不完全性定理以降の Rosser 可証性述語

神戸大学システム情報学研究科
倉橋 太志

2014 年 2 月 1 日
山陰 基礎論・解析学セミナー 2014
米子工業高等専門学校

目次

1. Gödel と Rosser の不完全性定理
2. Rosser 可証性述語のその後
3. 第二不完全性定理について

形式化された算術

論理式：算術の言語 $\{0, S, +, \times, <\}$ でかかれた有意味な記号列.
理論：論理式の集合

形式化された算術

論理式：算術の言語 $\{0, S, +, \times, <\}$ でかかれた有意味な記号列.

理論：論理式の集合

T: **PA** を含む再帰的な理論.

形式化された算術

論理式：算術の言語 $\{0, S, +, \times, <\}$ でかかれた有意味な記号列.
理論：論理式の集合
T: **PA** を含む再帰的な理論.

Peano 算術 (PA)

- $\forall x(S(x) \neq 0)$,
- $\forall x(x + 0 = x)$,
- $\forall x \forall y(x + S(y) = S(x + y))$,
- $\ldots$,

形式化された算術

論理式：算術の言語 $\{0, S, +, \times, <\}$ でかかれた有意味な記号列.
理論：論理式の集合
T: **PA** を含む再帰的な理論.

Peano 算術 (PA)

- $\forall x(S(x) \neq 0)$,
- $\forall x(x + 0 = x)$,
- $\forall x \forall y(x + S(y) = S(x + y))$,
- $\dots$,
- 帰納法：すべての算術の論理式 $\varphi(x)$ に対して

$$\varphi(0) \wedge \forall x(\varphi(x) \to \varphi(S(x))) \to \forall x \varphi(x).$$

形式化された算術

論理式：算術の言語 $\{0, S, +, \times, <\}$ でかかれた有意味な記号列.
理論：論理式の集合
T: **PA** を含む再帰的な理論.

Peano 算術 (PA)

- $\forall x(S(x) \neq 0)$,
- $\forall x(x + 0 = x)$,
- $\forall x \forall y(x + S(y) = S(x + y))$,
- $\dots$,
- 帰納法：すべての算術の論理式 $\varphi(x)$ に対して

$$\varphi(0) \wedge \forall x(\varphi(x) \to \varphi(S(x))) \to \forall x \varphi(x).$$

理論 T が再帰的

形式化された算術

論理式：算術の言語 $\{0, S, +, \times, <\}$ でかかれた有意味な記号列.
理論：論理式の集合
T: **PA** を含む再帰的な理論.

Peano 算術 (PA)

- $\forall x(S(x) \neq 0)$,
- $\forall x(x + 0 = x)$,
- $\forall x \forall y(x + S(y) = S(x + y))$,
- $\ldots$,
- 帰納法：すべての算術の論理式 $\varphi(x)$ に対して

$$\varphi(0) \land \forall x(\varphi(x) \to \varphi(S(x))) \to \forall x \varphi(x).$$

理論 T が再帰的
$\Leftrightarrow$ 与えられた論理式が T の元かどうかを判定可能.

Σ_1 論理式

Σ_1 論理式

- 論理式 $\varphi(x)$ が Σ_0

Σ_1 論理式

- 論理式 $\varphi(x)$ が $\mathbf{\Sigma_0}$
$\overset{\text{def,}}{\Leftrightarrow}$ $\varphi(x)$ に含まれる量化記号 ∃, ∀ がすべて
$\exists x \leq y$, $\forall x \leq y$ という形.

Σ_1 論理式

- 論理式 $\varphi(x)$ が $\mathbf{\Sigma_0}$
  $\overset{\text{def,}}{\Leftrightarrow}$ $\varphi(x)$ に含まれる量化記号 ∃, ∀ がすべて
  $\exists x \leq y$, $\forall x \leq y$ という形.
- 論理式 $\varphi(x)$ が $\mathbf{\Sigma_1}$

Σ_1 論理式

- 論理式 $\varphi(x)$ が $\boldsymbol{\Sigma_0}$
  $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ $\varphi(x)$ に含まれる量化記号 $\exists, \forall$ がすべて
  $\exists x \leq y$, $\forall x \leq y$ という形.
- 論理式 $\varphi(x)$ が $\boldsymbol{\Sigma_1}$
  $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ $\varphi(x)$ はある Σ_0 論理式 $\psi(x, y)$ について
  $\exists y \psi(x, y)$ と論理的に同値.

Σ_1 論理式

- 論理式 $\varphi(x)$ が Σ_0
$\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ $\varphi(x)$ に含まれる量化記号 $\exists, \forall$ がすべて
$\exists x \leq y$, $\forall x \leq y$ という形.
- 論理式 $\varphi(x)$ が Σ_1
$\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ $\varphi(x)$ はある Σ_0 論理式 $\psi(x, y)$ について
$\exists y \psi(x, y)$ と論理的に同値.

事実（Σ_1-完全性）

真である Σ_1 文（自由変数を含まない論理式）は
PA においてすべて証明可能.

不完全性定理のポイント

不完全性定理のポイント

第一不完全性定理 (Gödel, 1931)

理論 T が Σ_1-健全
$\Rightarrow$ T からは証明も反証もできない文が存在（T は不完全）.

不完全性定理のポイント

第一不完全性定理 (Gödel, 1931)

理論 T が Σ_1-健全
$\Rightarrow$ T からは証明も反証もできない文が存在（T は不完全）.

理論 T が Σ_1-健全

不完全性定理のポイント

第一不完全性定理 (Gödel, 1931)

理論 T が Σ_1-健全
$\Rightarrow$ T からは証明も反証もできない文が存在（T は不完全）.

