955)

任意の文 φ について, $T \vdash \mathbf{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \varphi$ ならば $T \vdash \varphi$ である.

Löb の定理

$\text{Pr}_T(x)$ を T の標準的な証明可能性述語とする.

定理 (Löb の定理, 1955)

任意の文 φ について, $T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \varphi$ ならば $T \vdash \varphi$ である.

形式化された Löb の定理

任意の文 φ について, $\text{PA} \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$ である.

Löb の定理

$\text{Pr}_T(x)$ を T の標準的な証明可能性述語とする.

定理 (Löb の定理, 1955)

任意の文 φ について, $T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \varphi$ ならば $T \vdash \varphi$ である.

形式化された Löb の定理

任意の文 φ について, $\text{PA} \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$ である.

- $\text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$ を $\Box_T \varphi$ と略記すれば, $T \vdash \varphi$ ならば $T \vdash \Box_T \varphi$.

Löb の定理

$\text{Pr}_T(x)$ を T の標準的な証明可能性述語とする.

定理 (Löb の定理, 1955)

任意の文 φ について, $T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \varphi$ ならば $T \vdash \varphi$ である.

形式化された Löb の定理

任意の文 φ について, $\text{PA} \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$ である.

- $\text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$ を $\Box_T \varphi$ と略記すれば, $T \vdash \varphi$ ならば $T \vdash \Box_T \varphi$.
- $T \vdash \Box_T(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box_T \varphi \rightarrow \Box_T \psi)$ や
 $T \vdash \Box_T(\Box_T \varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \Box_T \varphi$.

Löb の定理

$\text{Pr}_T(x)$ を T の標準的な証明可能性述語とする。

定理 (Löb の定理, 1955)

任意の文 φ について, $T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \varphi$ ならば $T \vdash \varphi$ である。

形式化された Löb の定理

任意の文 φ について, $\text{PA} \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$ である。

- $\text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$ を $\Box_T \varphi$ と略記すれば, $T \vdash \varphi$ ならば $T \vdash \Box_T \varphi$.
- $T \vdash \Box_T(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box_T \varphi \rightarrow \Box_T \psi)$ や
 $T \vdash \Box_T(\Box_T \varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \Box_T \varphi$.
- こういった性質は様相論理で取り扱われるものであり, この点に注目して, 様相論理を用いて T の証明可能性述語に関してどのような性質が成り立つのかを分析する研究が行われている。

様相論理 K と GL

様相命題論理の言語は命題論理の言語に新たな 1 変数論理記号 $\Box$ を加えたもの。

様相論理 K と GL

様相命題論理の言語は命題論理の言語に新たな1変数論理記号 $\Box$ を加えたもの。
次の公理と推論規則から得られる様相命題論理を **K** という。

定義（様相論理 K）

公理

- 様相命題論理の言語の恒真式,
- 様相命題論理式 A, B について $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$.

推論規則

モーダス・ポネンス : $\frac{A, \quad A \rightarrow B}{B},$

ネセシテーション : $\frac{A}{\Box A}.$

様相論理 K と GL

様相命題論理の言語は命題論理の言語に新たな 1 変数論理記号 $\Box$ を加えたもの。
次の公理と推論規則から得られる様相命題論理を **K** という。

定義（様相論理 K）

公理

- 様相命題論理の言語の恒真式,
- 様相命題論理式 A, B について $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$.

