$0 = 1$ の証明をもつ超準モデル (菊池誠（神戸大学）との共同研究)

倉橋太志

木更津工業高等専門学校

第 2 回山陰基礎論・解析学研究集会
@米子
2015 年 1 月 24 日

Contents

1. 準備
2. **PA** $+$ **Con$_{\textbf{PA}}$** のモデルにおける証明可能性
3. $\mathbf{0} = \mathbf{1}$ の証明に至るまで
4. 正気でないモデル

ペアノ算術

PA: ペアノ算術 **(Peano Arithmetic)**
$\cdots$ 算術の基本的な公理と帰納法公理を持つ理論

ペアノ算術

PA: ペアノ算術 (Peano Arithmetic)
⋯ 算術の基本的な公理と帰納法公理を持つ理論

PA の公理

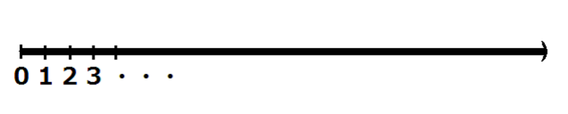
- $\forall x(0 \neq S(x))$
- $\forall x \forall y(S(x) = S(y) \to x = y)$
- $\forall x(x + 0 = x)$
- $\forall x \forall y(x + S(y) = S(x + y))$
- $\forall x(x \times 0 = 0)$
- $\forall x \forall y(x \times S(y) = (x \times y) + x)$
- 全ての論理式 φ について
  $\forall y_0 \cdots \forall y_{k-1}((\varphi(0) \wedge \forall x(\varphi(x) \to \varphi(S(x)))) \to \forall x \varphi(x))$

算術の標準モデル

PA は $\mathbb{N}$（算術の標準モデル）に関する理論

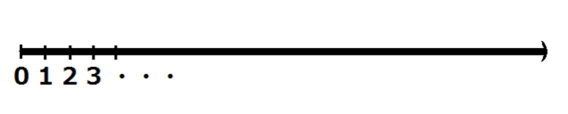
算術の標準モデル

PA は $\mathbb{N}$（算術の標準モデル）に関する理論



算術の標準モデル

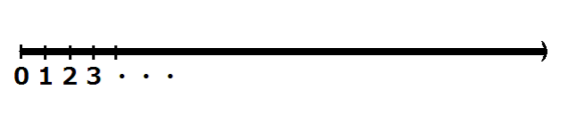
PA は $\mathbb{N}$（算術の標準モデル）に関する理論



- $\mathbb{N}$ で文 φ が正しいことを $\mathbb{N} \models \varphi$ とかく.

算術の標準モデル

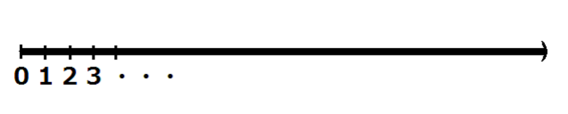
PA は $\mathbb{N}$（算術の標準モデル）に関する理論



- $\mathbb{N}$ で文 φ が正しいことを $\mathbb{N} \models \varphi$ とかく.
- **PA** の任意の公理 φ について $\mathbb{N} \models \varphi$.

算術の標準モデル

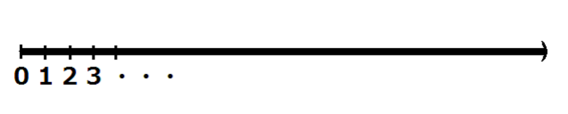
PA は $\mathbb{N}$（算術の標準モデル）に関する理論



- $\mathbb{N}$ で文 φ が正しいことを $\mathbb{N} \models \varphi$ とかく.
- **PA** の任意の公理 φ について $\mathbb{N} \models \varphi$.
  このことを $\mathbb{N}$ は **PA** のモデルであるという.

算術の標準モデル

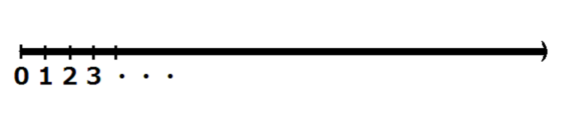
PA は $\mathbb{N}$（算術の標準モデル）に関する理論



- $\mathbb{N}$ で文 φ が正しいことを $\mathbb{N} \models \varphi$ とかく.
- **PA** の任意の公理 φ について $\mathbb{N} \models \varphi$.
  このことを $\mathbb{N}$ は **PA** のモデルであるという.
- **TA** $= \{\varphi \mid \mathbb{N} \models \varphi\}$: True Arithmetic

算術の標準モデル

PA は $\mathbb{N}$（算術の標準モデル）に関する理論

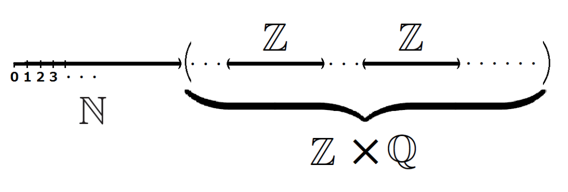


- $\mathbb{N}$ で文 φ が正しいことを $\mathbb{N} \models \varphi$ とかく.
- **PA** の任意の公理 φ について $\mathbb{N} \models \varphi$.
  このことを $\mathbb{N}$ は **PA** のモデルであるという.
- **TA** $= \{\varphi \mid \mathbb{N} \models \varphi\}$: True Arithmetic
  $\mathbb{N}$ は **TA** のモデル.

算術の超準モデル

PA や **TA** は超準モデル（$\mathbb{N}$ と同型でないモデル）をもつ.