理論 T が Σ_1-健全
$\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ T において証明できる Σ_1 文はすべて正しい.

不完全性定理のポイント

第一不完全性定理 (Gödel, 1931)

理論 T が Σ_1-健全
$\Rightarrow$ T からは証明も反証もできない文が存在（T は不完全）.

理論 T が Σ_1-健全
$\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ T において証明できる Σ_1 文はすべて正しい.

T : Σ_1-健全 $\Rightarrow$ T : 無矛盾

不完全性定理のポイント

第一不完全性定理 (Gödel, 1931)

理論 $\boldsymbol{T}$ が $\boldsymbol{\Sigma_1}$-健全
$\Rightarrow$ $\boldsymbol{T}$ からは証明も反証もできない文が存在（$\boldsymbol{T}$ は不完全）.

理論 $\boldsymbol{T}$ が $\boldsymbol{\Sigma_1}$-健全
$\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ $\boldsymbol{T}$ において証明できる $\boldsymbol{\Sigma_1}$ 文はすべて正しい.

$\boldsymbol{T}$: $\boldsymbol{\Sigma_1}$-健全 $\Rightarrow$ $\boldsymbol{T}$: 無矛盾

証明のポイント

1. “$\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{T}$ で証明可能” を表す $\boldsymbol{\Sigma_1}$ 論理式 $\mathbf{Pr}_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{x})$（可証性述語）を構成.

不完全性定理のポイント

第一不完全性定理 (Gödel, 1931)

理論 T が Σ_1-健全
$\Rightarrow$ T からは証明も反証もできない文が存在（T は不完全）.

理論 T が Σ_1-健全
$\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ T において証明できる Σ_1 文はすべて正しい.

T : Σ_1-健全 $\Rightarrow$ T : 無矛盾

証明のポイント

1. "x は T で証明可能" を表す Σ_1 論理式 $\mathrm{Pr}_T(x)$（可証性述語）を構成.
2. 嘘つきの逆理を形式化.

ポイント１：可証性述語

ポイント１：可証性述語

Gödel 数と算術化

- 論理式 φ の **Gödel 数** $\ulcorner\varphi\urcorner$: φ に割り当てられる自然数.

ポイント１：可証性述語

Gödel 数と算術化

- 論理式 φ の **Gödel 数** $\ulcorner\varphi\urcorner$: φ に割り当てられる自然数.
- $\boldsymbol{T}$ における '証明' などの概念について算術の中で議論（算術化）.

ポイント１：可証性述語

Gödel 数と算術化

- 論理式 φ の **Gödel 数** $\ulcorner\varphi\urcorner$: φ に割り当てられる自然数.
- T における '証明' などの概念について算術の中で議論（算術化）.

証明述語

次の条件を満たす論理式 $\mathsf{Prf}_T(x, y)$ を T の証明述語という：

ポイント１：可証性述語

Gödel 数と算術化

- 論理式 φ の **Gödel 数** $\ulcorner\varphi\urcorner$: φ に割り当てられる自然数.
- T における '証明' などの概念について算術の中で議論（算術化）.

証明述語

次の条件を満たす論理式 $\mathsf{Prf}_T(x, y)$ を T の証明述語という：

- $T \vdash \varphi \Rightarrow \exists p$ s.t. $\mathsf{PA} \vdash \mathsf{Prf}_T(\ulcorner\varphi\urcorner, p)$,

ポイント１：可証性述語

Gödel 数と算術化

- 論理式 φ の **Gödel 数** $\ulcorner\varphi\urcorner$: φ に割り当てられる自然数.
- T における '証明' などの概念について算術の中で議論（算術化）.

証明述語

次の条件を満たす論理式 $\mathsf{Prf}_T(x, y)$ を T の証明述語という：

- $T \vdash \varphi \Rightarrow \exists p$ s.t. $\mathsf{PA} \vdash \mathsf{Prf}_T(\ulcorner\varphi\urcorner, p)$,
- $T \nvdash \varphi \Rightarrow \forall p, \mathsf{PA} \vdash \neg\mathsf{Prf}_T(\ulcorner\varphi\urcorner, p)$,

ポイント 1 ：可証性述語

Gödel 数と算術化

- 論理式 φ の **Gödel 数** $\ulcorner \varphi \urcorner$: φ に割り当てられる自然数.
- T における '証明' などの概念について算術の中で議論（算術化）.

証明述語

次の条件を満たす論理式 $\mathsf{Prf}_T(x, y)$ を T の**証明述語**という：

- $T \vdash \varphi \Rightarrow \exists p$ s.t. $\mathsf{PA} \vdash \mathsf{Prf}_T(\ulcorner \varphi \urcorner, p)$,
- $T \nvdash \varphi \Rightarrow \forall p, \mathsf{PA} \vdash \neg \mathsf{Prf}_T(\ulcorner \varphi \urcorner, p)$,

$\mathsf{Pr}_T(x) \equiv \exists y \mathsf{Prf}_T(x, y)$ について

ポイント１：可証性述語

Gödel 数と算術化

- 論理式 φ の **Gödel 数** $\ulcorner\varphi\urcorner$: φ に割り当てられる自然数.
- T における‘証明’などの概念について算術の中で議論（算術化）.

