

Σ_n -定義可能な算術の不完全性定理

菊池 誠（神戸大学 システム情報学研究科）
倉橋 太志（木更津工業高等専門学校）

日本数学会 2015 年度年会
明治大学
2015 年 3 月 22 日

Contents

- ① 本発表のテーマと結論
- ② 第一不完全性定理
- ③ 第二不完全性定理

- ① 本発表のテーマと結論
- ② 第一不完全性定理
- ③ 第二不完全性定理

Gödel の不完全性定理と Σ_1 -定義可能性

T を, Peano 算術 (PA) を含む算術の理論とする.

Gödel-Rosser の第一不完全性定理

- (Gödel) T : Σ_1 -定義可能かつ Σ_1 -健全 $\Rightarrow T$: 不完全.
- (Rosser) T : Σ_1 -定義可能かつ無矛盾 $\Rightarrow T$: 不完全.

Gödel の第二不完全性定理

T : Σ_1 -定義可能かつ無矛盾 $\Rightarrow T \not\vdash \text{Con}_T$.

- どちらも Σ_1 -定義可能 ($\Leftrightarrow$ c.e.) な理論に関する主張.
- なぜそれより複雑な理論について考えないのか?
 Σ_2 -定義可能かつ無矛盾かつ完全な理論が存在する
(から?)
- 一般の Σ_n -定義可能な理論の不完全性を調べることで,
Gödel および Rosser の不完全定理の理解が深まるのでは.

Gödel の不完全性定理と Σ_1 -定義可能性

T を, Peano 算術 (PA) を含む算術の理論とする.

Gödel-Rosser の第一不完全性定理

- (Gödel) T : Σ_1 -定義可能かつ Σ_1 -健全 $\Rightarrow T$: 不完全.
- (Rosser) T : Σ_1 -定義可能かつ無矛盾 $\Rightarrow T$: 不完全.

Gödel の第二不完全性定理

T : Σ_1 -定義可能かつ無矛盾 $\Rightarrow T \not\vdash \text{Con}_T$.

- どちらも Σ_1 -定義可能 ($\Leftrightarrow$ c.e.) な理論に関する主張.
- なぜそれより複雑な理論について考えないのか?

Σ_2 -定義可能かつ無矛盾かつ完全な理論が存在する
(から?)

- 一般の Σ_n -定義可能な理論の不完全性を調べることで,
Gödel および Rosser の不完全定理の理解が深まるのでは.

Gödel の不完全性定理と Σ_1 -定義可能性

T を, Peano 算術 (PA) を含む算術の理論とする.

Gödel-Rosser の第一不完全性定理

- (Gödel) T : Σ_1 -定義可能かつ Σ_1 -健全 $\Rightarrow T$: 不完全.
- (Rosser) T : Σ_1 -定義可能かつ無矛盾 $\Rightarrow T$: 不完全.

Gödel の第二不完全性定理

T : Σ_1 -定義可能かつ無矛盾 $\Rightarrow T \not\vdash \text{Con}_T$.

- どちらも Σ_1 -定義可能 ($\Leftrightarrow$ c.e.) な理論に関する主張.
- なぜそれより複雑な理論について考えないのか?

Σ_2 -定義可能かつ無矛盾かつ完全な理論が存在する
(から?)

- 一般の Σ_n -定義可能な理論の不完全性を調べることで,
Gödel および Rosser の不完全定理の理解が深まるのでは.

Gödel の不完全性定理と Σ_1 -定義可能性

T を, Peano 算術 (PA) を含む算術の理論とする.

Gödel-Rosser の第一不完全性定理

- (Gödel) T : Σ_1 -定義可能かつ Σ_1 -健全 $\Rightarrow T$: 不完全.
- (Rosser) T : Σ_1 -定義可能かつ無矛盾 $\Rightarrow T$: 不完全.

Gödel の第二不完全性定理

T : Σ_1 -定義可能かつ無矛盾 $\Rightarrow T \not\vdash \text{Con}_T$.

- どちらも Σ_1 -定義可能 ($\Leftrightarrow$ c.e.) な理論に関する主張.
- なぜそれより複雑な理論について考えないのか?

Σ_2 -定義可能かつ無矛盾かつ完全な理論が存在する
(から?)

- 一般の Σ_n -定義可能な理論の不完全性を調べることで,
Gödel および Rosser の不完全定理の理解が深まるのでは.

Gödel の不完全性定理と Σ_1 -定義可能性

T を, Peano 算術 (PA) を含む算術の理論とする.

Gödel-Rosser の第一不完全性定理

- (Gödel) T : Σ_1 -定義可能かつ Σ_1 -健全 $\Rightarrow T$: 不完全.
- (Rosser) T : Σ_1 -定義可能かつ無矛盾 $\Rightarrow T$: 不完全.

Gödel の第二不完全性定理

T : Σ_1 -定義可能かつ無矛盾 $\Rightarrow T \not\vdash \text{Con}_T$.

- どちらも Σ_1 -定義可能 ($\Leftrightarrow$ c.e.) な理論に関する主張.
- なぜそれより複雑な理論について考えないのか?

Σ_2 -定義可能かつ無矛盾かつ完全な理論が存在する
(から?)

- 一般の Σ_n -定義可能な理論の不完全性を調べることで,
Gödel および Rosser の不完全定理の理解が深まるのでは.

Gödel の不完全性定理と Σ_1 -定義可能性

T を, Peano 算術 (PA) を含む算術の理論とする.