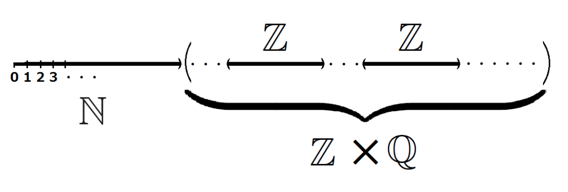
PA の可算超準モデルの順序構造



算術の超準モデル

PA や **TA** は超準モデル（$\mathbb{N}$ と同型でないモデル）をもつ．

PA の可算超準モデルの順序構造

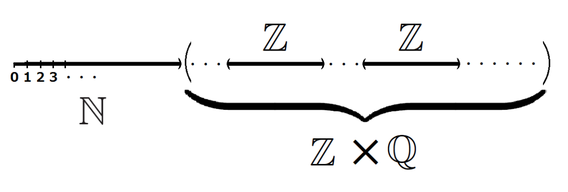


特に **PA** の超準モデル M は $\mathbb{N}$ の終拡大（$\mathbb{N} \subseteq_e M$）．

算術の超準モデル

PA や **TA** は超準モデル（$\mathbb{N}$ と同型でないモデル）をもつ.

PA の可算超準モデルの順序構造



特に **PA** の超準モデル M は $\mathbb{N}$ の終拡大（$\mathbb{N} \subseteq_e M$）.
つまり

1. $\mathbb{N} \subseteq M$ かつ
2. $\forall a \in \mathbb{N}\ \forall b \in M (M \models b < a \Rightarrow b \in \mathbb{N})$.

形式的証明の算術化

- **PA** からの証明は，公理という有限文字列から新たな文字列（定理）を生成する操作であるともみれる.

形式的証明の算術化

- **PA** からの証明は，公理という有限文字列から新たな文字列（定理）を生成する操作であるともみれる．
- そのようにみた証明は，文字列を２進列にコーディングすることによりコンピュータでシミュレートできるし，

形式的証明の算術化

- **PA** からの証明は，公理という有限文字列から新たな文字列（定理）を生成する操作であるともみれる．
- そのようにみた証明は，文字列を２進列にコーディングすることによりコンピュータでシミュレートできるし，
  自然数論でもシミュレートできる．

形式的証明の算術化

- **PA** からの証明は，公理という有限文字列から新たな文字列（定理）を生成する操作であるともみれる．
- そのようにみた証明は，文字列を２進列にコーディングすることによりコンピュータでシミュレートできるし，
自然数論でもシミュレートできる．
- 全ての論理式 φ とそのコード $\ulcorner\varphi\urcorner$ (**Gödel** 数) について

$$\mathbb{N} \models \mathbf{Pr}(\ulcorner\varphi\urcorner) \Leftrightarrow \varphi \text{ は } \mathbf{PA} \text{ で証明可能}$$

となる論理式 $\mathbf{Pr}(x)$ がとれる．

形式的証明の算術化

- **PA** からの証明は，公理という有限文字列から新たな文字列（定理）を生成する操作であるともみれる．
- そのようにみた証明は，文字列を２進列にコーディングすることによりコンピュータでシミュレートできるし，
  自然数論でもシミュレートできる．
- 全ての論理式 φ とそのコード $\ulcorner\varphi\urcorner$ $(\textbf{Gödel 数})$ について

  $$\mathbb{N} \models \textsf{\textbf{Pr}}(\ulcorner\varphi\urcorner) \Leftrightarrow \varphi \text{ は } \textsf{\textbf{PA}} \text{ で証明可能}$$

  となる論理式 $\textsf{\textbf{Pr}}(x)$ がとれる．

$\neg\textsf{\textbf{Pr}}(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$ を $\textsf{\textbf{Con}}_{\textsf{\textbf{PA}}}$ とかく（“**PA** は無矛盾” を意味する）．

$\mathbf{0 = 1}$ の証明をもつモデル

第二不完全性定理 (Gödel) より

PA で $\mathbf{Con_{PA}}$ は証明できない

$\mathbf{0 = 1}$ の証明をもつモデル

第二不完全性定理 (Gödel) より

PA で $\mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}$ は証明できない

完全性定理 (Gödel)

任意の理論 T と文 φ について,
T で φ が証明できない $\Rightarrow$ φ の成り立たない T のモデルが存在する

$\mathbf{0 = 1}$ の証明をもつモデル

第二不完全性定理 (Gödel) より

PA で $\mathbf{Con}_{\mathbf{PA}}$ は証明できない

完全性定理 (Gödel)

任意の理論 $\boldsymbol{T}$ と文 φ について，
$\boldsymbol{T}$ で φ が証明できない $\Rightarrow$ φ の成り立たない $\boldsymbol{T}$ のモデルが存在する

- 第二不完全性定理と完全性定理より
  $\mathbf{Con}_{\mathbf{PA}}$ の成り立たない **PA** のモデル $\boldsymbol{M}$ が存在.

$\mathbf{0} = \mathbf{1}$ の証明をもつモデル

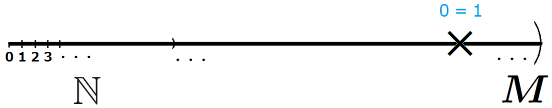
第二不完全性定理 (Gödel) より

PA で $\mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}$ は証明できない

完全性定理 (Gödel)

任意の理論 T と文 φ について,
T で φ が証明できない $\Rightarrow$ φ の成り立たない T のモデルが存在する

- 第二不完全性定理と完全性定理より
  $\mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}$ の成り立たない PA のモデル M が存在.
- $M \models \mathsf{Pr}(\ulcorner \mathbf{0} = \mathbf{1} \urcorner)$ なので



$\mathbf{0 = 1}$ の証明をもつモデル

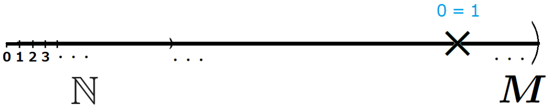
第二不完全性定理 (Gödel) より

PA で $\mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}$ は証明できない

完全性定理 (Gödel)

任意の理論 T と文 φ について,
T で φ が証明できない $\Rightarrow$ φ の成り立たない T のモデルが存在する

- 第二不完全性定理と完全性定理より
  $\mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}$ の成り立たない **PA** のモデル M が存在.
- $M \models \mathsf{Pr}(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$ なので



- $\mathbf{0 = 1}$ の証明はどのようにして得られた？

$0 = 1$ の証明をもつモデル

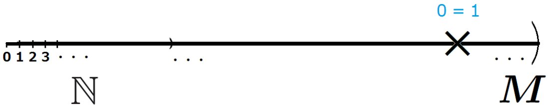
第二不完全性定理 (Gödel) より

PA で $\mathrm{Con}_{\mathrm{PA}}$ は証明できない

完全性定理 (Gödel)