証明述語

次の条件を満たす論理式 $\mathrm{Prf}_T(x, y)$ を T の証明述語という：

- $T \vdash \varphi \Rightarrow \exists p$ s.t. $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Prf}_T(\ulcorner\varphi\urcorner, p)$,
- $T \nvdash \varphi \Rightarrow \forall p, \mathrm{PA} \vdash \neg\mathrm{Prf}_T(\ulcorner\varphi\urcorner, p)$,

$\mathrm{Pr}_T(x) \equiv \exists y \mathrm{Prf}_T(x, y)$ について

- $\mathrm{Pr}_T(x)$ は Σ_1 論理式,

ポイント１：可証性述語

Gödel 数と算術化

- 論理式 φ の **Gödel 数** $\ulcorner\varphi\urcorner$: φ に割り当てられる自然数.
- T における '証明' などの概念について算術の中で議論（算術化）.

証明述語

次の条件を満たす論理式 $\mathrm{Prf}_T(x, y)$ を T の証明述語という：

- $T \vdash \varphi \Rightarrow \exists p$ s.t. $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Prf}_T(\ulcorner\varphi\urcorner, p)$,
- $T \nvdash \varphi \Rightarrow \forall p, \mathrm{PA} \vdash \neg\mathrm{Prf}_T(\ulcorner\varphi\urcorner, p)$,

$\mathrm{Pr}_T(x) \equiv \exists y \mathrm{Prf}_T(x, y)$ について

- $\mathrm{Pr}_T(x)$ は Σ_1 論理式,
- $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\varphi \to \psi\urcorner) \wedge \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\psi\urcorner)$,

ポイント１：可証性述語

Gödel 数と算術化

- 論理式 φ の **Gödel 数** $\ulcorner \varphi \urcorner$: φ に割り当てられる自然数.
- T における '証明' などの概念について算術の中で議論（算術化）.

証明述語

次の条件を満たす論理式 $\mathrm{Prf}_T(x, y)$ を T の証明述語という：

- $T \vdash \varphi \Rightarrow \exists p$ s.t. $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Prf}_T(\ulcorner \varphi \urcorner, p)$,
- $T \nvdash \varphi \Rightarrow \forall p, \mathrm{PA} \vdash \neg \mathrm{Prf}_T(\ulcorner \varphi \urcorner, p)$,

$\mathrm{Pr}_T(x) \equiv \exists y \mathrm{Prf}_T(x, y)$ について

- $\mathrm{Pr}_T(x)$ は Σ_1 論理式,
- $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \to \psi \urcorner) \land \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner)$,
- $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \urcorner)$.

ポイント１：可証性述語

Gödel 数と算術化

- 論理式 φ の **Gödel 数** $\ulcorner \varphi \urcorner$: φ に割り当てられる自然数.
- T における '証明' などの概念について算術の中で議論（算術化）.

証明述語

次の条件を満たす論理式 $\mathrm{Prf}_T(x, y)$ を T の**証明述語**という：

- $T \vdash \varphi \Rightarrow \exists p$ s.t. $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Prf}_T(\ulcorner \varphi \urcorner, p)$,
- $T \nvdash \varphi \Rightarrow \forall p, \mathrm{PA} \vdash \neg \mathrm{Prf}_T(\ulcorner \varphi \urcorner, p)$,

$\mathrm{Pr}_T(x) \equiv \exists y \mathrm{Prf}_T(x, y)$ について

- $\mathrm{Pr}_T(x)$ は Σ_1 論理式,
- $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \to \psi \urcorner) \land \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner)$,
- $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \urcorner)$.

- $\mathrm{Prf}_T(x, y)$ は "y は T における x の証明" という意味内容をもつ論理式.

ポイント１：可証性述語

Gödel 数と算術化

- 論理式 φ の **Gödel 数** $\ulcorner\varphi\urcorner$: φ に割り当てられる自然数.
- T における '証明' などの概念について算術の中で議論（算術化）.

証明述語

次の条件を満たす論理式 $\mathrm{Prf}_T(x, y)$ を T の証明述語という：

- $T \vdash \varphi \Rightarrow \exists p$ s.t. $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Prf}_T(\ulcorner\varphi\urcorner, p)$,
- $T \nvdash \varphi \Rightarrow \forall p, \mathrm{PA} \vdash \neg\mathrm{Prf}_T(\ulcorner\varphi\urcorner, p)$,

$\mathrm{Pr}_T(x) \equiv \exists y \mathrm{Prf}_T(x, y)$ について

- $\mathrm{Pr}_T(x)$ は Σ_1 論理式,
- $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\varphi \to \psi\urcorner) \land \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\psi\urcorner)$,
- $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\mathrm{Pr}_T(\ulcorner\varphi\urcorner)\urcorner)$.

- $\mathrm{Prf}_T(x, y)$ は "y は T における x の証明" という意味内容をもつ論理式.
- $\mathrm{Pr}_T(x)$ を T の可証性述語という.

ポイント２：嘘つきの逆理

ポイント２：嘘つきの逆理

嘘つきの逆理

$A \Leftrightarrow$ “A は偽である”
を満たす命題 A の真偽は決定できない.

ポイント２：嘘つきの逆理

嘘つきの逆理

$A \Leftrightarrow$ "A は偽である"
を満たす命題 A の真偽は決定できない.

Gödel は '真偽' を '証明可能性' に置き換えた状況を実現.

ポイント２：嘘つきの逆理

嘘つきの逆理

$A \Leftrightarrow$ "A は偽である"
を満たす命題 A の真偽は決定できない.

Gödel は '真偽' を '証明可能性' に置き換えた状況を実現.

Gödel 文

- $\mathsf{PA} \vdash \pi_T^G \leftrightarrow \neg\mathsf{Pr}_T(\ulcorner \pi_T^G \urcorner)$
  を満たす文 π_T^G が存在.

ポイント２：嘘つきの逆理

嘘つきの逆理

$A \Leftrightarrow$“A は偽である”
を満たす命題 A の真偽は決定できない.