Gödel-Rosser の第一不完全性定理

- (Gödel) T : Σ_1 -定義可能かつ Σ_1 -健全 $\Rightarrow T$: 不完全.
- (Rosser) T : Σ_1 -定義可能かつ無矛盾 $\Rightarrow T$: 不完全.

Gödel の第二不完全性定理

T : Σ_1 -定義可能かつ無矛盾 $\Rightarrow T \not\vdash \text{Con}_T$.

- どちらも Σ_1 -定義可能 ($\Leftrightarrow$ c.e.) な理論に関する主張.
- なぜそれより複雑な理論について考えないのか?

Σ_2 -定義可能かつ無矛盾かつ**完全**な理論が存在する
(から?)

- 一般の Σ_n -定義可能な理論の不完全性を調べることで,
Gödel および Rosser の不完全定理の理解が深まるのでは.

Gödel の不完全性定理と Σ_1 -定義可能性

T を, Peano 算術 (PA) を含む算術の理論とする.

Gödel-Rosser の第一不完全性定理

- (Gödel) T : Σ_1 -定義可能かつ Σ_1 -健全 $\Rightarrow T$: 不完全.
- (Rosser) T : Σ_1 -定義可能かつ無矛盾 $\Rightarrow T$: 不完全.

Gödel の第二不完全性定理

T : Σ_1 -定義可能かつ無矛盾 $\Rightarrow T \not\vdash \text{Con}_T$.

- どちらも Σ_1 -定義可能 ($\Leftrightarrow$ c.e.) な理論に関する主張.
- なぜそれより複雑な理論について考えないのか?
 Σ_2 -定義可能かつ無矛盾かつ**完全**な理論が存在する
(から?)
- 一般の Σ_n -定義可能な理論の不完全性を調べることで,
Gödel および Rosser の不完全定理の理解が深まるのでは.

本発表のテーマと結論

テーマ

Σ_n -定義可能な理論の第一・第二不完全性の一般的構造を調べる.

結論

不完全性定理はある形で一般化でき、その際には Σ_n -健全性が本質である.

本発表のテーマと結論

テーマ

Σ_n -定義可能な理論の第一・第二不完全性の一般的構造を調べる.

結論

不完全性定理はある形で一般化でき, その際には Σ_n -健全性が本質である.

- ① 本発表のテーマと結論
- ② 第一不完全性定理
- ③ 第二不完全性定理

いくつかの定義

 Γ : 論理式のクラス

定義

- 論理式 $\sigma(u)$ は T の Γ 定義
 $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \sigma(u) \in \Gamma$ かつ $\forall \varphi (N \models \sigma(\ulcorner \varphi \urcorner) \Leftrightarrow \varphi \in T)$.
- T は Γ -定義可能 $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} T$ は Γ 定義をもつ.

定義

- T は Γ -健全 $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall \varphi \in \Gamma (T \vdash \varphi \Rightarrow N \models \varphi)$.
- T は Γ -完全 $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall \varphi \in \Gamma (N \models \varphi \Rightarrow T \vdash \varphi)$.
- T は Γ -決定可能 $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall \varphi \in \Gamma (T \vdash \varphi \text{ または } T \vdash \neg \varphi)$.

- Π_n -完全かつ無矛盾 $\Leftrightarrow \Sigma_n$ -健全かつ Π_n -決定可能
- $PA \subseteq T$ ならば T は Σ_1 -完全.

いくつかの定義

 Γ : 論理式のクラス

定義

- 論理式 $\sigma(u)$ は T の **Γ 定義**
 $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \sigma(u) \in \Gamma$ かつ $\forall \varphi (N \models \sigma(\ulcorner \varphi \urcorner) \Leftrightarrow \varphi \in T)$.
- T は **Γ -定義可能** $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} T$ は Γ 定義をもつ.

定義

- T は **Γ -健全** $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall \varphi \in \Gamma (T \vdash \varphi \Rightarrow N \models \varphi)$.
- T は **Γ -完全** $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall \varphi \in \Gamma (N \models \varphi \Rightarrow T \vdash \varphi)$.
- T は **Γ -決定可能** $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall \varphi \in \Gamma (T \vdash \varphi \text{ または } T \vdash \neg \varphi)$.

- Π_n -完全かつ無矛盾 $\Leftrightarrow \Sigma_n$ -健全かつ Π_n -決定可能
- $PA \subseteq T$ ならば T は Σ_1 -完全.

いくつかの定義

 Γ : 論理式のクラス

定義

- 論理式 $\sigma(u)$ は T の **Γ 定義**
 $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \sigma(u) \in \Gamma$ かつ $\forall \varphi (\mathbb{N} \models \sigma(\ulcorner \varphi \urcorner) \Leftrightarrow \varphi \in T)$.
- T は **Γ -定義可能** $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} T$ は Γ 定義をもつ.

定義

- T は **Γ -健全** $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall \varphi \in \Gamma (T \vdash \varphi \Rightarrow \mathbb{N} \models \varphi)$.
- T は **Γ -完全** $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall \varphi \in \Gamma (\mathbb{N} \models \varphi \Rightarrow T \vdash \varphi)$.
- T は **Γ -決定可能** $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall \varphi \in \Gamma (T \vdash \varphi \text{ または } T \vdash \neg \varphi)$.

- Π_n -完全かつ無矛盾 $\Leftrightarrow \Sigma_n$ -健全かつ Π_n -決定可能
- $PA \subseteq T$ ならば T は Σ_1 -完全.

いくつかの定義

 Γ : 論理式のクラス

定義

- 論理式 $\sigma(u)$ は T の **Γ 定義**
 $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \sigma(u) \in \Gamma$ かつ $\forall \varphi (\mathbb{N} \models \sigma(\ulcorner \varphi \urcorner) \Leftrightarrow \varphi \in T)$.
- T は **Γ -定義可能** $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} T$ は Γ 定義をもつ.