任意の理論 T と文 φ について,
T で φ が証明できない $\Rightarrow$ φ の成り立たない T のモデルが存在する

- 第二不完全性定理と完全性定理より
  $\mathrm{Con}_{\mathrm{PA}}$ の成り立たない PA のモデル M が存在.
- $M \models \mathrm{Pr}(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$ なので



- $0 = 1$ の証明はどのようにして得られた？
- $0 = 1$ の証明が得られるまでの状況（PA + $\mathrm{Con}_{\mathrm{PA}}$ のモデル）を調べる

1. 準備
2. **$\mathsf{PA} + \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}$ のモデルにおける証明可能性**
3. $\mathbf{0} = \mathbf{1}$ の証明に至るまで
4. 正気でないモデル

超準モデルにおける証明可能性

定義

PA のモデル M について

$$\mathsf{Thm}(M) := \{\varphi \mid M \models \mathsf{Pr}(\ulcorner \varphi \urcorner)\}.$$

超準モデルにおける証明可能性

定義

PA のモデル M について

$$\mathbf{Thm}(M) := \{\varphi \mid M \models \mathbf{Pr}(\ulcorner\varphi\urcorner)\}.$$

命題

1. $\mathbf{Thm}(\mathbb{N}) = \{\varphi \mid \varphi$ は **PA** で証明可能 $\}$.

超準モデルにおける証明可能性

定義

PA のモデル M について

$$\mathsf{Thm}(M) := \{\varphi \mid M \models \mathsf{Pr}(\ulcorner\varphi\urcorner)\}.$$

命題

1. $\mathsf{Thm}(\mathbb{N}) = \{\varphi \mid \varphi$ は PA で証明可能 $\}$.
2. $M \subseteq_e N \Rightarrow \mathsf{Thm}(M) \subseteq \mathsf{Thm}(N)$.

超準モデルにおける証明可能性

定義

PA のモデル M について

$$\mathsf{Thm}(M) := \{\varphi \mid M \models \mathsf{Pr}(\ulcorner\varphi\urcorner)\}.$$

命題

1. $\mathsf{Thm}(\mathbb{N}) = \{\varphi \mid \varphi$ は PA で証明可能 $\}$.
2. $M \subseteq_e N \Rightarrow \mathsf{Thm}(M) \subseteq \mathsf{Thm}(N)$.
3. $\mathsf{Thm}(\mathbb{N}) \subseteq \mathsf{Thm}(M)$.

超準モデルにおける証明可能性

定義

PA のモデル M について

$$\mathsf{Thm}(M) := \{\varphi \mid M \models \mathsf{Pr}(\ulcorner\varphi\urcorner)\}.$$

命題

1. $\mathsf{Thm}(\mathbb{N}) = \{\varphi \mid \varphi$ は PA で証明可能 $\}$.
2. $M \subseteq_e N \Rightarrow \mathsf{Thm}(M) \subseteq \mathsf{Thm}(N)$.
3. $\mathsf{Thm}(\mathbb{N}) \subseteq \mathsf{Thm}(M)$.
4. $M \models \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}} \Leftrightarrow \exists\varphi$ s.t. $\varphi \notin \mathsf{Thm}(M)$.

超準モデルにおける証明可能性

定義

PA のモデル M について

$$\mathsf{Thm}(M) := \{\varphi \mid M \models \mathsf{Pr}(\ulcorner\varphi\urcorner)\}.$$

命題

1. $\mathsf{Thm}(\mathbb{N}) = \{\varphi \mid \varphi$ は PA で証明可能 $\}$.
2. $M \subseteq_e N \Rightarrow \mathsf{Thm}(M) \subseteq \mathsf{Thm}(N)$.
3. $\mathsf{Thm}(\mathbb{N}) \subseteq \mathsf{Thm}(M)$.
4. $M \models \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}} \Leftrightarrow \exists\varphi$ s.t. $\varphi \notin \mathsf{Thm}(M)$.

いろいろな疑問

- $M \models \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}$ だけど $\mathsf{Thm}(\mathbb{N}) \subsetneq \mathsf{Thm}(M)$ となるものはある？

超準モデルにおける証明可能性

定義

PA のモデル M について

$$\textsf{Thm}(M) := \{\varphi \mid M \models \textsf{Pr}(\ulcorner\varphi\urcorner)\}.$$

命題

1. $\textsf{Thm}(\mathbb{N}) = \{\varphi \mid \varphi$ は PA で証明可能 $\}$.
2. $M \subseteq_e N \Rightarrow \textsf{Thm}(M) \subseteq \textsf{Thm}(N)$.
3. $\textsf{Thm}(\mathbb{N}) \subseteq \textsf{Thm}(M)$.
4. $M \models \textsf{Con}_{\textsf{PA}} \Leftrightarrow \exists\varphi$ s.t. $\varphi \notin \textsf{Thm}(M)$.

いろいろな疑問

- $M \models \textsf{Con}_{\textsf{PA}}$ だけど $\textsf{Thm}(\mathbb{N}) \subsetneq \textsf{Thm}(M)$ となるものはある？
- $\textsf{Thm}(\mathbb{N}) \subsetneq \textsf{Thm}(M)$ の場合，どんな文が増えている？(真・偽？)

超準モデルにおける証明可能性

定義

PA のモデル M について

$$\mathsf{Thm}(M) := \{\varphi \mid M \models \mathsf{Pr}(\ulcorner \varphi \urcorner)\}.$$

命題

1. $\mathsf{Thm}(\mathbb{N}) = \{\varphi \mid \varphi$ は PA で証明可能 $\}$.
2. $M \subseteq_e N \Rightarrow \mathsf{Thm}(M) \subseteq \mathsf{Thm}(N)$.
3. $\mathsf{Thm}(\mathbb{N}) \subseteq \mathsf{Thm}(M)$.
4. $M \models \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}} \Leftrightarrow \exists\varphi$ s.t. $\varphi \notin \mathsf{Thm}(M)$.