Gödel は ‘真偽’ を ‘証明可能性’ に置き換えた状況を実現.

Gödel 文

- **PA** $\vdash \pi_T^G \leftrightarrow \neg \mathbf{Pr}_T(\ulcorner \pi_T^G \urcorner)$
  を満たす文 π_T^G が存在.
- π_T^G を T の **Gödel 文**という.

ポイント２：嘘つきの逆理

嘘つきの逆理

$A \Leftrightarrow$ "A は偽である"
を満たす命題 A の真偽は決定できない.

Gödel は '真偽' を '証明可能性' に置き換えた状況を実現.

Gödel 文

- **PA** $\vdash \pi_T^G \leftrightarrow \neg \mathbf{Pr}_T(\ulcorner \pi_T^G \urcorner)$
  を満たす文 π_T^G が存在.
- π_T^G を T の **Gödel 文**という.

不動点補題

$\forall \varphi(x)$: 論理式, $\exists \psi$: 文 s.t.
PA $\vdash \psi \leftrightarrow \varphi(\ulcorner \psi \urcorner)$.

ポイント２：嘘つきの逆理

嘘つきの逆理

$A \Leftrightarrow$ “A は偽である”
を満たす命題 A の真偽は決定できない.

Gödel は ‘真偽’ を ‘証明可能性’ に置き換えた状況を実現.

Gödel 文

- $\mathbf{PA} \vdash \pi_T^G \leftrightarrow \neg \mathbf{Pr}_T(\ulcorner \pi_T^G \urcorner)$
  を満たす文 π_T^G が存在.
- π_T^G を T の **Gödel 文**という.

不動点補題

$\forall \varphi(x)$: 論理式,　　$\exists \psi$: 文 s.t.
$\mathbf{PA} \vdash \psi \leftrightarrow \varphi(\ulcorner \psi \urcorner)$.

T の **Gödel** 文は一つではないことに注意.

Gödel の不完全性定理

π_T^G: T の Gödel 文

Gödel の不完全性定理

π_T^G: T の **Gödel** 文

第一不完全性定理 (Gödel, 1931)

- T: 無矛盾 $\Rightarrow T \nvdash \pi_T^G$,
- T: Σ_1-健全 $\Rightarrow T \nvdash \neg\pi_T^G$.

Gödel の不完全性定理

π_T^G: T の **Gödel 文**

第一不完全性定理 (Gödel, 1931)

- T: 無矛盾 $\Rightarrow T \nvdash \pi_T^G$,
- T: Σ_1-健全 $\Rightarrow T \nvdash \neg\pi_T^G$.

$\mathsf{Con}_T \equiv \neg\mathsf{Pr}_T(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$.

Gödel の不完全性定理

π_T^G: T の **Gödel** 文

第一不完全性定理 (Gödel, 1931)

- T: 無矛盾 $\Rightarrow T \nvdash \pi_T^G$,
- T: Σ_1-健全 $\Rightarrow T \nvdash \neg\pi_T^G$.

$\mathrm{Con}_T \equiv \neg\mathrm{Pr}_T(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$.

$\mathrm{PA} \vdash \pi_T^G \leftrightarrow \mathrm{Con}_T$.

Gödel の不完全性定理

π_T^G: T の Gödel 文

第一不完全性定理 (Gödel, 1931)

- T: 無矛盾 $\Rightarrow T \nvdash \pi_T^G$,
- T: Σ_1-健全 $\Rightarrow T \nvdash \neg\pi_T^G$.

$\mathsf{Con}_T \equiv \neg\mathsf{Pr}_T(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$.

$\mathsf{PA} \vdash \pi_T^G \leftrightarrow \mathsf{Con}_T$.

第二不完全性定理 (Gödel, 1931)

T : 無矛盾 $\Rightarrow T \nvdash \mathsf{Con}_T$.

Gödel の不完全性定理

π_T^G: T の **Gödel** 文

第一不完全性定理 (Gödel, 1931)

- T: 無矛盾 $\Rightarrow T \nvdash \pi_T^G$,
- T: Σ_1-健全 $\Rightarrow T \nvdash \neg\pi_T^G$.

$\mathsf{Con}_T \equiv \neg\mathsf{Pr}_T(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$.

$\mathsf{PA} \vdash \pi_T^G \leftrightarrow \mathsf{Con}_T$.

第二不完全性定理 (Gödel, 1931)

T : 無矛盾 $\Rightarrow T \nvdash \mathsf{Con}_T$.

σ_T^G: T の **Gödel** 文 $\Rightarrow \mathsf{PA} \vdash \pi_T^G \leftrightarrow \sigma_T^G$.

Rosser の不完全性定理

Rosser 可証性述語

$\mathbf{Pr}^{R}_{T}(x)$ を $\exists y(\mathbf{Prf}_T(x, y) \land \forall z \leq y \neg \mathbf{Prf}_T(\neg x, z))$
と定め，T の **Rosser 可証性述語**という.

Rosser の不完全性定理

Rosser 可証性述語

$\mathbf{Pr}_T^R(x)$ を $\exists y(\mathbf{Prf}_T(x, y) \wedge \forall z \leq y \neg \mathbf{Prf}_T(\neg x, z))$
と定め，T の **Rosser 可証性述語**という．

Rosser 文

$\mathbf{PA} \vdash \pi_T^R \leftrightarrow \neg \mathbf{Pr}_T^R(\ulcorner \pi_T^R \urcorner)$
を満たす文 π_T^R を T の **Rosser 文**という．

Rosser の不完全性定理

Rosser 可証性述語

$\mathbf{Pr}^R_T(x)$ を $\exists y(\mathbf{Prf}_T(x, y) \land \forall z \leq y \neg \mathbf{Prf}_T(\neg x, z))$
と定め，T の **Rosser 可証性述語**という．

Rosser 文

$\mathbf{PA} \vdash \pi^R_T \leftrightarrow \neg \mathbf{Pr}^R_T(\ulcorner \pi^R_T \urcorner)$
を満たす文 π^R_T を T の **Rosser 文**という．

Rosser の第一不完全性定理 (Rosser, 1936)

T: 無矛盾 $\Rightarrow T \nvdash \pi^R_T$ かつ $T \nvdash \neg \pi^R_T$.