定義

- T は **Γ -健全** $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall \varphi \in \Gamma (T \vdash \varphi \Rightarrow \mathbb{N} \models \varphi)$.
- T は **Γ -完全** $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall \varphi \in \Gamma (\mathbb{N} \models \varphi \Rightarrow T \vdash \varphi)$.
- T は **Γ -決定可能** $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall \varphi \in \Gamma (T \vdash \varphi \text{ または } T \vdash \neg \varphi)$.

- Π_n -完全かつ無矛盾 $\Leftrightarrow \Sigma_n$ -健全かつ Π_n -決定可能
- $PA \subseteq T$ ならば T は Σ_1 -完全.

いくつかの定義

 Γ : 論理式のクラス

定義

- 論理式 $\sigma(u)$ は T の **Γ 定義**
 $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \sigma(u) \in \Gamma$ かつ $\forall \varphi (\mathbb{N} \models \sigma(\ulcorner \varphi \urcorner) \Leftrightarrow \varphi \in T)$.
- T は **Γ -定義可能** $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} T$ は Γ 定義をもつ.

定義

- T は **Γ -健全** $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall \varphi \in \Gamma (T \vdash \varphi \Rightarrow \mathbb{N} \models \varphi)$.
- T は **Γ -完全** $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall \varphi \in \Gamma (\mathbb{N} \models \varphi \Rightarrow T \vdash \varphi)$.
- T は **Γ -決定可能** $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall \varphi \in \Gamma (T \vdash \varphi \text{ または } T \vdash \neg \varphi)$.

• Π_n -完全かつ無矛盾 $\Leftrightarrow \Sigma_n$ -健全かつ Π_n -決定可能

• $PA \subseteq T$ ならば T は Σ_1 -完全.

いくつかの定義

 Γ : 論理式のクラス

定義

- 論理式 $\sigma(u)$ は T の **Γ 定義**
 $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \sigma(u) \in \Gamma$ かつ $\forall \varphi (\mathbb{N} \models \sigma(\ulcorner \varphi \urcorner) \Leftrightarrow \varphi \in T)$.
- T は **Γ -定義可能** $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} T$ は Γ 定義をもつ.

定義

- T は **Γ -健全** $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall \varphi \in \Gamma (T \vdash \varphi \Rightarrow \mathbb{N} \models \varphi)$.
- T は **Γ -完全** $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall \varphi \in \Gamma (\mathbb{N} \models \varphi \Rightarrow T \vdash \varphi)$.
- T は **Γ -決定可能** $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall \varphi \in \Gamma (T \vdash \varphi \text{ または } T \vdash \neg \varphi)$.

- Π_n -完全かつ無矛盾 $\Leftrightarrow \Sigma_n$ -健全かつ Π_n -決定可能
- $PA \subseteq T$ ならば T は Σ_1 -完全.

いくつかの定義

 Γ : 論理式のクラス

定義

- 論理式 $\sigma(u)$ は T の **Γ 定義**
 $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \sigma(u) \in \Gamma$ かつ $\forall \varphi (\mathbb{N} \models \sigma(\ulcorner \varphi \urcorner) \Leftrightarrow \varphi \in T)$.
- T は **Γ -定義可能** $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} T$ は Γ 定義をもつ.

定義

- T は **Γ -健全** $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall \varphi \in \Gamma (T \vdash \varphi \Rightarrow \mathbb{N} \models \varphi)$.
- T は **Γ -完全** $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall \varphi \in \Gamma (\mathbb{N} \models \varphi \Rightarrow T \vdash \varphi)$.
- T は **Γ -決定可能** $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall \varphi \in \Gamma (T \vdash \varphi \text{ または } T \vdash \neg \varphi)$.

• Π_n -完全かつ無矛盾 $\Leftrightarrow \Sigma_n$ -健全かつ Π_n -決定可能

• $PA \subseteq T$ ならば T は Σ_1 -完全.

いくつかの定義

 Γ : 論理式のクラス

定義

- 論理式 $\sigma(u)$ は T の **Γ 定義**
 $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \sigma(u) \in \Gamma$ かつ $\forall \varphi (\mathbb{N} \models \sigma(\ulcorner \varphi \urcorner) \Leftrightarrow \varphi \in T)$.
- T は **Γ -定義可能** $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} T$ は Γ 定義をもつ.

定義

- T は **Γ -健全** $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall \varphi \in \Gamma (T \vdash \varphi \Rightarrow \mathbb{N} \models \varphi)$.
- T は **Γ -完全** $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall \varphi \in \Gamma (\mathbb{N} \models \varphi \Rightarrow T \vdash \varphi)$.
- T は **Γ -決定可能** $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall \varphi \in \Gamma (T \vdash \varphi \text{ または } T \vdash \neg \varphi)$.

- Π_n -完全かつ無矛盾 $\Leftrightarrow \Sigma_n$ -健全かつ Π_n -決定可能
- $PA \subseteq T$ ならば T は Σ_1 -完全.

いくつかの定義

 Γ : 論理式のクラス

定義

- 論理式 $\sigma(u)$ は T の **Γ 定義**
 $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \sigma(u) \in \Gamma$ かつ $\forall \varphi (\mathbb{N} \models \sigma(\ulcorner \varphi \urcorner) \Leftrightarrow \varphi \in T)$.
- T は **Γ -定義可能** $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} T$ は Γ 定義をもつ.