推論規則

モーダス・ポネンス : $\frac{A, \quad A \rightarrow B}{B},$

ネセシテーション : $\frac{A}{\Box A}.$

定義（様相論理 GL）

K に次の公理を加えることで得られる様相命題論理を **GL** という。

- 様相命題論理式 A について $\Box(\Box A \rightarrow A) \rightarrow \Box A.$

算術的解釈と GL の算術的健全性

様相命題論理 **GL** の公理と推論規則は、標準的な証明可能性述語がもつ性質を抜き出したもの。

算術的解釈と GL の算術的健全性

様相命題論理 GL の公理と推論規則は、標準的な証明可能性述語がもつ性質を抜き出したもの。

そのことを明確に述べるために次の概念を用意する。

定義

命題変数全体の集合から $\mathcal{L}_A$ -文全体の集合への写像を**算術的解釈**という。

算術的解釈と GL の算術的健全性

様相命題論理 **GL** の公理と推論規則は、標準的な証明可能性述語がもつ性質を抜き出したもの。

そのことを明確に述べるために次の概念を用意する。

定義

命題変数全体の集合から $\mathcal{L}_A$ -文全体の集合への写像を**算術的解釈**という。

各算術的解釈 f は、様相命題論理式全体の集合から $\mathcal{L}_A$ -文全体の集合への写像 f_T に次のようにして一意に拡張できる：

- ① 各命題変数 p について $f_T(p)$ は $f(p)$,
- ② f_T は命題結合子を保存する（例えば $f_T(A \wedge B)$ は $f_T(A) \wedge f_T(B)$ ）,
- ③ $f_T(\Box A)$ は $\text{Pr}_T(\ulcorner f_T(A) \urcorner)$.

算術的解釈と GL の算術的健全性

様相命題論理 GL の公理と推論規則は、標準的な証明可能性述語がもつ性質を抜き出したもの。

そのことを明確に述べるために次の概念を用意する。

定義

命題変数全体の集合から $\mathcal{L}_A$ -文全体の集合への写像を**算術的解釈**という。

各算術的解釈 f は、様相命題論理式全体の集合から $\mathcal{L}_A$ -文全体の集合への写像 f_T に次のようにして一意に拡張できる：

- ① 各命題変数 p について $f_T(p)$ は $f(p)$,
- ② f_T は命題結合子を保存する（例えば $f_T(A \wedge B)$ は $f_T(A) \wedge f_T(B)$ ）,
- ③ $f_T(\Box A)$ は $\text{Pr}_T(\ulcorner f_T(A) \urcorner)$.

命題（GL の算術的健全性）

任意の様相命題論理式 A について、

$\text{GL} \vdash A \Rightarrow \forall f, T \vdash f_T(A)$.

Solovay の算術的完全性定理

定義 ($\mathbf{Pr}_T(x)$ の証明可能性論理)

$\mathbf{PL}(\mathbf{Pr}_T) = \{A : \forall f, T \vdash f_T(A)\}$ を $\mathbf{Pr}_T(x)$ の証明可能性論理という.

- 算術的健全性は $\mathbf{GL} \subseteq \mathbf{PL}(\mathbf{Pr}_T)$ と表せる.

Solovay の算術的完全性定理

定義 ($\mathbf{Pr}_T(x)$ の証明可能性論理)

$\mathbf{PL}(\mathbf{Pr}_T) = \{A : \forall f, T \vdash f_T(A)\}$ を $\mathbf{Pr}_T(x)$ の証明可能性論理という.

- 算術的健全性は $\mathbf{GL} \subseteq \mathbf{PL}(\mathbf{Pr}_T)$ と表せる.
- 各 $A \in \mathbf{PL}(T)$ は, T が証明できる, $\mathbf{Pr}_T(x)$ の様相演算子としての性質といえる.

Solovay の算術的完全性定理

定義 ($\mathbf{Pr}_T(x)$ の証明可能性論理)

$\mathbf{PL}(\mathbf{Pr}_T) = \{A : \forall f, T \vdash f_T(A)\}$ を $\mathbf{Pr}_T(x)$ の証明可能性論理という.

- 算術的健全性は $\mathbf{GL} \subseteq \mathbf{PL}(\mathbf{Pr}_T)$ と表せる.
- 各 $A \in \mathbf{PL}(T)$ は, T が証明できる, $\mathbf{Pr}_T(x)$ の様相演算子としての性質といえる.

標準的な証明可能性述語の証明可能性論理が $\mathbf{GL}$ と一致することが Solovay によって証明されており, その定理と証明方法はこの研究分野の一つの礎となっている.

