Rosser 可証性述語による Henkin 文ついて

倉橋太志

神戸大学　システム情報学研究科
日本学術振興会特別研究員（PD）

日本数学会 2014 年度年会
学習院大学
2014 年 3 月 15 日

Contents

1. Henkin の問題と Löb の定理
2. Rosser 可証性述語による Henkin 文

Henkin の問題

本発表では T を次を満たす理論とする：

1. 無矛盾;
2. 再帰的に公理化されている;
3. **Peano 算術 PA の拡大.**

Henkin の問題

本発表では T を次を満たす理論とする：

1. 無矛盾;
2. 再帰的に公理化されている;
3. **Peano** 算術 **PA** の拡大.

- **Gödel** は不完全性定理の証明において
  自らの T-証明不可能性を主張する文を構成した.

Henkin の問題

本発表では T を次を満たす理論とする：

1. 無矛盾;
2. 再帰的に公理化されている;
3. Peano 算術 **PA** の拡大.

- Gödel は不完全性定理の証明において自らの T-証明不可能性を主張する文を構成した.
- そのような文は（T の ω-無矛盾性の仮定のもとで）T から独立である.

Henkin の問題

本発表では T を次を満たす理論とする：

1. 無矛盾;
2. 再帰的に公理化されている;
3. **Peano** 算術 **PA** の拡大.

- **Gödel** は不完全性定理の証明において
  自らの T-証明不可能性を主張する文を構成した.
- そのような文は（T の ω-無矛盾性の仮定のもとで）T から独立である.

1952 年，**Henkin** は次の問題を提起した.

Henkin の問題

本発表では T を次を満たす理論とする：

1. 無矛盾;
2. 再帰的に公理化されている;
3. **Peano** 算術 **PA** の拡大.

- **Gödel** は不完全性定理の証明において
  自らの T-証明不可能性を主張する文を構成した.
- そのような文は（T の ω-無矛盾性の仮定のもとで）T から独立である.

1952 年，**Henkin** は次の問題を提起した.

Henkin の問題 (1952)

自らの T-証明可能性 を主張する文は T において証明可能か？

可証性述語

可証性述語

定義

Σ_1 論理式 $\mathsf{Pr}_T(x)$ が T の**可証性述語**である

可証性述語

定義

Σ_1 論理式 $\mathsf{Pr}_T(x)$ が T の**可証性述語**である

$\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ 任意の論理式 φ について，$T \vdash \varphi \Leftrightarrow \mathsf{PA} \vdash \mathsf{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$.

可証性述語

定義

Σ_1 論理式 $\mathsf{Pr}_T(x)$ が T の可証性述語である
$\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ 任意の論理式 φ について，$T \vdash \varphi \Leftrightarrow \mathsf{PA} \vdash \mathsf{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$.

定義

可証性述語 $\mathsf{Pr}_T(x)$ が標準的である

可証性述語

定義

Σ_1 論理式 $\mathsf{Pr}_T(x)$ が T の**可証性述語**である
$\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ 任意の論理式 φ について，$T \vdash \varphi \Leftrightarrow \mathsf{PA} \vdash \mathsf{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$.

定義

可証性述語 $\mathsf{Pr}_T(x)$ が**標準的**である
$\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ 任意の φ, ψ について，

可証性述語

定義

Σ_1 論理式 $\mathsf{Pr}_T(x)$ が T の可証性述語である
$\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ 任意の論理式 φ について，$T \vdash \varphi \Leftrightarrow \mathsf{PA} \vdash \mathsf{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$.

定義

可証性述語 $\mathsf{Pr}_T(x)$ が標準的である
$\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ 任意の φ, ψ について，

- $\mathsf{PA} \vdash \mathsf{Pr}_T(\ulcorner \varphi \to \psi \urcorner) \to (\mathsf{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathsf{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner))$;

可証性述語

定義

Σ_1 論理式 $\mathsf{Pr}_T(x)$ が T の可証性述語である
$\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ 任意の論理式 φ について，$T \vdash \varphi \Leftrightarrow \mathsf{PA} \vdash \mathsf{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$.

定義

可証性述語 $\mathsf{Pr}_T(x)$ が標準的である
$\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ 任意の φ, ψ について，

- $\mathsf{PA} \vdash \mathsf{Pr}_T(\ulcorner \varphi \to \psi \urcorner) \to (\mathsf{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathsf{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner))$;
- φ が $\Sigma_1 \Rightarrow \mathsf{PA} \vdash \varphi \to \mathsf{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$.

可証性述語

定義

Σ_1 論理式 $\mathsf{Pr}_T(x)$ が T の**可証性述語**である

$\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ 任意の論理式 φ について, $T \vdash \varphi \Leftrightarrow \mathsf{PA} \vdash \mathsf{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$.