定義

- T は **Γ -健全** $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall \varphi \in \Gamma (T \vdash \varphi \Rightarrow \mathbb{N} \models \varphi)$.
- T は **Γ -完全** $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall \varphi \in \Gamma (\mathbb{N} \models \varphi \Rightarrow T \vdash \varphi)$.
- T は **Γ -決定可能** $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall \varphi \in \Gamma (T \vdash \varphi \text{ または } T \vdash \neg \varphi)$.

- Π_n -完全かつ無矛盾 $\Leftrightarrow \Sigma_n$ -健全かつ Π_n -決定可能
- $\text{PA} \subseteq T$ ならば T は Σ_1 -完全.

Gödel の第一不完全性定理

Gödel の第一不完全性定理

T : Σ_1 -定義可能とすると, $\exists \varphi \in \Pi_1$ s.t.

① T : 無矛盾 $\Rightarrow \mathbb{N} \models \varphi$ かつ $T \not\models \varphi$.

② T : Σ_1 -健全 $\Rightarrow T \not\models \neg \varphi$.

先の定義より, Gödel の第一不完全性定理は次のように述べられる.

Gödel の第一不完全性定理 (書き換え)

T : Σ_1 -定義可能とすると,

① T : 無矛盾 $\Rightarrow T$: Π_1 -完全でない.

② T : Σ_1 -健全 $\Rightarrow T$: Π_1 -決定可能でない.

Gödel の第一不完全性定理

Gödel の第一不完全性定理

T : Σ_1 -定義可能とすると, $\exists \varphi \in \Pi_1$ s.t.

- ① T : 無矛盾 $\Rightarrow \mathbb{N} \models \varphi$ かつ $T \not\models \varphi$.
- ② T : Σ_1 -健全 $\Rightarrow T \not\models \neg \varphi$.

先の定義より, Gödel の第一不完全性定理は次のように述べられる.

Gödel の第一不完全性定理 (書き換え)

T : Σ_1 -定義可能とすると,

- ① T : 無矛盾 $\Rightarrow T$: Π_1 -完全でない.
- ② T : Σ_1 -健全 $\Rightarrow T$: Π_1 -決定可能でない.

Gödel の第一不完全性定理

Gödel の第一不完全性定理

T : Σ_1 -定義可能とすると, $\exists \varphi \in \Pi_1$ s.t.

- ① T : 無矛盾 $\Rightarrow \mathbb{N} \models \varphi$ かつ $T \not\models \varphi$.
- ② T : Σ_1 -健全 $\Rightarrow T \not\models \neg \varphi$.

先の定義より, Gödel の第一不完全性定理は次のように述べられる.

Gödel の第一不完全性定理 (書き換え)

T : Σ_1 -定義可能とすると,

- ① T : 無矛盾 $\Rightarrow T$: Π_1 -完全でない.
- ② T : Σ_1 -健全 $\Rightarrow T$: Π_1 -決定可能でない.

Gödel の第一不完全性定理の一般化

次のように一般化できる.

定理

T : Σ_{n+1} -定義可能とすると,

- ① T : 無矛盾 $\Rightarrow T$: Π_{n+1} -完全でない.
- ② T : Σ_{n+1} -健全 $\Rightarrow T$: Π_{n+1} -決定可能でない.

- 1 は, 次が成り立つという意味で最適.

命題

Σ_{n+1} -定義可能かつ無矛盾かつ Π_n -完全な理論が存在する.

- 2 は, $n = 0$ の場合, Rosser により「 Σ_1 -健全性」は「無矛盾性」に弱められた.

Gödel の第一不完全性定理の一般化

次のように一般化できる.

定理

T : Σ_{n+1} -定義可能とすると,

- ① T : 無矛盾 $\Rightarrow T$: Π_{n+1} -完全でない.
- ② T : Σ_{n+1} -健全 $\Rightarrow T$: Π_{n+1} -決定可能でない.

- 1 は, 次が成り立つという意味で最適.

命題

Σ_{n+1} -定義可能かつ無矛盾かつ Π_n -完全な理論が存在する.

- 2 は, $n = 0$ の場合, Rosser により「 Σ_1 -健全性」は「無矛盾性」に弱められた.

Gödel の第一不完全性定理の一般化

次のように一般化できる.

定理

T : Σ_{n+1} -定義可能とすると,

- ① T : 無矛盾 $\Rightarrow T$: Π_{n+1} -完全でない.
- ② T : Σ_{n+1} -健全 $\Rightarrow T$: Π_{n+1} -決定可能でない.

- 1 は, 次が成り立つという意味で最適.

命題

Σ_{n+1} -定義可能かつ無矛盾かつ Π_n -完全な理論が存在する.

- 2 は, $n = 0$ の場合, Rosser により「 Σ_1 -健全性」は「無矛盾性」に弱められた.

Gödel-Rosser の第一不完全性定理

Gödel-Rosser の第一不完全性定理

$T: \Sigma_1$ -定義可能かつ無矛盾 $\Rightarrow T: \Pi_1$ -決定可能でない.

しかし、この主張をそのまま一般化することはできない.

命題

Σ_2 -定義可能かつ無矛盾かつ完全な理論が存在する.

Gödel-Rosser の第一不完全性定理

Gödel-Rosser の第一不完全性定理

$T: \Sigma_1$ -定義可能かつ無矛盾 $\Rightarrow T: \Pi_1$ -決定可能でない.

しかし、この主張をそのまま一般化することはできない.

命題

Σ_2 -定義可能かつ無矛盾かつ完全な理論が存在する.