Solovay の算術的完全性定理

定義 ($\mathbf{Pr}_T(x)$ の証明可能性論理)

$\mathbf{PL}(\mathbf{Pr}_T) = \{A : \forall f, T \vdash f_T(A)\}$ を $\mathbf{Pr}_T(x)$ の証明可能性論理という.

- 算術的健全性は $\mathbf{GL} \subseteq \mathbf{PL}(\mathbf{Pr}_T)$ と表せる.
- 各 $A \in \mathbf{PL}(T)$ は, T が証明できる, $\mathbf{Pr}_T(x)$ の様相演算子としての性質といえる.

標準的な証明可能性述語の証明可能性論理が $\mathbf{GL}$ と一致することが Solovay によって証明されており, その定理と証明方法はこの研究分野の一つの礎となっている.

Solovay の算術的完全性定理, 1976

T が Σ_1 -健全とすると, $\mathbf{PL}(\mathbf{Pr}_T) = \mathbf{GL}$.

Visser の定理

Visser は Solovay の定理を次のように拡張した.

定理 (Visser, 1984)

$\text{PL}(\text{Pr}_T)$ は $\text{Pr}_T(x)$ の高さによって決まる.

Visser の定理

Visser は Solovay の定理を次のように拡張した.

定理 (Visser, 1984)

$\text{PL}(\text{Pr}_T)$ は $\text{Pr}_T(x)$ の高さによって決まる.

特に, $\text{PL}(\text{Pr}_T) = \text{GL} \Leftrightarrow \text{Pr}_T(x)$ の高さは無限.

Visser の定理

Visser は Solovay の定理を次のように拡張した。

定理 (Visser, 1984)

$\text{PL}(\text{Pr}_T)$ は $\text{Pr}_T(x)$ の高さによって決まる。

特に, $\text{PL}(\text{Pr}_T) = \text{GL} \Leftrightarrow \text{Pr}_T(x)$ の高さは無限。

無矛盾な理論に対して、高さが無限である証明可能性述語の存在を示していたので、次が言える。

系 (倉橋)

任意の無矛盾な理論 T に対して、 T を表現する Σ_1 論理式 $\sigma(u)$ が存在して、

$\text{PL}(\text{Pr}_\sigma) = \text{GL}$ となる。

証明可能性論理が **GL** と一致しない証明可能性述語

標準的でない証明可能性述語の証明可能性論理が **GL** と一致するとは限らない.

証明可能性論理が GL と一致しない証明可能性述語

標準的でない証明可能性述語の証明可能性論理が GL と一致するとは限らない.

例

- Feferman の定理により, $PA \vdash Con_{\pi}$ となる証明可能性述語 $Pr_{\pi}(x)$ がとれる.

証明可能性論理が GL と一致しない証明可能性述語

標準的でない証明可能性述語の証明可能性論理が GL と一致するとは限らない.

例

- Feferman の定理により, $PA \vdash \mathbf{Con}_\pi$ となる証明可能性述語 $\mathbf{Pr}_\pi(x)$ がとれる.
- $\neg \Box \perp \in \mathbf{PL}(\mathbf{Pr}_\pi)$ であるが $GL \not\vdash \neg \Box \perp$ なので, $\mathbf{PL}(\mathbf{Pr}_\pi) \neq GL$.

証明可能性論理が GL と一致しない証明可能性述語

標準的でない証明可能性述語の証明可能性論理が GL と一致するとは限らない.

例

- Feferman の定理により, $PA \vdash Con_{\pi}$ となる証明可能性述語 $Pr_{\pi}(x)$ がとれる.
- $\neg \Box \perp \in PL(Pr_{\pi})$ であるが $GL \not\vdash \neg \Box \perp$ なので, $PL(Pr_{\pi}) \neq GL$.
- $PL(Pr_{\pi})$ がどのような論理なのかはまだ分かっていない (Montagna, Visser).