いろいろな疑問

- $M \models \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}$ だけど $\mathsf{Thm}(\mathbb{N}) \subsetneq \mathsf{Thm}(M)$ となるものはある？
- $\mathsf{Thm}(\mathbb{N}) \subsetneq \mathsf{Thm}(M)$ の場合，どんな文が増えている？(真・偽？)
- $\cdots$

定義

定義

- M は現実的 $:\Leftrightarrow$ $\mathbf{Thm}(\mathbb{N}) = \mathbf{Thm}(M)$

定義

定義

- M は**現実的** $:\Leftrightarrow$ $\textbf{Thm}(\mathbb{N}) = \textbf{Thm}(M)$
- M は**健全** $:\Leftrightarrow$ $\textbf{Thm}(M) \subseteq \textbf{TA}$

定義

定義

- M は現実的 $:\Leftrightarrow$ $\mathbf{Thm}(\mathbb{N}) = \mathbf{Thm}(M)$
- M は健全 $:\Leftrightarrow$ $\mathbf{Thm}(M) \subseteq \mathbf{TA}$
- M は正気 $:\Leftrightarrow$ $M \models \mathbf{Con}_{\mathbf{PA}}$

定義

定義

- M は現実的 $:\Leftrightarrow$ $\mathsf{Thm}(\mathbb{N}) = \mathsf{Thm}(M)$
- M は健全 $:\Leftrightarrow$ $\mathsf{Thm}(M) \subseteq \mathsf{TA}$
- M は正気 $:\Leftrightarrow$ $M \models \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}$

- M は非現実的 $\Leftrightarrow$ M で証明できる定理は実際のものより多い

定義

定義

- M は現実的 $:\Leftrightarrow$ $\mathsf{Thm}(\mathbb{N}) = \mathsf{Thm}(M)$
- M は健全 $:\Leftrightarrow$ $\mathsf{Thm}(M) \subseteq \mathsf{TA}$
- M は正気 $:\Leftrightarrow$ $M \models \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}$

- M は非現実的 $\Leftrightarrow$ M で証明できる定理は実際のものより多い
- M は不健全 $\Leftrightarrow$ M は $\mathbb{N}$ で正しくない定理を証明する

定義

定義

- M は現実的 $:\Leftrightarrow$ $\mathsf{Thm}(\mathbb{N}) = \mathsf{Thm}(M)$
- M は健全 $:\Leftrightarrow$ $\mathsf{Thm}(M) \subseteq \mathsf{TA}$
- M は正気 $:\Leftrightarrow$ $M \models \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}$

- M は非現実的 $\Leftrightarrow$ M で証明できる定理は実際のものより多い
- M は不健全 $\Leftrightarrow$ M は $\mathbb{N}$ で正しくない定理を証明する
- M は正気でない $\Leftrightarrow$ M は $\mathbf{0} = \mathbf{1}$ の証明をもつ

定義

定義

- M は現実的 :⇔ $\mathsf{Thm}(\mathbb{N}) = \mathsf{Thm}(M)$
- M は健全 :⇔ $\mathsf{Thm}(M) \subseteq \mathsf{TA}$
- M は正気 :⇔ $M \models \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}$

- M は非現実的 ⇔ M で証明できる定理は実際のものより多い
- M は不健全 ⇔ M は $\mathbb{N}$ で正しくない定理を証明する
- M は正気でない ⇔ M は $\mathbf{0} = \mathbf{1}$ の証明をもつ

$$\text{現実的} \Rightarrow \text{健全} \Rightarrow \text{正気}$$

は簡単に分かる.

Q. 正気だが非現実的なモデルはあるか？

Q. 正気だが非現実的なモデルはあるか？

A. ある

PA の **Gödel** 文 $\boldsymbol{\pi}$ について **PA** $\nvdash \mathbf{Con_{PA}} \to \neg\mathbf{Pr}(\ulcorner \neg\boldsymbol{\pi} \urcorner)$ より.

Q. 正気だが非現実的なモデルはあるか？

A. ある

PA の Gödel 文 π について $\mathbf{PA} \nvdash \mathbf{Con}_{\mathbf{PA}} \to \neg\mathbf{Pr}(\ulcorner\neg\pi\urcorner)$ より.

更に

定理

$\{\mathbf{Thm}(M) | M$ は正気な **PA** のモデル $\}$ の濃度は $2^{\aleph_0}$.

Q. 非現実的な場合，どんな文が増えている？

Q. 非現実的な場合，どんな文が増えている？

A. 真偽どちらも

M が非現実的ならば，$\varphi \in \mathbf{Thm}(M) \setminus \mathbf{Thm}(\mathbb{N})$ がとれる．
σ を $\mathbf{Pr}(\ulcorner \varphi \urcorner)$

Q. 非現実的な場合，どんな文が増えている？

A. 真偽どちらも

M が非現実的ならば，$\varphi \in \mathsf{Thm}(M) \setminus \mathsf{Thm}(\mathbb{N})$ がとれる.
σ を $\mathsf{Pr}(\ulcorner \varphi \urcorner)$
π を
$\mathsf{PA} \vdash \pi \leftrightarrow \forall y(\mathsf{Prf}(\ulcorner \varphi \urcorner, y) \to \exists z \leq y \mathsf{Prf}(\ulcorner \pi \urcorner, z))$
を満たすとすると

Q. 非現実的な場合，どんな文が増えている？

A. 真偽どちらも

M が非現実的ならば，$\varphi \in \mathsf{Thm}(M) \setminus \mathsf{Thm}(\mathbb{N})$ がとれる．
σ を $\mathsf{Pr}(\ulcorner \varphi \urcorner)$
π を
$\mathsf{PA} \vdash \pi \leftrightarrow \forall y(\mathsf{Prf}(\ulcorner \varphi \urcorner, y) \to \exists z \leq y \mathsf{Prf}(\ulcorner \pi \urcorner, z))$
を満たすとすると
$\sigma, \pi \in \mathsf{Thm}(M) \setminus \mathsf{Thm}(\mathbb{N})$ で

Q. 非現実的な場合，どんな文が増えている？

A. 真偽どちらも

M が非現実的ならば，$\varphi \in \mathsf{Thm}(M) \setminus \mathsf{Thm}(\mathbb{N})$ がとれる．
σ を $\mathsf{Pr}(\ulcorner \varphi \urcorner)$
π を
$\mathsf{PA} \vdash \pi \leftrightarrow \forall y(\mathsf{Prf}(\ulcorner \varphi \urcorner, y) \to \exists z \leq y \mathsf{Prf}(\ulcorner \pi \urcorner, z))$
を満たすとすると
$\sigma, \pi \in \mathsf{Thm}(M) \setminus \mathsf{Thm}(\mathbb{N})$ で
$\mathbb{N} \not\models \sigma$ かつ $\mathbb{N} \models \pi$.