Rosser の不完全性定理

Rosser 可証性述語

$\mathsf{Pr}_T^R(x)$ を $\exists y(\mathsf{Prf}_T(x, y) \land \forall z \leq y \neg \mathsf{Prf}_T(\neg x, z))$
と定め，T の **Rosser 可証性述語**という．

Rosser 文

$\mathsf{PA} \vdash \pi_T^R \leftrightarrow \neg \mathsf{Pr}_T^R(\ulcorner \pi_T^R \urcorner)$
を満たす文 π_T^R を T の **Rosser 文**という．

Rosser の第一不完全性定理 (Rosser, 1936)

T: 無矛盾 $\Rightarrow T \nvdash \pi_T^R$ かつ $T \nvdash \neg \pi_T^R$.

$\mathsf{Con}_T^R \equiv \neg \mathsf{Pr}_T^R(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$.

Rosser の不完全性定理

Rosser 可証性述語

$\mathbf{Pr}_T^R(x)$ を $\exists y(\mathbf{Prf}_T(x,y) \land \forall z \leq y \neg \mathbf{Prf}_T(\neg x, z))$
と定め，T の **Rosser 可証性述語**という．

Rosser 文

$\mathbf{PA} \vdash \pi_T^R \leftrightarrow \neg \mathbf{Pr}_T^R(\ulcorner \pi_T^R \urcorner)$
を満たす文 π_T^R を T の **Rosser 文**という．

Rosser の第一不完全性定理 (Rosser, 1936)

T: 無矛盾 $\Rightarrow T \nvdash \pi_T^R$ かつ $T \nvdash \neg \pi_T^R$.

$\mathbf{Con}_T^R \equiv \neg \mathbf{Pr}_T^R(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$.

$\mathbf{PA} \vdash \mathbf{Con}_T^R$ となり，**Rosser** 可証性述語には第二不完全性定理が成立しない．

1. **Gödel と Rosser の不完全性定理**
2. **Rosser 可証性述語のその後**
3. 第二不完全性定理について

Rosser 可証性述語の基本性質

Rosser 可証性述語の基本性質

命題

- $\mathbf{PA} \vdash \mathbf{Con}_{\boldsymbol{T}} \to \neg \mathbf{Pr}_{\boldsymbol{T}}(\ulcorner \boldsymbol{\pi}^{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{T}} \urcorner)$.

Rosser 可証性述語の基本性質

命題

- $\mathsf{PA} \vdash \mathsf{Con}_T \to \neg \mathsf{Pr}_T(\ulcorner \pi_T^R \urcorner)$.
- $\mathsf{PA} \vdash \mathsf{Con}_T \to \neg \mathsf{Pr}_T(\ulcorner \neg \pi_T^R \urcorner)$.

Rosser 可証性述語の基本性質

命題

- $\mathbf{PA} \vdash \mathbf{Con}_T \rightarrow \neg\mathbf{Pr}_T(\ulcorner \pi_T^R \urcorner)$.
- $\mathbf{PA} \vdash \mathbf{Con}_T \rightarrow \neg\mathbf{Pr}_T(\ulcorner \neg\pi_T^R \urcorner)$.
- $\mathbf{PA} \vdash \mathbf{Con}_T \rightarrow \pi_T^R$.

Rosser 可証性述語の基本性質

命題

- $\mathsf{PA} \vdash \mathsf{Con}_T \to \neg \mathsf{Pr}_T(\ulcorner \pi_T^R \urcorner)$.
- $\mathsf{PA} \vdash \mathsf{Con}_T \to \neg \mathsf{Pr}_T(\ulcorner \neg \pi_T^R \urcorner)$.
- $\mathsf{PA} \vdash \mathsf{Con}_T \to \pi_T^R$.
- T: 無矛盾 $\Rightarrow T \nvdash \pi_T^R \to \mathsf{Con}_T$.

Rosser 可証性述語の基本性質

命題

- $\mathbf{PA} \vdash \mathbf{Con}_T \to \neg \mathbf{Pr}_T(\ulcorner \pi^R_T \urcorner)$.
- $\mathbf{PA} \vdash \mathbf{Con}_T \to \neg \mathbf{Pr}_T(\ulcorner \neg \pi^R_T \urcorner)$.
- $\mathbf{PA} \vdash \mathbf{Con}_T \to \pi^R_T$.
- T: 無矛盾 $\Rightarrow T \nvdash \pi^R_T \to \mathbf{Con}_T$.

$\mathbf{PA} \vdash \pi^R_T \leftrightarrow (\mathbf{Pr}^R_T(\ulcorner \pi^R_T \urcorner) \to \pi^R_T)$ に注意.

Rosser 可証性述語の基本性質

命題

- $\mathbf{PA} \vdash \mathbf{Con}_T \to \neg \mathbf{Pr}_T(\ulcorner \pi_T^R \urcorner)$.
- $\mathbf{PA} \vdash \mathbf{Con}_T \to \neg \mathbf{Pr}_T(\ulcorner \neg \pi_T^R \urcorner)$.
- $\mathbf{PA} \vdash \mathbf{Con}_T \to \pi_T^R$.
- T: 無矛盾 $\Rightarrow T \nvdash \pi_T^R \to \mathbf{Con}_T$.