証明可能性論理が GL と一致しない証明可能性述語

標準的でない証明可能性述語の証明可能性論理が GL と一致するとは限らない.

例

- Feferman の定理により, $PA \vdash \mathbf{Con}_\pi$ となる証明可能性述語 $\mathbf{Pr}_\pi(x)$ がとれる.
- $\neg \Box \perp \in \mathbf{PL}(\mathbf{Pr}_\pi)$ であるが $GL \not\vdash \neg \Box \perp$ なので, $\mathbf{PL}(\mathbf{Pr}_\pi) \neq GL$.
- $\mathbf{PL}(\mathbf{Pr}_\pi)$ がどのような論理なのかはまだ分かっていない (Montagna, Visser).

Shavrukov は Σ_2 論理式 $\mathbf{Pr}_{PA}^S(x)$ を $\exists y(\mathbf{Con}_{I\Sigma_y} \wedge \mathbf{Pr}_{I\Sigma_y}(x))$ に対し, 対応する証明可能性論理を与えた.

証明可能性論理が GL と一致しない証明可能性述語

標準的でない証明可能性述語の証明可能性論理が GL と一致するとは限らない。

例

- Feferman の定理により, $PA \vdash Con_{\pi}$ となる証明可能性述語 $Pr_{\pi}(x)$ がとれる.
- $\neg \Box \perp \in PL(Pr_{\pi})$ であるが $GL \not\vdash \neg \Box \perp$ なので, $PL(Pr_{\pi}) \neq GL$.
- $PL(Pr_{\pi})$ がどのような論理なのかはまだ分かっていない (Montagna, Visser).

Shavrukov は Σ_2 論理式 $Pr_{PA}^S(x)$ を $\exists y(Con_{I\Sigma_y} \wedge Pr_{I\Sigma_y}(x))$ に対し, 対応する証明可能性論理を与えた.

定義

K に次の公理を加えることで得られる様相命題論理を F という.

- $\neg \Box \perp$.
- 様相命題論理式 A, B について $\Box A \rightarrow \Box((\Box B \rightarrow B) \vee \Box A)$.

証明可能性論理が GL と一致しない証明可能性述語

標準的でない証明可能性述語の証明可能性論理が GL と一致するとは限らない。

例

- Feferman の定理により, $PA \vdash \text{Con}_\pi$ となる証明可能性述語 $\text{Pr}_\pi(x)$ がとれる.
- $\neg \Box \perp \in \text{PL}(\text{Pr}_\pi)$ であるが $GL \not\vdash \neg \Box \perp$ なので, $\text{PL}(\text{Pr}_\pi) \neq GL$.
- $\text{PL}(\text{Pr}_\pi)$ がどのような論理なのかはまだ分かっていない (Montagna, Visser).

Shavrukov は Σ_2 論理式 $\text{Pr}_{PA}^S(x)$ を $\exists y(\text{Con}_{I\Sigma_y} \wedge \text{Pr}_{I\Sigma_y}(x))$ に対し, 対応する証明可能性論理を与えた.

定義

K に次の公理を加えることで得られる様相命題論理を F という.

- $\neg \Box \perp$.
- 様相命題論理式 A, B について $\Box A \rightarrow \Box((\Box B \rightarrow B) \vee \Box A)$.

定理 (Shavrukov, 1994)

$$\text{PL}(\text{Pr}_{PA}^S) = F.$$

K の算術的完全性定理

- 議論を $\text{Pr}_\sigma(x)$ という形の証明可能性述語に絞った場合はどうか？

K の算術的完全性定理

- 議論を $\text{Pr}_\sigma(x)$ という形の証明可能性述語に絞った場合はどうか？
- $\sigma(u)$ が Σ_1 なら, Visser の定理により分類が完了している.