Q. 非現実的な場合，どんな文が増えている？

A. 真偽どちらも

M が非現実的ならば，$\varphi \in \mathsf{Thm}(M) \setminus \mathsf{Thm}(\mathbb{N})$ がとれる．
σ を $\mathsf{Pr}(\ulcorner \varphi \urcorner)$
π を
$\mathsf{PA} \vdash \pi \leftrightarrow \forall y(\mathsf{Prf}(\ulcorner \varphi \urcorner, y) \rightarrow \exists z \leq y \mathsf{Prf}(\ulcorner \pi \urcorner, z))$
を満たすとすると
$\sigma, \pi \in \mathsf{Thm}(M) \setminus \mathsf{Thm}(\mathbb{N})$ で
$\mathbb{N} \not\models \sigma$ かつ $\mathbb{N} \models \pi$.

系

M は現実的 $\Leftrightarrow$ M は健全

比較不能なモデル

$M \subseteq_e N \Rightarrow \mathbf{Thm}(M) \subseteq \mathbf{Thm}(N)$ がいえた.

比較不能なモデル

$M \subseteq_e N \Rightarrow \mathsf{Thm}(M) \subseteq \mathsf{Thm}(N)$ がいえた.

Q. 証明できる定理の状況が異なっているモデルはある？

比較不能なモデル

$M \subseteq_e N \Rightarrow \mathsf{Thm}(M) \subseteq \mathsf{Thm}(N)$ がいえた.
Q. 証明できる定理の状況が異なっているモデルはある？

定義

- M と N は比較不能
  $:\Leftrightarrow \mathsf{Thm}(M) \not\subseteq \mathsf{Thm}(N)$ かつ $\mathsf{Thm}(N) \not\subseteq \mathsf{Thm}(M)$.

比較不能なモデル

$M \subseteq_e N \Rightarrow \mathbf{Thm}(M) \subseteq \mathbf{Thm}(N)$ がいえた.

Q. 証明できる定理の状況が異なっているモデルはある？

定義

- M と N は比較不能
  $:\Leftrightarrow \mathbf{Thm}(M) \not\subseteq \mathbf{Thm}(N)$ かつ $\mathbf{Thm}(N) \not\subseteq \mathbf{Thm}(M)$.
- M と N は相反する
  $:\Leftrightarrow$ ある φ について $\varphi \in \mathbf{Thm}(M)$ かつ $\neg \in \varphi\mathbf{Thm}(N)$.

比較不能なモデル

$M \subseteq_e N \Rightarrow \mathsf{Thm}(M) \subseteq \mathsf{Thm}(N)$ がいえた.
Q. 証明できる定理の状況が異なっているモデルはある？

定義

- M と N は比較不能
  $:\Leftrightarrow \mathsf{Thm}(M) \nsubseteq \mathsf{Thm}(N)$ かつ $\mathsf{Thm}(N) \nsubseteq \mathsf{Thm}(M)$.
- M と N は相反する
  $:\Leftrightarrow$ ある φ について $\varphi \in \mathsf{Thm}(M)$ かつ $\neg \in \varphi\mathsf{Thm}(N)$.

A. ある

比較不能な **PA** のモデル M, N が存在する.

比較不能なモデル

$M \subseteq_e N \Rightarrow \mathsf{Thm}(M) \subseteq \mathsf{Thm}(N)$ がいえた.

Q. 証明できる定理の状況が異なっているモデルはある？

定義

- M と N は比較不能
  $:\Leftrightarrow \mathsf{Thm}(M) \not\subseteq \mathsf{Thm}(N)$ かつ $\mathsf{Thm}(N) \not\subseteq \mathsf{Thm}(M)$.
- M と N は相反する
  $:\Leftrightarrow$ ある φ について $\varphi \in \mathsf{Thm}(M)$ かつ $\neg \in \varphi\mathsf{Thm}(N)$.

A. ある

比較不能な **PA** のモデル M, N が存在する.

定理

M と N は比較不能 $\Leftrightarrow$ M と N は共に正気で，相反する

比較不能なモデル

$M \subseteq_e N \Rightarrow \mathsf{Thm}(M) \subseteq \mathsf{Thm}(N)$ がいえた.
Q. 証明できる定理の状況が異なっているモデルはある？

定義

- M と N は比較不能
  $:\Leftrightarrow \mathsf{Thm}(M) \not\subseteq \mathsf{Thm}(N)$ かつ $\mathsf{Thm}(N) \not\subseteq \mathsf{Thm}(M)$.
- M と N は相反する
  $:\Leftrightarrow$ ある φ について $\varphi \in \mathsf{Thm}(M)$ かつ $\neg \in \varphi\mathsf{Thm}(N)$.

A. ある

比較不能な **PA** のモデル M, N が存在する.

定理

M と N は比較不能 $\Leftrightarrow$ M と N は共に正気で，相反する

問題

$\forall M$: 非現実的かつ正気 $\exists N$ s.t. M と N は比較不能？

完全性について

M が非現実的ならば不健全，つまり $\mathbf{Thm}(M) \neq \mathbf{TA}$.