$\mathbf{PA} \vdash \pi_T^R \leftrightarrow (\mathbf{Pr}_T^R(\ulcorner \pi_T^R \urcorner) \to \pi_T^R)$ に注意.

定理 (Goryachev, 1989)

T: 無矛盾 $\Rightarrow$ 任意の文 φ について $T \nvdash (\mathbf{Pr}_T^R(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \varphi) \to \mathbf{Con}_T$.

Rosser 可証性述語の基本性質

命題

- $\mathsf{PA} \vdash \mathsf{Con}_T \to \neg\mathsf{Pr}_T(\ulcorner \pi_T^R \urcorner)$.
- $\mathsf{PA} \vdash \mathsf{Con}_T \to \neg\mathsf{Pr}_T(\ulcorner \neg\pi_T^R \urcorner)$.
- $\mathsf{PA} \vdash \mathsf{Con}_T \to \pi_T^R$.
- T: 無矛盾 $\Rightarrow T \nvdash \pi_T^R \to \mathsf{Con}_T$.

$\mathsf{PA} \vdash \pi_T^R \leftrightarrow (\mathsf{Pr}_T^R(\ulcorner \pi_T^R \urcorner) \to \pi_T^R)$ に注意.

定理 (Goryachev, 1989)

T: 無矛盾 $\Rightarrow$ 任意の文 φ について $T \nvdash (\mathsf{Pr}_T^R(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \varphi) \to \mathsf{Con}_T$.

問題 (Kreisel and Takeuti, 1974)

1. T の Rosser 文は同値か？

Rosser 可証性述語の基本性質

命題

- $\mathbf{PA} \vdash \mathbf{Con}_T \to \neg \mathbf{Pr}_T(\ulcorner \pi_T^R \urcorner)$.
- $\mathbf{PA} \vdash \mathbf{Con}_T \to \neg \mathbf{Pr}_T(\ulcorner \neg \pi_T^R \urcorner)$.
- $\mathbf{PA} \vdash \mathbf{Con}_T \to \pi_T^R$.
- T: 無矛盾 $\Rightarrow T \nvdash \pi_T^R \to \mathbf{Con}_T$.

$\mathbf{PA} \vdash \pi_T^R \leftrightarrow (\mathbf{Pr}_T^R(\ulcorner \pi_T^R \urcorner) \to \pi_T^R)$ に注意.

定理 (Goryachev, 1989)

T: 無矛盾 $\Rightarrow$ 任意の文 φ について $T \nvdash (\mathbf{Pr}_T^R(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \varphi) \to \mathbf{Con}_T$.

問題 (Kreisel and Takeuti, 1974)

1. T の **Rosser** 文は同値か？
2. T の **Rosser** 可証性述語はどのような性質を満たすか？

Rosser 文の同値性について

Rosser 文の同値性について

定理 (Guaspari and Solovay, 1979)

1. 全ての **Rosser** 文が同値であるような **Rosser** 可証性述語が存在.

Rosser 文の同値性について

定理 (Guaspari and Solovay, 1979)

1. 全ての **Rosser** 文が同値であるような **Rosser** 可証性述語が存在.
2. 同値でない **Rosser** 文をもつような **Rosser** 可証性述語が存在.

Rosser 文の同値性について

定理 (Guaspari and Solovay, 1979)

1. 全ての Rosser 文が同値であるような Rosser 可証性述語が存在.
2. 同値でない Rosser 文をもつような Rosser 可証性述語が存在.

定理 1 の Rosser 可証性述語 について,

T にその Rosser 文を全て加えた理論から $\mathbf{Con}_T$ は証明できない.

Rosser 文の同値性について

定理 (Guaspari and Solovay, 1979)

1. 全ての **Rosser** 文が同値であるような **Rosser** 可証性述語が存在.
2. 同値でない **Rosser** 文をもつような **Rosser** 可証性述語が存在.

定理 **1** の **Rosser** 可証性述語 について,
T にその **Rosser** 文を全て加えた理論から $\mathbf{Con}_T$ は証明できない.

定理 (K.)

T のある **Rosser** 可証性述語とその **Rosser** 文 π_T^R, σ_T^R が存在して
$\mathbf{PA} \vdash \pi_T^R \land \sigma_T^R \leftrightarrow \mathbf{Con}_T$.

Rosser 文の同値性について

定理 (Guaspari and Solovay, 1979)

1. 全ての **Rosser** 文が同値であるような **Rosser** 可証性述語が存在.
2. 同値でない **Rosser** 文をもつような **Rosser** 可証性述語が存在.

定理 **1** の **Rosser** 可証性述語 について,
T にその **Rosser** 文を全て加えた理論から $\mathbf{Con}_T$ は証明できない.

定理 (K.)

T のある **Rosser** 可証性述語とその **Rosser** 文 π_T^R, σ_T^R が存在して
$\mathbf{PA} \vdash \pi_T^R \wedge \sigma_T^R \leftrightarrow \mathbf{Con}_T$.

定理 (Shavrukov, 1991)

全ての **Rosser** 文が互いに同値でないような **Rosser** 可証性述語が存在.

Rosser 可証性述語の性質について

Rosser 可証性述語の性質について

可証性述語の性質

D2: $\boldsymbol{T} \vdash \mathbf{Pr}^{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{T}}(\ulcorner \varphi \to \psi \urcorner) \land \mathbf{Pr}^{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{T}}(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathbf{Pr}^{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{T}}(\ulcorner \psi \urcorner)$.