定義

可証性述語 $\mathsf{Pr}_T(x)$ が**標準的**である

$\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ 任意の φ, ψ について,

- $\mathsf{PA} \vdash \mathsf{Pr}_T(\ulcorner \varphi \to \psi \urcorner) \to (\mathsf{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathsf{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner))$;
- φ が Σ_1 $\Rightarrow$ $\mathsf{PA} \vdash \varphi \to \mathsf{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$.

T の標準的可証性述語 $\mathsf{Pr}_T(x)$ を固定する.

Henkin 文と Löb の定理

定義

文 φ は T の **Henkin 文**である

Henkin 文と Löb の定理

定義

文 φ は T の **Henkin 文**である $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ $T \vdash \varphi \leftrightarrow \mathsf{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$.

Henkin 文と Löb の定理

定義

文 φ は T の **Henkin 文**である
$\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ $T \vdash \varphi \leftrightarrow \mathsf{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$.

Henkin の問題は次のように書き換えられる.

Henkin 文と Löb の定理

定義

文 φ は T の **Henkin 文**である
$\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ $T \vdash \varphi \leftrightarrow \mathsf{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$.

Henkin の問題は次のように書き換えられる.

Henkin の問題 (1952)

T の **Henkin** 文は T において証明可能か？

Henkin 文と Löb の定理

定義

文 φ は T の **Henkin 文**である

$\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ $T \vdash \varphi \leftrightarrow \mathsf{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$.

Henkin の問題は次のように書き換えられる.

Henkin の問題 (1952)

T の **Henkin** 文は T において証明可能か？

1955 年, **Löb** は次の定理を証明することでこの問題に解答を与えた.

Henkin 文と Löb の定理

定義

文 φ は T の **Henkin 文**である
$\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ $T \vdash \varphi \leftrightarrow \mathsf{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$.

Henkin の問題は次のように書き換えられる.

Henkin の問題 (1952)

T の **Henkin** 文は T において証明可能か？

1955 年，**Löb** は次の定理を証明することでこの問題に解答を与えた.

Löb の定理 (1955)

任意の φ について，$T \vdash \mathsf{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \varphi$ ならば $T \vdash \varphi$.

Henkin 文と Löb の定理

定義

文 φ は T の **Henkin 文**である
$\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ $T \vdash \varphi \leftrightarrow \mathsf{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$.

Henkin の問題は次のように書き換えられる.

Henkin の問題 (1952)

T の **Henkin** 文は T において証明可能か？

1955 年, **Löb** は次の定理を証明することでこの問題に解答を与えた.

Löb の定理 (1955)

任意の φ について, $T \vdash \mathsf{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \varphi$ ならば $T \vdash \varphi$.

つまり T の全ての **Henkin** 文は T において証明可能.

1. **Henkin の問題と Löb の定理**
2. **Rosser 可証性述語による Henkin 文**

Rosser 可証性述語による Henkin 文

- **1953** 年，**Kreisel** は反証可能 な **Henkin** 文をもつ標準的でない可証性述語を与えた.

Rosser 可証性述語による Henkin 文

- **1953 年，Kreisel** は反証可能 な **Henkin** 文をもつ標準的でない可証性述語を与えた.
- **Rosser** 可証性述語 も反証可能な **Henkin** 文をもつ標準的でない可証性述語.

Rosser 可証性述語による Henkin 文

- **1953 年，Kreisel は反証可能な Henkin 文をもつ標準的でない可証性述語を与えた．**
- **Rosser 可証性述語 も反証可能な Henkin 文をもつ標準的でない可証性述語．**

$\mathsf{Prf}_T(x, y)$ を，$\mathsf{Pr}_T(x) \equiv \exists y \mathsf{Prf}_T(x, y)$ となる Δ_1 論理式とする（T の証明述語）．

Rosser 可証性述語による Henkin 文

- **1953 年，Kreisel は反証可能 な Henkin 文をもつ標準的でない可証性述語を与えた．**
- **Rosser 可証性述語 も反証可能な Henkin 文をもつ標準的でない可証性述語．**

$\mathsf{Prf}_T(x, y)$ を，$\mathsf{Pr}_T(x) \equiv \exists y \mathsf{Prf}_T(x, y)$ となる Δ_1 論理式とする（T の証明述語）．

定義

T の Rosser 可証性述語 $\mathsf{Pr}_T^R(x)$ は次の論理式：
$\exists y(\mathsf{Prf}_T(x, y) \land \forall z \leq y \neg \mathsf{Prf}_T(\neg x, z))$.