完全性について

M が非現実的ならば不健全，つまり $\textsf{\textbf{Thm}}(M) \neq \textsf{\textbf{TA}}$.
Q. $\{\textsf{\textbf{Thm}}(M) \mid M$ は正気 $\}$ の中に完全なものはある？

完全性について

M が非現実的ならば不健全，つまり $\textsf{Thm}(M) \neq \textsf{TA}$.
Q. $\{\textsf{Thm}(M) \mid M$ は正気 $\}$ の中に完全なものはある？

A. ない

ρ: **PA** の Rosser 文
とすると

完全性について

M が非現実的ならば不健全，つまり $\mathsf{Thm}(M) \neq \mathsf{TA}$.

Q. $\{\mathsf{Thm}(M) \mid M$ は正気 $\}$ の中に完全なものはある？

A. ない

ρ: **PA** の Rosser 文

とすると

M が正気ならば $\rho, \neg\rho \notin \mathsf{Thm}(M)$.

極大性について

Q. $\{\mathsf{Thm}(M) \mid M$ は正気 $\}$ の中に極大なものはある？

極大性について

Q. $\{\mathsf{Thm}(M) \mid M$ は正気 $\}$ の中に極大なものはある？

A. ある

$\{\varphi_i\}_{i\in\omega}$ を全ての文の枚挙とする.

極大性について

Q. $\{\mathsf{Thm}(M) \mid M$ は正気 $\}$ の中に極大なものはある？

A. ある

$\{\varphi_i\}_{i\in\omega}$ を全ての文の枚挙とする．
$\mathsf{PA} + \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}$ の拡大理論の列 $\{T_i\}_{i\in\omega}$ を再帰的に定める：

極大性について

Q. $\{\mathsf{Thm}(M) \mid M$ は正気 $\}$ の中に極大なものはある？

A. ある

$\{\varphi_i\}_{i\in\omega}$ を全ての文の枚挙とする．
$\mathsf{PA} + \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}$ の拡大理論の列 $\{T_i\}_{i\in\omega}$ を再帰的に定める：
$T_0 := \mathsf{PA} + \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}$

極大性について

Q. $\{\mathsf{Thm}(M) \mid M$ は正気 $\}$ の中に極大なものはある？

A. ある

$\{\varphi_i\}_{i\in\omega}$ を全ての文の枚挙とする.
$\mathsf{PA} + \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}$ の拡大理論の列 $\{T_i\}_{i\in\omega}$ を再帰的に定める：
$T_0 := \mathsf{PA} + \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}$

$$T_{i+1} := \begin{cases} T_i + \mathsf{Pr}(\ulcorner \varphi_i \urcorner) & \text{この理論が無矛盾のとき} \\ T_i & \text{そうでないとき.} \end{cases}$$

極大性について

Q. $\{\mathsf{Thm}(M) \mid M$ は正気 $\}$ の中に極大なものはある？

A. ある

$\{\varphi_i\}_{i\in\omega}$ を全ての文の枚挙とする.
$\mathsf{PA} + \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}$ の拡大理論の列 $\{T_i\}_{i\in\omega}$ を再帰的に定める：
$T_0 := \mathsf{PA} + \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}$

$$T_{i+1} := \begin{cases} T_i + \mathsf{Pr}(\ulcorner\varphi_i\urcorner) & \text{この理論が無矛盾のとき} \\ T_i & \text{そうでないとき.} \end{cases}$$

$T := \bigcup_{i\in\omega} T_i$ とすれば T は無矛盾であり,
T のモデルは極大.

極大性について

Q. $\{\mathsf{Thm}(M) \mid M$ は正気 $\}$ の中に極大なものはある？

A. ある

$\{\varphi_i\}_{i\in\omega}$ を全ての文の枚挙とする.
$\mathsf{PA} + \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}$ の拡大理論の列 $\{T_i\}_{i\in\omega}$ を再帰的に定める：
$T_0 := \mathsf{PA} + \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}$

$$T_{i+1} := \begin{cases} T_i + \mathsf{Pr}(\ulcorner \varphi_i \urcorner) & \text{この理論が無矛盾のとき} \\ T_i & \text{そうでないとき.} \end{cases}$$

$T := \bigcup_{i\in\omega} T_i$ とすれば T は無矛盾であり，
T のモデルは極大.

定理

$\{\mathsf{Thm}(M) \mid M$ は正気 $\}$ の極大元の個数は $2^{\aleph_0}$

問題

問題 1

$\mathbf{Thm}(M) \subsetneq \mathbf{Thm}(N)$ ならば $\mathbf{Thm}(K) = \mathbf{Thm}(N)$ となる M の終拡大 K は存在するか？

問題

問題 1

$\mathsf{Thm}(M) \subsetneq \mathsf{Thm}(N)$ ならば $\mathsf{Thm}(K) = \mathsf{Thm}(N)$ となる M の終拡大 K は存在するか？

問題 2

どんな正気なモデルもその終拡大に極大なモデルをもつか？

問題

問題 1

$\mathbf{Thm}(M) \subsetneq \mathbf{Thm}(N)$ ならば $\mathbf{Thm}(K) = \mathbf{Thm}(N)$ となる M の終拡大 K は存在するか？

問題 2

どんな正気なモデルもその終拡大に極大なモデルをもつか？

問題 3

極大でないどんな正気なモデル M も
その終拡大に $\mathbf{Thm}(M) \subsetneq \mathbf{Thm}(N)$ となる正気なモデル N をもつか？

問題 1 $\Rightarrow$ 問題 2 $\Rightarrow$ 問題 3

1. 準備
2. **PA** $+$ **Con**$_{\mathbf{PA}}$ のモデルにおける証明可能性
3. $\mathbf{0} = \mathbf{1}$ の証明に至るまで
4. 正気でないモデル

定理が徐々に増えていくモデル

M: **TA** の超準モデル

定理が徐々に増えていくモデル

M: **TA** の超準モデル
$\mathbf{Thm}(M) = \mathbf{Thm}(\mathbb{N})$.

定理が徐々に増えていくモデル

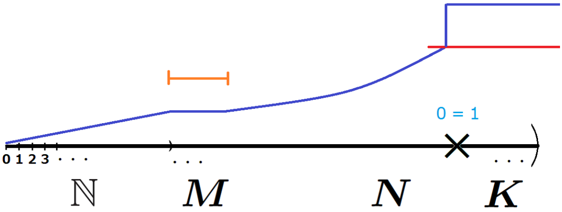
M: **TA** の超準モデル
$\mathbf{Thm}(M) = \mathbf{Thm}(\mathbb{N})$.
$\mathbf{Thm}(M) \subsetneq \mathbf{Thm}(N)$ となる正気な終拡大 $N \models$ **PA** がある.