Gödel-Rosser の第一不完全性定理の一般化

ここで

無矛盾性 $\Leftrightarrow \Sigma_0$ -健全性

なので, Gödel-Rosser の第一不完全性定理は次のように書き換えられる.

Gödel-Rosser の第一不完全性定理 (書き換え)

 $T: \Sigma_1$ -定義可能かつ Σ_0 -健全 $\Rightarrow T: \Pi_1$ -決定可能でない.

この形の Gödel-Rosser の第一不完全性定理は次のように一般化できる.

定理

 $T: \Sigma_{n+1}$ -定義可能かつ Σ_n -健全 $\Rightarrow T: \Pi_{n+1}$ -決定可能でない.

これは、次が成り立つという意味で最適.

命題

 Σ_{n+2} -定義可能かつ Σ_n -健全かつ完全な理論が存在する.

Gödel-Rosser の第一不完全性定理の一般化

ここで

無矛盾性 $\Leftrightarrow \Sigma_0$ -健全性

なので, Gödel-Rosser の第一不完全性定理は次のように書き換えられる.

Gödel-Rosser の第一不完全性定理 (書き換え)

$T: \Sigma_1$ -定義可能かつ Σ_0 -健全 $\Rightarrow T: \Pi_1$ -決定可能でない.

この形の Gödel-Rosser の第一不完全性定理は次のように一般化できる.

定理

$T: \Sigma_{n+1}$ -定義可能かつ Σ_n -健全 $\Rightarrow T: \Pi_{n+1}$ -決定可能でない.

これは、次が成り立つという意味で最適.

命題

Σ_{n+2} -定義可能かつ Σ_n -健全かつ完全な理論が存在する.

Gödel-Rosser の第一不完全性定理の一般化

ここで

無矛盾性 $\Leftrightarrow \Sigma_0$ -健全性

なので, Gödel-Rosser の第一不完全性定理は次のように書き換えられる.

Gödel-Rosser の第一不完全性定理 (書き換え)

$T: \Sigma_1$ -定義可能かつ Σ_0 -健全 $\Rightarrow T: \Pi_1$ -決定可能でない.

この形の Gödel-Rosser の第一不完全性定理は次のように一般化できる.

定理

$T: \Sigma_{n+1}$ -定義可能かつ Σ_n -健全 $\Rightarrow T: \Pi_{n+1}$ -決定可能でない.

これは、次が成り立つという意味で最適.

命題

Σ_{n+2} -定義可能かつ Σ_n -健全かつ完全な理論が存在する.

Gödel-Rosser の第一不完全性定理の一般化

ここで

無矛盾性 $\Leftrightarrow \Sigma_0$ -健全性

なので, Gödel-Rosser の第一不完全性定理は次のように書き換えられる.

Gödel-Rosser の第一不完全性定理 (書き換え)

$T: \Sigma_1$ -定義可能かつ Σ_0 -健全 $\Rightarrow T: \Pi_1$ -決定可能でない.

この形の Gödel-Rosser の第一不完全性定理は次のように一般化できる.

定理

$T: \Sigma_{n+1}$ -定義可能かつ Σ_n -健全 $\Rightarrow T: \Pi_{n+1}$ -決定可能でない.

これは、次が成り立つという意味で最適.

命題

Σ_{n+2} -定義可能かつ Σ_n -健全かつ完全な理論が存在する.

Gödel-Rosser の第一不完全性定理の一般化

ここで

無矛盾性 $\Leftrightarrow \Sigma_0$ -健全性

なので, Gödel-Rosser の第一不完全性定理は次のように書き換えられる.

Gödel-Rosser の第一不完全性定理 (書き換え)

$T: \Sigma_1$ -定義可能かつ Σ_0 -健全 $\Rightarrow T: \Pi_1$ -決定可能でない.

この形の Gödel-Rosser の第一不完全性定理は次のように一般化できる.

定理

$T: \Sigma_{n+1}$ -定義可能かつ Σ_n -健全 $\Rightarrow T: \Pi_{n+1}$ -決定可能でない.

これは, 次が成り立つという意味で最適.

命題

Σ_{n+2} -定義可能かつ Σ_n -健全かつ完全な理論が存在する.

- ① 本発表のテーマと結論
- ② 第一不完全性定理
- ③ 第二不完全性定理

Gödel の第二不完全性定理

Gödel の第二不完全性定理

$T: \Sigma_1$ -定義可能かつ無矛盾 $\Rightarrow T \not\vdash \text{Con}_T$.

という主張はより詳しく書かれるべき.

T の定義 $\sigma(u)$ を用いて書いた T の無矛盾性を Con_σ とすると,

Gödel-Feferman の第二不完全性定理

$T: \Sigma_1$ -定義可能かつ無矛盾

$\Rightarrow T$ の任意の Σ_1 定義 $\sigma(u)$ について $T \not\vdash \text{Con}_\sigma$.

しかし、次が成り立つ.

Feferman の定理

$T: \Sigma_1$ -定義可能

$\Rightarrow T$ の Π_1 定義 $\pi(u)$ が存在して, $T \vdash \text{Con}_\pi$.

第二不完全性定理は一般の Σ_{n+1} -定義可能な理論に対して直接拡張できない.

Gödel の第二不完全性定理

Gödel の第二不完全性定理

$T: \Sigma_1$ -定義可能かつ無矛盾 $\Rightarrow T \not\vdash \mathbf{Con}_T$.

という主張はより詳しく書かれるべき.

T の定義 $\sigma(u)$ を用いて書いた T の無矛盾性を $\mathbf{Con}_\sigma$ とすると,

Gödel-Feferman の第二不完全性定理

$T: \Sigma_1$ -定義可能かつ無矛盾

$\Rightarrow T$ の任意の Σ_1 定義 $\sigma(u)$ について $T \not\vdash \mathbf{Con}_\sigma$.