Rosser 可証性述語による Henkin 文

- 1953 年，Kreisel は反証可能 な Henkin 文をもつ標準的でない可証性述語を与えた．
- Rosser 可証性述語 も反証可能な Henkin 文をもつ標準的でない可証性述語．

$\mathsf{Prf}_T(x, y)$ を，$\mathsf{Pr}_T(x) \equiv \exists y \mathsf{Prf}_T(x, y)$ となる Δ_1 論理式とする（T の証明述語）．

定義

T の Rosser 可証性述語 $\mathsf{Pr}^R_T(x)$ は次の論理式：
$\exists y(\mathsf{Prf}_T(x, y) \land \forall z \leq y \neg \mathsf{Prf}_T(\neg x, z))$.

定義

文 φ は $\mathsf{Pr}^R_T(x)$ の Rosser 型 Henkin 文である

Rosser 可証性述語による Henkin 文

- 1953 年，Kreisel は反証可能 な Henkin 文をもつ標準的でない可証性述語を与えた.
- Rosser 可証性述語 も反証可能な Henkin 文をもつ標準的でない可証性述語.

$\mathsf{Prf}_T(x, y)$ を，$\mathsf{Pr}_T(x) \equiv \exists y \mathsf{Prf}_T(x, y)$ となる Δ_1 論理式とする（T の証明述語）.

定義

T の Rosser 可証性述語 $\mathsf{Pr}_T^R(x)$ は次の論理式：
$\exists y(\mathsf{Prf}_T(x, y) \land \forall z \leq y \neg \mathsf{Prf}_T(\neg x, z))$.

定義

文 φ は $\mathsf{Pr}_T^R(x)$ の Rosser 型 Henkin 文である
$\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} T \vdash \varphi \leftrightarrow \mathsf{Pr}_T^R(\ulcorner \varphi \urcorner)$.

命題

任意の φ について，

命題

任意の φ について,

- $T \vdash \varphi \Rightarrow \mathbf{PA} \vdash \mathbf{Pr}_T^R(\ulcorner \varphi \urcorner)$.

命題

任意の φ について，

- $T \vdash \varphi \Rightarrow \mathbf{PA} \vdash \mathbf{Pr}_T^R(\ulcorner \varphi \urcorner)$.
- $T \vdash \neg\varphi \Rightarrow \mathbf{PA} \vdash \neg\mathbf{Pr}_T^R(\ulcorner \varphi \urcorner)$.

命題

任意の φ について，

- $T \vdash \varphi \Rightarrow \mathsf{PA} \vdash \mathsf{Pr}_T^R(\ulcorner \varphi \urcorner)$.
- $T \vdash \neg\varphi \Rightarrow \mathsf{PA} \vdash \neg\mathsf{Pr}_T^R(\ulcorner \varphi \urcorner)$.

$T \vdash \varphi$ または $T \vdash \neg\varphi$
$\Rightarrow \varphi$ は $\mathsf{Pr}_T^R(x)$ の Rosser 型 Henkin 文.

命題

任意の φ について,

- $T \vdash \varphi \Rightarrow \mathsf{PA} \vdash \mathsf{Pr}_T^R(\ulcorner \varphi \urcorner)$.
- $T \vdash \neg\varphi \Rightarrow \mathsf{PA} \vdash \neg\mathsf{Pr}_T^R(\ulcorner \varphi \urcorner)$.

$T \vdash \varphi$ または $T \vdash \neg\varphi$
$\Rightarrow \varphi$ は $\mathsf{Pr}_T^R(x)$ の **Rosser 型 Henkin 文**.

問い (Halbach and Visser (2013))

$\mathsf{Pr}_T^R(x)$ は独立な **Rosser 型 Henkin 文**をもつか？

命題

任意の φ について,

- $T \vdash \varphi \Rightarrow \mathsf{PA} \vdash \mathsf{Pr}_T^R(\ulcorner \varphi \urcorner)$.
- $T \vdash \neg\varphi \Rightarrow \mathsf{PA} \vdash \neg\mathsf{Pr}_T^R(\ulcorner \varphi \urcorner)$.

$T \vdash \varphi$ または $T \vdash \neg\varphi$
$\Rightarrow \varphi$ は $\mathsf{Pr}_T^R(x)$ の **Rosser 型 Henkin 文**.

問い (Halbach and Visser (2013))

$\mathsf{Pr}_T^R(x)$ は独立な **Rosser 型 Henkin 文**をもつか?

答え

$\mathsf{Pr}_T^R(x)$ が独立な **Rosser 型 Henkin 文**をもつかどうかは, $\mathsf{Pr}_T^R(x)$ の選び方に依存する.

証明に用いた手法

証明は **Guaspari and Solovay の手法**で行った.

証明に用いた手法

証明は **Guaspari and Solovay の手法**で行った.