定理が徐々に増えていくモデル

M: **TA** の超準モデル
$\mathbf{Thm}(M) = \mathbf{Thm}(\mathbb{N})$.
$\mathbf{Thm}(M) \subsetneq \mathbf{Thm}(N)$ となる正気な終拡大 $N \models$ **PA** がある.
N は正気でない終拡大 $K \models$ **PA** をもつ.

定理が徐々に増えていくモデル

M: **TA** の超準モデル
$\mathsf{Thm}(M) = \mathsf{Thm}(\mathbb{N})$.
$\mathsf{Thm}(M) \subsetneq \mathsf{Thm}(N)$ となる正気な終拡大 $N \models$ **PA** がある.
N は正気でない終拡大 $K \models$ **PA** をもつ.



いきなり $0 = 1$ が証明できるモデル

定義

M は急に正気でなくなった
:⇔ M は正気でなく，任意の $N \subseteq_e M$ について
N が **PA** の正気なモデルならば N は現実的

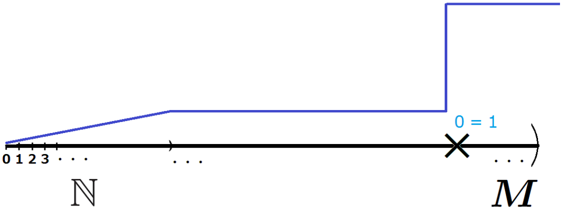
いきなり $0 = 1$ が証明できるモデル

定義

M は急に正気でなくなった
:⇔ M は正気でなく，任意の $N \subseteq_e M$ について
N が **PA** の正気なモデルならば N は現実的

定理

急に正気でなくなったモデルが存在する.



Solovay (1989), Hájek (1983), Krajíček and Pudlák (1989) を用いる.

どんなに短くしても定理が増えているモデル

定義

M は生まれつき非現実的
$:\Leftrightarrow$ 任意の $N \subseteq_e M$ について
N が **PA** の超準モデルならば N は非健全

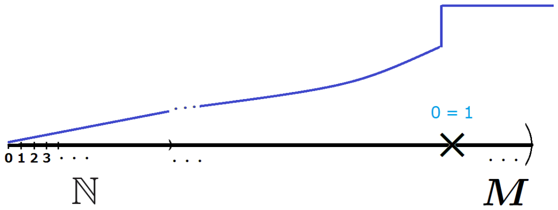
どんなに短くしても定理が増えているモデル

定義

M は生まれつき非現実的
$:\Leftrightarrow$ 任意の $N \subseteq_e M$ について
N が **PA** の超準モデルならば N は非健全

定理

生まれつき非現実的な正気でないモデルが存在する.



Omitting types theorem を用いた.

定義

M: 正気でないモデルについて
$\mathcal{C}(M) := \{\mathsf{Thm}(N) \mid N \subseteq_e M$ かつ $N \models \mathsf{PA}\}$.

定義

M: 正気でないモデルについて
$\mathcal{C}(M) := \{\mathsf{Thm}(N) \mid N \subseteq_e M$ かつ $N \models \mathsf{PA}\}$.

$\mathcal{C}(M)$ は鎖

$$\mathsf{Thm}(\mathbb{N}) \subsetneq \cdots \subsetneq \mathsf{Thm}(N) \subsetneq \cdots \subsetneq \mathsf{Thm}(M)$$

を表す.

定義

M: 正気でないモデルについて
$\mathcal{C}(M) := \{\mathsf{Thm}(N) \mid N \subseteq_e M$ かつ $N \models \mathsf{PA}\}$.

$\mathcal{C}(M)$ は鎖

$$\mathsf{Thm}(\mathbb{N}) \subsetneq \cdots \subsetneq \mathsf{Thm}(N) \subsetneq \cdots \subsetneq \mathsf{Thm}(M)$$

を表す.

命題

- M は急に正気でなくなった $\Rightarrow \mathcal{C}(M) = \{\mathsf{Thm}(\mathbb{N}), \mathsf{Thm}(M)\}$.

定義

M: 正気でないモデルについて
$\mathcal{C}(M) := \{\mathsf{Thm}(N) \mid N \subseteq_e M$ かつ $N \models \mathsf{PA}\}$.

$\mathcal{C}(M)$ は鎖

$$\mathsf{Thm}(\mathbb{N}) \subsetneq \cdots \subsetneq \mathsf{Thm}(N) \subsetneq \cdots \subsetneq \mathsf{Thm}(M)$$

を表す.

命題

- M は急に正気でなくなった $\Rightarrow \mathcal{C}(M) = \{\mathsf{Thm}(\mathbb{N}), \mathsf{Thm}(M)\}$.
- M は生まれつき非現実的 $\Rightarrow \mathcal{C}(M) \setminus \mathsf{Thm}(\mathbb{N})$ は最小元をもたない.

定義

M: 正気でないモデルについて
$\mathcal{C}(M) := \{\mathsf{Thm}(N) \mid N \subseteq_e M$ かつ $N \models \mathsf{PA}\}$.

$\mathcal{C}(M)$ は鎖

$$\mathsf{Thm}(\mathbb{N}) \subsetneq \cdots \subsetneq \mathsf{Thm}(N) \subsetneq \cdots \subsetneq \mathsf{Thm}(M)$$

を表す.

命題

- M は急に正気でなくなった $\Rightarrow \mathcal{C}(M) = \{\mathsf{Thm}(\mathbb{N}), \mathsf{Thm}(M)\}$.
- M は生まれつき非現実的 $\Rightarrow \mathcal{C}(M) \setminus \mathsf{Thm}(\mathbb{N})$ は最小元をもたない.
- $\mathcal{C}(M) \setminus \mathsf{Thm}(M)$ は無限だが最大元をもつような，正気でない M が存在する.