しかし、次が成り立つ.

Feferman の定理

$T: \Sigma_1$ -定義可能

$\Rightarrow T$ の Π_1 定義 $\pi(u)$ が存在して, $T \vdash \mathbf{Con}_\pi$.

第二不完全性定理は一般の Σ_{n+1} -定義可能な理論に対して直接拡張できない.

Gödel の第二不完全性定理

Gödel の第二不完全性定理

$T: \Sigma_1$ -定義可能かつ無矛盾 $\Rightarrow T \not\vdash \text{Con}_T$.

という主張はより詳しく書かれるべき.

T の定義 $\sigma(u)$ を用いて書いた T の無矛盾性を Con_σ とすると,

Gödel-Feferman の第二不完全性定理

$T: \Sigma_1$ -定義可能かつ無矛盾

$\Rightarrow T$ の任意の Σ_1 定義 $\sigma(u)$ について $T \not\vdash \text{Con}_\sigma$.

しかし、次が成り立つ.

Feferman の定理

$T: \Sigma_1$ -定義可能

$\Rightarrow T$ の Π_1 定義 $\pi(u)$ が存在して、 $T \vdash \text{Con}_\pi$.

第二不完全性定理は一般の Σ_{n+1} -定義可能な理論に対して直接拡張できない.

Gödel の第二不完全性定理

Gödel の第二不完全性定理

$T: \Sigma_1$ -定義可能かつ無矛盾 $\Rightarrow T \not\vdash \mathbf{Con}_T$.

という主張はより詳しく書かれるべき.

T の定義 $\sigma(u)$ を用いて書いた T の無矛盾性を $\mathbf{Con}_\sigma$ とすると,

Gödel-Feferman の第二不完全性定理

$T: \Sigma_1$ -定義可能かつ無矛盾

$\Rightarrow T$ の任意の Σ_1 定義 $\sigma(u)$ について $T \not\vdash \mathbf{Con}_\sigma$.

しかし, 次が成り立つ.

Feferman の定理

$T: \Sigma_1$ -定義可能

$\Rightarrow T$ の Π_1 定義 $\pi(u)$ が存在して, $T \vdash \mathbf{Con}_\pi$.

第二不完全性定理は一般の Σ_{n+1} -定義可能な理論に対して直接拡張できない.

Gödel の第二不完全性定理

Gödel の第二不完全性定理

$$T: \Sigma_1\text{-定義可能かつ無矛盾} \Rightarrow T \not\vdash \mathbf{Con}_T.$$

という主張はより詳しく書かれるべき.

T の定義 $\sigma(u)$ を用いて書いた T の無矛盾性を $\mathbf{Con}_\sigma$ とすると,

Gödel-Feferman の第二不完全性定理

$$T: \Sigma_1\text{-定義可能かつ無矛盾}$$
$$\Rightarrow T \text{ の任意の } \Sigma_1 \text{ 定義 } \sigma(u) \text{ について } T \not\vdash \mathbf{Con}_\sigma.$$

しかし, 次が成り立つ.

Feferman の定理

$$T: \Sigma_1\text{-定義可能}$$
$$\Rightarrow T \text{ の } \Pi_1 \text{ 定義 } \pi(u) \text{ が存在して, } T \vdash \mathbf{Con}_\pi.$$

第二不完全性定理は一般の Σ_{n+1} -定義可能な理論に対して直接拡張できない.

第二不完全性定理と反映原理

定義

$$\mathbf{RFN}_{\Sigma_n}(\sigma) := \{\forall x(\mathbf{Pr}_{\sigma}(\ulcorner \varphi(\dot{x}) \urcorner) \rightarrow \varphi(x)) : \varphi(x) \in \Sigma_n\}$$

$\mathbf{RFN}_{\Sigma_n}(\sigma)$ は T の Σ_n -健全性を表す図式（反映原理）.

- 「無矛盾性 $\Leftrightarrow \Sigma_0$ -健全性」
- $\sigma(u) \in \Sigma_1$ について $\mathbf{PA} \vdash \mathbf{Con}_{\sigma} \leftrightarrow \mathbf{RFN}_{\Sigma_0}(\sigma)$.

より、第二不完全性定理は次のように述べられる.

Gödel-Peferman の第二不完全性定理（書き換え）

T : Σ_1 -定義可能かつ Σ_0 -健全

$\Rightarrow T$ の任意の Σ_1 定義 $\sigma(u)$ について $T \not\vdash \mathbf{RFN}_{\Sigma_0}(\sigma)$.

第二不完全性定理と反映原理

定義

$$\mathbf{RFN}_{\Sigma_n}(\sigma) := \{\forall x(\mathbf{Pr}_{\sigma}(\ulcorner \varphi(\dot{x}) \urcorner) \rightarrow \varphi(x)) : \varphi(x) \in \Sigma_n\}$$

$\mathbf{RFN}_{\Sigma_n}(\sigma)$ は T の Σ_n -健全性を表す図式（反映原理）.

- 「無矛盾性 $\Leftrightarrow \Sigma_0$ -健全性」
- $\sigma(u) \in \Sigma_1$ について $\mathbf{PA} \vdash \mathbf{Con}_{\sigma} \leftrightarrow \mathbf{RFN}_{\Sigma_0}(\sigma)$.

より、第二不完全性定理は次のように述べられる.