Rosser 可証性述語の性質について

可証性述語の性質

D2: $T \vdash \mathbf{Pr}^R_T(\ulcorner \varphi \to \psi \urcorner) \land \mathbf{Pr}^R_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathbf{Pr}^R_T(\ulcorner \psi \urcorner)$.

D3: $\mathbf{PA} \vdash \mathbf{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathbf{Pr}_T(\ulcorner \mathbf{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \urcorner)$.

Rosser 可証性述語の性質について

可証性述語の性質

D2: $T \vdash \mathbf{Pr}_T^R(\ulcorner \varphi \to \psi \urcorner) \land \mathbf{Pr}_T^R(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathbf{Pr}_T^R(\ulcorner \psi \urcorner).$

D3: $\mathbf{PA} \vdash \mathbf{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathbf{Pr}_T(\ulcorner \mathbf{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \urcorner).$

- **D2** と **D3** が成り立てば第二不完全性定理の証明が適用できるため，少なくともどちらかは成り立たない．

Rosser 可証性述語の性質について

可証性述語の性質

D2: $T \vdash \mathbf{Pr}^R_T(\ulcorner \varphi \to \psi \urcorner) \land \mathbf{Pr}^R_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathbf{Pr}^R_T(\ulcorner \psi \urcorner)$.

D3: $\mathsf{PA} \vdash \mathbf{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathbf{Pr}_T(\ulcorner \mathbf{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \urcorner)$.

- **D2** と **D3** が成り立てば第二不完全性定理の証明が適用できるため，少なくともどちらかは成り立たない．

定理 (Guaspari and Solovay, 1979)

D2 と **D3** を共に満たさない **Rosser** 可証性述語が存在．

Rosser 可証性述語の性質について

可証性述語の性質

D2: $T \vdash \mathbf{Pr}^R_T(\ulcorner \varphi \to \psi \urcorner) \land \mathbf{Pr}^R_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathbf{Pr}^R_T(\ulcorner \psi \urcorner)$.

D3: $\mathsf{PA} \vdash \mathbf{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathbf{Pr}_T(\ulcorner \mathbf{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \urcorner)$.

- **D2** と **D3** が成り立てば第二不完全性定理の証明が適用できるため，少なくともどちらかは成り立たない．

定理 (Guaspari and Solovay, 1979)

D2 と **D3** を共に満たさない **Rosser** 可証性述語が存在．

定理 (Arai, 1990)

D2 を満たす **Rosser** 可証性述語，
及び **D3** を満たす **Rosser** 可証性述語が存在．

Rosser 可証性述語の性質について

Rosser 可証性述語の性質について

可証性述語の性質

D2: $\mathbf{PA} \vdash \mathbf{Pr}_T^R(\ulcorner \varphi \to \psi \urcorner) \land \mathbf{Pr}_T^R(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathbf{Pr}_T^R(\ulcorner \psi \urcorner)$.

D4: $\mathbf{PA} \vdash \neg \mathbf{Pr}_T^R(\ulcorner \varphi \urcorner) \Rightarrow T \vdash \neg \varphi$.

定理 (K.)

D2 と **D4** を満たす **Rosser** 可証性述語が存在する.

Rosser 可証性述語の性質について

可証性述語の性質

D2: $\mathbf{PA} \vdash \mathbf{Pr}_T^R(\ulcorner \varphi \to \psi \urcorner) \land \mathbf{Pr}_T^R(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathbf{Pr}_T^R(\ulcorner \psi \urcorner)$.

D4: $\mathbf{PA} \vdash \neg \mathbf{Pr}_T^R(\ulcorner \varphi \urcorner) \Rightarrow T \vdash \neg \varphi$.

定理 (K.)

D2 と **D4** を満たす **Rosser** 可証性述語が存在する.

系

次を満たす **PA** の **Rosser** 可証性述語 $\mathbf{Pr}_{\mathbf{PA}}^R(x)$ が存在する：

Rosser 可証性述語の性質について

可証性述語の性質

D2: $\mathbf{PA} \vdash \mathbf{Pr}_T^R(\ulcorner \varphi \to \psi \urcorner) \land \mathbf{Pr}_T^R(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathbf{Pr}_T^R(\ulcorner \psi \urcorner)$.

D4: $\mathbf{PA} \vdash \neg \mathbf{Pr}_T^R(\ulcorner \varphi \urcorner) \Rightarrow T \vdash \neg \varphi$.

定理 (K.)

D2 と D4 を満たす Rosser 可証性述語が存在する.

系

次を満たす PA の Rosser 可証性述語 $\mathbf{Pr}_{\mathbf{PA}}^R(x)$ が存在する：

$\forall T$: PA の完全な拡大理論

$\exists \mathcal{M}$: $\mathbf{PA} + \neg \mathbf{Con}_{\mathbf{PA}}$ のモデル s.t.

$\{\varphi : \mathcal{M} \models \mathbf{Pr}_{\mathbf{PA}}^R(\ulcorner \varphi \urcorner)\} = T$.

1. **Gödel と Rosser の不完全性定理**
2. **Rosser 可証性述語のその後**
3. 第二不完全性定理について

第二不完全性定理について

第二不完全性定理について

論理式 $\tau(v)$ が理論 T を**表現**する

第二不完全性定理について

論理式 $\tau(v)$ が理論 T を**表現**する
$\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ 任意の文 φ について,

- $\varphi \in T \Rightarrow T \vdash \tau(\ulcorner \varphi \urcorner)$,
- $\varphi \notin T \Rightarrow T \vdash \neg\tau(\ulcorner \varphi \urcorner)$.