問題

問題

各 $\boldsymbol{n > 2}$ に対して，$\boldsymbol{\mathcal{C}(M)}$ がちょうど $\boldsymbol{n}$ 元からなる，正気でない $\boldsymbol{M}$ は存在する？

問題

問題

各 $n > 2$ に対して，$\mathcal{C}(M)$ がちょうど n 元からなる，正気でない M は存在する？

問題

$\mathcal{C}(M) \setminus \mathsf{Thm}(M)$ が最大元をもたない，正気でない M は存在する？

1. 準備
2. $\mathbf{PA} + \mathbf{Con}_{\mathbf{PA}}$ のモデルにおける証明可能性
3. $\mathbf{0} = \mathbf{1}$ の証明に至るまで
4. 正気でないモデル

ロッサー可証性述語

定義

- $\mathbf{Pr}^{R}(x) :\equiv \exists y(\mathbf{Prf}(x, y) \land \forall z \leq y \neg \mathbf{Prf}(\neg x, z))$

ロッサー可証性述語

定義

- $\mathsf{Pr}^R(x) :\equiv \exists y(\mathsf{Prf}(x,y) \land \forall z \leq y \neg \mathsf{Prf}(\neg x, z))$
- $\mathsf{Thm}^R(M) := \{\varphi \mid M \models \mathsf{Pr}^R(\ulcorner \varphi \urcorner)\}$

ロッサー可証性述語

定義

- $\mathsf{Pr}^R(x) :\equiv \exists y(\mathsf{Prf}(x, y) \land \forall z \leq y \neg \mathsf{Prf}(\neg x, z))$
- $\mathsf{Thm}^R(M) := \{\varphi \mid M \models \mathsf{Pr}^R(\ulcorner \varphi \urcorner)\}$

命題

M が正気ならば $\mathsf{Thm}(M) = \mathsf{Thm}^R(M)$

ロッサー可証性述語

定義

- $\mathsf{Pr}^R(x) :\equiv \exists y(\mathsf{Prf}(x, y) \land \forall z \leq y \neg \mathsf{Prf}(\neg x, z))$
- $\mathsf{Thm}^R(M) := \{\varphi \mid M \models \mathsf{Pr}^R(\ulcorner \varphi \urcorner)\}$

命題

M が正気ならば $\mathsf{Thm}(M) = \mathsf{Thm}^R(M)$

M が正気でないとき $M \models \mathsf{Pr}^R(\ulcorner \varphi \urcorner)$ とは

ロッサー可証性述語

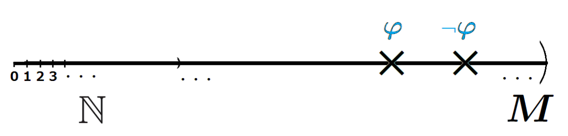
定義

- $\mathsf{Pr}^R(x) :\equiv \exists y(\mathsf{Prf}(x,y) \land \forall z \leq y \neg \mathsf{Prf}(\neg x, z))$
- $\mathsf{Thm}^R(M) := \{\varphi \mid M \models \mathsf{Pr}^R(\ulcorner\varphi\urcorner)\}$

命題

M が正気ならば $\mathsf{Thm}(M) = \mathsf{Thm}^R(M)$

M が正気でないとき $M \models \mathsf{Pr}^R(\ulcorner\varphi\urcorner)$ とは



正気でないモデルにおけるロッサー可証性述語

定理

次の条件を満たす $\mathsf{Prf}'(x, y)$ が存在する：

1. $\mathsf{PA} \vdash \forall x(\mathsf{Pr}(x) \leftrightarrow \exists y \mathsf{Prf}'(x, y))$
2. $\forall T$: PA の無矛盾な完全拡大
   $\exists M$: 正気でないモデル s.t. $\mathsf{Thm}'^{R}(M) = T$

正気でないモデルにおけるロッサー可証性述語

定理

次の条件を満たす $\mathsf{Prf}'(x, y)$ が存在する：

1. $\mathsf{PA} \vdash \forall x(\mathsf{Pr}(x) \leftrightarrow \exists y \mathsf{Prf}'(x, y))$
2. $\forall T$: PA の無矛盾な完全拡大
   $\exists M$: 正気でないモデル s.t. $\mathsf{Thm}'^{R}(M) = T$

次の条件を満たす $\mathsf{Pr}'^{R}(x, y)$ の存在を示すことが本質的：

1. $\mathsf{PA} \vdash \mathsf{Pr}'^{R}(\ulcorner \varphi \to \psi \urcorner) \to (\mathsf{Pr}'^{R}(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathsf{Pr}'^{R}(\ulcorner \psi \urcorner))$
2. $\mathsf{PA} \vdash \neg \mathsf{Pr}'^{R}(\ulcorner \varphi \urcorner) \Rightarrow \mathsf{PA} \vdash \neg \varphi$

正気でないモデルにおけるロッサー可証性述語

定理

次の条件を満たす $\mathsf{Prf}'(x,y)$ が存在する：

1. $\mathsf{PA} \vdash \forall x(\mathsf{Pr}(x) \leftrightarrow \exists y \mathsf{Prf}'(x,y))$
2. $\forall T$: PA の無矛盾な完全拡大
   $\exists M$: 正気でないモデル s.t. $\mathsf{Thm}'^{R}(M) = T$

次の条件を満たす $\mathsf{Pr}'^{R}(x,y)$ の存在を示すことが本質的：

1. $\mathsf{PA} \vdash \mathsf{Pr}'^{R}(\ulcorner \varphi \to \psi \urcorner) \to (\mathsf{Pr}'^{R}(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathsf{Pr}'^{R}(\ulcorner \psi \urcorner))$
2. $\mathsf{PA} \vdash \neg \mathsf{Pr}'^{R}(\ulcorner \varphi \urcorner) \Rightarrow \mathsf{PA} \vdash \neg \varphi$

T. Arai, "Derivability conditions on Rosser's provability predicates", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, **Vol.31, No.4, 487–497(1990)**

における，1 を満たす $\mathsf{Prf}'^{R}(x)$ の構成法を用いた.