Gödel-Peferman の第二不完全性定理（書き換え）

T : Σ_1 -定義可能かつ Σ_0 -健全

$\Rightarrow T$ の任意の Σ_1 定義 $\sigma(u)$ について $T \not\vdash \mathbf{RFN}_{\Sigma_0}(\sigma)$.

第二不完全性定理と反映原理

定義

$$\text{RFN}_{\Sigma_n}(\sigma) := \{\forall x(\text{Pr}_\sigma(\ulcorner \varphi(\dot{x}) \urcorner) \rightarrow \varphi(x)) : \varphi(x) \in \Sigma_n\}$$

$\text{RFN}_{\Sigma_n}(\sigma)$ は T の Σ_n -健全性を表す図式（反映原理）.

- 「無矛盾性 $\Leftrightarrow \Sigma_0$ -健全性」
- $\sigma(u) \in \Sigma_1$ について $\text{PA} \vdash \text{Con}_\sigma \leftrightarrow \text{RFN}_{\Sigma_0}(\sigma)$.

より、第二不完全性定理は次のように述べられる.

Gödel-Feferman の第二不完全性定理（書き換え）

T : Σ_1 -定義可能かつ Σ_0 -健全

$\Rightarrow T$ の任意の Σ_1 定義 $\sigma(u)$ について $T \not\vdash \text{RFN}_{\Sigma_0}(\sigma)$.

第二不完全性定理と反映原理

定義

$$\mathbf{RFN}_{\Sigma_n}(\sigma) := \{\forall x(\mathbf{Pr}_\sigma(\ulcorner \varphi(\dot{x}) \urcorner) \rightarrow \varphi(x)) : \varphi(x) \in \Sigma_n\}$$

$\mathbf{RFN}_{\Sigma_n}(\sigma)$ は T の Σ_n -健全性を表す図式（反映原理）.

- 「無矛盾性 $\Leftrightarrow \Sigma_0$ -健全性」
- $\sigma(u) \in \Sigma_1$ について $\mathbf{PA} \vdash \mathbf{Con}_\sigma \leftrightarrow \mathbf{RFN}_{\Sigma_0}(\sigma)$.

より、第二不完全性定理は次のように述べられる.

Gödel-Feferman の第二不完全性定理（書き換え）

T : Σ_1 -定義可能かつ Σ_0 -健全

$\Rightarrow T$ の任意の Σ_1 定義 $\sigma(u)$ について $T \not\vdash \mathbf{RFN}_{\Sigma_0}(\sigma)$.

第二不完全性定理と反映原理

定義

$$\mathbf{RFN}_{\Sigma_n}(\sigma) := \{\forall x(\mathbf{Pr}_{\sigma}(\ulcorner \varphi(\dot{x}) \urcorner) \rightarrow \varphi(x)) : \varphi(x) \in \Sigma_n\}$$

$\mathbf{RFN}_{\Sigma_n}(\sigma)$ は T の Σ_n -健全性を表す図式（反映原理）.

- 「無矛盾性 $\Leftrightarrow \Sigma_0$ -健全性」
- $\sigma(u) \in \Sigma_1$ について $\mathbf{PA} \vdash \mathbf{Con}_{\sigma} \leftrightarrow \mathbf{RFN}_{\Sigma_0}(\sigma)$.

より、第二不完全性定理は次のように述べられる.

Gödel-Feferman の第二不完全性定理（書き換え）

T : Σ_1 -定義可能かつ Σ_0 -健全

$\Rightarrow T$ の任意の Σ_1 定義 $\sigma(u)$ について $T \not\vdash \mathbf{RFN}_{\Sigma_0}(\sigma)$.

第二不完全性定理の一般化

第二不完全性定理は次のように一般化される。

定理

T : Σ_{n+1} -定義可能とすると、以下は同値：

- ① T は Σ_n -健全。
- ② T の任意の Σ_{n+1} 定義 $\sigma(u)$ について、 $T \not\vdash \text{RFN}_{\Sigma_n}(\sigma)$ 。

- つまり Gödel の第二不完全性定理は
 Σ_{n+1} -定義可能な理論の Σ_n -健全性について成り立つ一般的な性質
の $n = 0$ の場合だった。
- 例えば n -無矛盾性についてはこの性質は成り立たない。

Σ_4 -定義可能かつ 3-無矛盾な理論 T で $T \vdash 3\text{-Con}_\sigma$ となる Σ_4 定義 $\sigma(u)$ をもつものが存在する。

第二不完全性定理の一般化

第二不完全性定理は次のように一般化される。

定理

T : Σ_{n+1} -定義可能とすると、以下は同値：

- ① T は Σ_n -健全。
- ② T の任意の Σ_{n+1} 定義 $\sigma(u)$ について、 $T \not\vdash \mathbf{RFN}_{\Sigma_n}(\sigma)$ 。

- つまり Gödel の第二不完全性定理は
 Σ_{n+1} -定義可能な理論の Σ_n -健全性について成り立つ一般的な性質
の $n = 0$ の場合だった。
- 例えば n -無矛盾性についてはこの性質は成り立たない。

Σ_4 -定義可能かつ 3-無矛盾な理論 T で $T \vdash 3\text{-Con}_\sigma$ となる Σ_4 定義 $\sigma(u)$ をもつものが存在する。

第二不完全性定理の一般化

第二不完全性定理は次のように一般化される。

定理

T : Σ_{n+1} -定義可能とすると、以下は同値：

- ① T は Σ_n -健全。
- ② T の任意の Σ_{n+1} 定義 $\sigma(u)$ について、 $T \not\vdash \text{RFN}_{\Sigma_n}(\sigma)$ 。