K の算術的完全性定理

- 議論を $\text{Pr}_\sigma(x)$ という形の証明可能性述語に絞った場合はどうか？
- $\sigma(u)$ が Σ_1 なら, Visser の定理により分類が完了している.
- Σ_1 でない $\sigma(u)$ に対して $\text{PL}(\sigma)$ はどんな集合？

K の算術的完全性定理

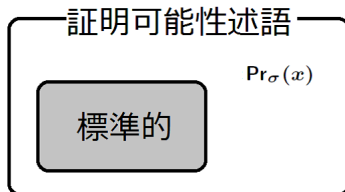
- 議論を $\text{Pr}_\sigma(x)$ という形の証明可能性述語に絞った場合はどうか？
- $\sigma(u)$ が Σ_1 なら, Visser の定理により分類が完了している.
- Σ_1 でない $\sigma(u)$ に対して $\text{PL}(\sigma)$ はどんな集合？
- この問題に関して, 次の結果を得た.

K の算術的完全性定理

- 議論を $\text{Pr}_\sigma(x)$ という形の証明可能性述語に絞った場合はどうか？
- $\sigma(u)$ が Σ_1 なら, Visser の定理により分類が完了している.
- Σ_1 でない $\sigma(u)$ に対して $\text{PL}(\sigma)$ はどんな集合？
- この問題に関して, 次の結果を得た.

定理 (倉橋)

T が無矛盾ならば, T を表現する Σ_2 論理式 $\sigma(u)$ が存在して, $\text{PL}(\text{Pr}_\sigma) = K$ となる.

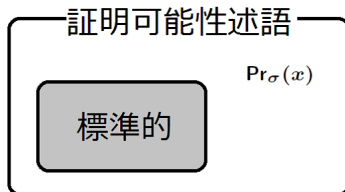


K の算術的完全性定理

- 議論を $\text{Pr}_\sigma(x)$ という形の証明可能性述語に絞った場合はどうか？
- $\sigma(u)$ が Σ_1 なら, Visser の定理により分類が完了している.
- Σ_1 でない $\sigma(u)$ に対して $\text{PL}(\sigma)$ はどんな集合？
- この問題に関して, 次の結果を得た.

定理 (倉橋)

T が無矛盾ならば, T を表現する Σ_2 論理式 $\sigma(u)$ が存在して, $\text{PL}(\text{Pr}_\sigma) = K$ となる.



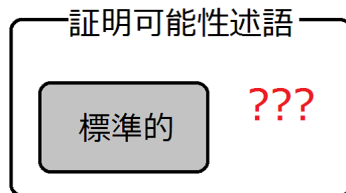
どんな論理式 $\sigma(u)$ についても $\text{PL}(\text{Pr}_\sigma)$ が命題様相論理 K を含むので, 次がわかる.

系 (倉橋)

$\bigcap \{ \text{PL}(\text{Pr}_\sigma) : \sigma(u) \text{ は } T \text{ を表現する論理式} \} = K.$

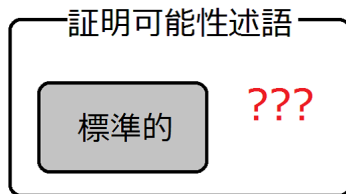
最後に

標準的でない証明可能性述語についてはまだまだよく分からない。



最後に

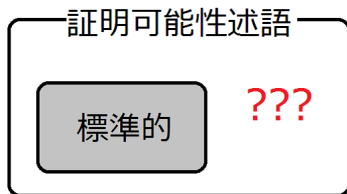
標準的でない証明可能性述語についてはまだまだよく分からない。



- 証明や証明可能性を形式化する，ということがよく分かっていないということ？

最後に

標準的でない証明可能性述語についてはまだまだよく分からない。



- 証明や証明可能性を形式化する，ということがよく分かっていないということ？
続いて次の問題を考えている。

定義

K に次の公理を加えることで得られる様相命題論理を KD という。

- $\neg \Box \perp$.

問題

T を無矛盾な理論とする． $PL(\text{Pr}_T) = KD$ となる T の証明可能性述語 $\text{Pr}_T(x)$ はあるか？