第二不完全性定理について

論理式 $\tau(v)$ が理論 T を表現する
$\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ 任意の文 φ について,

- $\varphi \in T \Rightarrow T \vdash \tau(\ulcorner \varphi \urcorner)$,
- $\varphi \notin T \Rightarrow T \vdash \neg\tau(\ulcorner \varphi \urcorner)$.

論理式 $\tau(v)$ が理論 T を弱表現する

第二不完全性定理について

論理式 $\tau(v)$ が理論 T を**表現**する
$\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ 任意の文 φ について,

- $\varphi \in T \Rightarrow T \vdash \tau(\ulcorner\varphi\urcorner)$,
- $\varphi \notin T \Rightarrow T \vdash \neg\tau(\ulcorner\varphi\urcorner)$.

論理式 $\tau(v)$ が理論 T を**弱表現**する
$\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ 任意の文 φ について, $\varphi \in T \Leftrightarrow T \vdash \tau(\ulcorner\varphi\urcorner)$,

第二不完全性定理について

論理式 $\tau(v)$ が理論 T を表現する
$\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ 任意の文 φ について,

- $\varphi \in T \Rightarrow T \vdash \tau(\ulcorner\varphi\urcorner)$,
- $\varphi \notin T \Rightarrow T \vdash \neg\tau(\ulcorner\varphi\urcorner)$.

論理式 $\tau(v)$ が理論 T を弱表現する
$\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ 任意の文 φ について, $\varphi \in T \Leftrightarrow T \vdash \tau(\ulcorner\varphi\urcorner)$,

- $\mathsf{Prf}_\tau(x, y) \equiv$ "y は $\tau(v)$ を満たす論理式の集合からの x の証明".

第二不完全性定理について

論理式 $\tau(v)$ が理論 T を**表現**する
$\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ 任意の文 φ について,

- $\varphi \in T \Rightarrow T \vdash \tau(\ulcorner\varphi\urcorner)$,
- $\varphi \notin T \Rightarrow T \vdash \neg\tau(\ulcorner\varphi\urcorner)$.

論理式 $\tau(v)$ が理論 T を**弱表現**する
$\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ 任意の文 φ について, $\varphi \in T \Leftrightarrow T \vdash \tau(\ulcorner\varphi\urcorner)$,

- $\mathsf{Prf}_\tau(x, y) \equiv$ "y は $\tau(v)$ を満たす論理式の集合からの x の証明".
- $\tau(v)$: T を表現する Σ_1 論理式 $\Rightarrow \mathsf{Prf}_\tau(x, y)$ は T の証明述語.

第二不完全性定理について

論理式 $\tau(v)$ が理論 T を表現する
$\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ 任意の文 φ について,

- $\varphi \in T \Rightarrow T \vdash \tau(\ulcorner \varphi \urcorner)$,
- $\varphi \notin T \Rightarrow T \vdash \neg\tau(\ulcorner \varphi \urcorner)$.

論理式 $\tau(v)$ が理論 T を弱表現する
$\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ 任意の文 φ について, $\varphi \in T \Leftrightarrow T \vdash \tau(\ulcorner \varphi \urcorner)$,

- $\mathbf{Prf}_\tau(x, y) \equiv$ "y は $\tau(v)$ を満たす論理式の集合からの x の証明".
- $\tau(v)$: T を表現する Σ_1 論理式 $\Rightarrow$ $\mathbf{Prf}_\tau(x, y)$ は T の証明述語.
- $\mathbf{Con}_\tau, \mathbf{Con}_\tau^R$ を今までと同様に定める.

第二不完全性定理について

論理式 $\tau(v)$ が理論 T を**表現**する
$\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ 任意の文 φ について,

- $\varphi \in T \Rightarrow T \vdash \tau(\ulcorner \varphi \urcorner)$,
- $\varphi \notin T \Rightarrow T \vdash \neg\tau(\ulcorner \varphi \urcorner)$.

論理式 $\tau(v)$ が理論 T を**弱表現**する
$\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ 任意の文 φ について, $\varphi \in T \Leftrightarrow T \vdash \tau(\ulcorner \varphi \urcorner)$,

- $\mathsf{Prf}_\tau(x, y) \equiv$ "y は $\tau(v)$ を満たす論理式の集合からの x の証明".
- $\tau(v)$: T を表現する Σ_1 論理式 $\Rightarrow \mathsf{Prf}_\tau(x, y)$ は T の証明述語.
- $\mathsf{Con}_\tau, \mathsf{Con}_\tau^R$ を今までと同様に定める.
- T が無矛盾で $\tau(v)$ が T を弱表現する Σ_1 論理式 $\Rightarrow T \nvdash \mathsf{Con}_\tau$.

Feferman の定理

Feferman の定理

定理 (Feferman, 1960)

T を表現する Σ_1 でない論理式 $\tau(v)$ が存在して，$\mathsf{PA} \vdash \mathsf{Con}_\tau$ が成り立つ．

Feferman の定理

定理 (Feferman, 1960)

T を表現する Σ_1 でない論理式 $\tau(v)$ が存在して，$\mathbf{PA} \vdash \mathbf{Con}_\tau$ が成り立つ．

- 同様のことが **Rosser** 可証性述語にもいえる．

Feferman の定理

定理 (Feferman, 1960)

T を表現する Σ_1 でない論理式 $\tau(v)$ が存在して，$\mathsf{PA} \vdash \mathsf{Con}_\tau$ が成り立つ．

- 同様のことが **Rosser** 可証性述語にもいえる．

定理 (K.)

T が無矛盾ならば，
T を弱表現する Σ_1 論理式 $\tau(v)$ が存在して
$T \nvdash \mathsf{Con}^R_\tau$ が成り立つ．