- つまり Gödel の第二不完全性定理は
 Σ_{n+1} -定義可能な理論の Σ_n -健全性について成り立つ一般的な性質
の $n = 0$ の場合だった。
- 例えば n -無矛盾性についてはこの性質は成り立たない。

Σ_4 -定義可能かつ 3-無矛盾な理論 T で $T \vdash 3\text{-Con}_\sigma$ となる Σ_4 定義 $\sigma(u)$ をもつものが存在する。

第二不完全性定理の一般化

第二不完全性定理は次のように一般化される。

定理

T : Σ_{n+1} -定義可能とすると、以下は同値：

- ① T は Σ_n -健全。
- ② T の任意の Σ_{n+1} 定義 $\sigma(u)$ について、 $T \not\vdash \text{RFN}_{\Sigma_n}(\sigma)$ 。

- つまり Gödel の第二不完全性定理は
 Σ_{n+1} -定義可能な理論の Σ_n -健全性について成り立つ一般的な性質
の $n = 0$ の場合だった。
- 例えば n -無矛盾性についてはこの性質は成り立たない。

Σ_4 -定義可能かつ 3-無矛盾な理論 T で $T \vdash 3\text{-Con}_\sigma$ となる Σ_4 定義 $\sigma(u)$ をもつものが存在する。

第二不完全性定理の一般化

第二不完全性定理は次のように一般化される。

定理

T : Σ_{n+1} -定義可能とすると、以下は同値：

- ① T は Σ_n -健全。
- ② T の任意の Σ_{n+1} 定義 $\sigma(u)$ について、 $T \not\vdash \text{RFN}_{\Sigma_n}(\sigma)$ 。

- つまり Gödel の第二不完全性定理は
 Σ_{n+1} -定義可能な理論の Σ_n -健全性について成り立つ一般的な性質
の $n = 0$ の場合だった。
- 例えば n -無矛盾性についてはこの性質は成り立たない。

Σ_4 -定義可能かつ 3-無矛盾な理論 T で $T \vdash 3\text{-Con}_\sigma$ となる Σ_4 定義 $\sigma(u)$ をもつものが存在する。

無矛盾性について 1

一方 Con_σ にも思い入れがあるので, Con_σ についても知りたい.

定理

T : Σ_{n+1} -定義可能とすると, 以下は同値:

- ① T は Σ_{n+1} -健全.
- ② T の任意の Σ_{n+1} 定義 $\sigma(u)$ について, $T \not\vdash \neg \text{Con}_\sigma$.

系

T は Σ_{n+1} -定義可能かつ Σ_n -健全でない

$\Rightarrow \exists \sigma_1(u), \sigma_2(u): T$ の Σ_{n+1} 定義 s.t. $T \vdash \text{Con}_{\sigma_1}$ かつ $T \vdash \neg \text{Con}_{\sigma_2}$.

無矛盾性について 1

一方 Con_σ にも思い入れがあるので, Con_σ についても知りたい.

定理

T : Σ_{n+1} -定義可能とすると, 以下は同値:

- ① T は Σ_{n+1} -健全.
- ② T の任意の Σ_{n+1} 定義 $\sigma(u)$ について, $T \not\vdash \neg \text{Con}_\sigma$.

系

T は Σ_{n+1} -定義可能かつ Σ_n -健全でない

$\Rightarrow \exists \sigma_1(u), \sigma_2(u): T$ の Σ_{n+1} 定義 s.t. $T \vdash \text{Con}_{\sigma_1}$ かつ $T \vdash \neg \text{Con}_{\sigma_2}$.

無矛盾性について 1

一方 $\mathbf{Con}_\sigma$ にも思い入れがあるので, $\mathbf{Con}_\sigma$ についても知りたい.

定理

T : Σ_{n+1} -定義可能とすると, 以下は同値:

- ① T は Σ_{n+1} -健全.
- ② T の任意の Σ_{n+1} 定義 $\sigma(u)$ について, $T \not\vdash \neg \mathbf{Con}_\sigma$.

系

T は Σ_{n+1} -定義可能かつ Σ_n -健全でない

$\Rightarrow \exists \sigma_1(u), \sigma_2(u): T$ の Σ_{n+1} 定義 s.t. $T \vdash \mathbf{Con}_{\sigma_1}$ かつ $T \vdash \neg \mathbf{Con}_{\sigma_2}$.

無矛盾性について 2

定理

T は Σ_{n+1} -定義可能かつ Σ_n -健全

$\Rightarrow \exists \sigma(u): T$ の Σ_{n+1} 定義 s.t. $T \not\vdash \text{Con}_\sigma$ かつ $T \not\vdash \neg \text{Con}_\sigma$.

系

T は Σ_{n+1} -定義可能かつ無矛盾

$\Rightarrow \exists \sigma_1(u), \sigma_2(u): T$ の Σ_{n+1} 定義 s.t. $T \not\vdash \text{Con}_{\sigma_1}$ かつ $T \not\vdash \neg \text{Con}_{\sigma_2}$.

無矛盾性について 2

定理

T は Σ_{n+1} -定義可能かつ Σ_n -健全

$\Rightarrow \exists \sigma(u): T$ の Σ_{n+1} 定義 s.t. $T \not\vdash \text{Con}_\sigma$ かつ $T \not\vdash \neg \text{Con}_\sigma$.

系

T は Σ_{n+1} -定義可能かつ無矛盾

$\Rightarrow \exists \sigma_1(u), \sigma_2(u): T$ の Σ_{n+1} 定義 s.t. $T \not\vdash \text{Con}_{\sigma_1}$ かつ $T \not\vdash \neg \text{Con}_{\sigma_2}$.