Guaspari and Solovay の手法 (1979)

与えられた証明述語 $\mathsf{Prf}_T(x, y)$ の超準的な証明を並べ替え，新たな証明述語 $\mathsf{Prf}'_T(x, y)$ を構成する手法.

証明に用いた手法

証明は **Guaspari and Solovay の手法**で行った.

Guaspari and Solovay の手法 (1979)

与えられた証明述語 $\mathsf{Prf}_T(x, y)$ の超準的な証明を並べ替え，新たな証明述語 $\mathsf{Prf}'_T(x, y)$ を構成する手法.

$$\text{証明述語} \quad \Big| \quad \mathsf{Prf}_T(x, y) \xRightarrow{\text{作り変える}} \mathsf{Prf}'_T(x, y)$$

証明に用いた手法

証明は **Guaspari and Solovay の手法**で行った.

Guaspari and Solovay の手法 (1979)

与えられた証明述語 $\mathsf{Prf}_T(x, y)$ の超準的な証明を並べ替え，新たな証明述語 $\mathsf{Prf}'_T(x, y)$ を構成する手法.

証明述語	$\mathsf{Prf}_T(x, y)$	$\xRightarrow{\text{作り変える}}$	$\mathsf{Prf}'_T(x, y)$
可証性述語	$\mathsf{Pr}_T(x)$	$\overset{\text{変わらず}}{\longleftrightarrow}$	$\mathsf{Pr}'_T(x)$

証明に用いた手法

証明は **Guaspari and Solovay の手法**で行った.

Guaspari and Solovay の手法 (1979)

与えられた証明述語 $\mathsf{Prf}_T(x, y)$ の超準的な証明を並べ替え，新たな証明述語 $\mathsf{Prf}'_T(x, y)$ を構成する手法.

証明述語	$\mathsf{Prf}_T(x, y)$	$\xRightarrow{\text{作り変える}}$	$\mathsf{Prf}'_T(x, y)$
可証性述語	$\mathsf{Pr}_T(x)$	$\overset{\text{変わらず}}{\longleftrightarrow}$	$\mathsf{Pr}'_T(x)$
Rosser 可証性述語	$\mathsf{Pr}^R_T(x)$	$\xRightarrow{\text{変化}}$	$\mathsf{Pr}'^R_T(x)$

証明に用いた手法

証明は **Guaspari and Solovay の手法**で行った.

Guaspari and Solovay の手法 (1979)

与えられた証明述語 $\mathsf{Prf}_T(x, y)$ の超準的な証明を並べ替え，新たな証明述語 $\mathsf{Prf}'_T(x, y)$ を構成する手法.

証明述語	$\mathsf{Prf}_T(x, y)$	$\overset{\text{作り変える}}{\Longrightarrow}$	$\mathsf{Prf}'_T(x, y)$
可証性述語	$\mathsf{Pr}_T(x)$	$\overset{\text{変わらず}}{\longleftrightarrow}$	$\mathsf{Pr}'_T(x)$
Rosser 可証性述語	$\mathsf{Pr}^R_T(x)$	$\overset{\text{変化}}{\Longrightarrow}$	$\mathsf{Pr}'^R_T(x)$

$\mathsf{Pr}'^R_T(x)$ が求める条件を満たすようにする.

独立な Rosser 型 Henkin 文をもつ Rosser 可証性述語

Rosser 型 Henkin 文の特徴付けを与えた.

独立な Rosser 型 Henkin 文をもつ Rosser 可証性述語

Rosser 型 Henkin 文の特徴付けを与えた.

定理 (K.)

任意の Σ_1 文 φ について，以下は同値:

独立な Rosser 型 Henkin 文をもつ Rosser 可証性述語

Rosser 型 Henkin 文の特徴付けを与えた.

定理 (K.)

任意の Σ_1 文 φ について，以下は同値:

1. ある Σ_1 文 ψ が存在して，
   - $\mathsf{PA} \vdash \neg\varphi \vee \neg\psi$,
   - $\mathsf{PA} \vdash \mathsf{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \vee \mathsf{Pr}_T(\ulcorner \neg\varphi \urcorner) \to \varphi \vee \psi$.

独立な Rosser 型 Henkin 文をもつ Rosser 可証性述語

Rosser 型 Henkin 文の特徴付けを与えた.

定理 (K.)

任意の Σ_1 文 φ について，以下は同値:

1. ある Σ_1 文 ψ が存在して,
   - $\mathsf{PA} \vdash \neg\varphi \lor \neg\psi$,
   - $\mathsf{PA} \vdash \mathsf{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \lor \mathsf{Pr}_T(\ulcorner \neg\varphi \urcorner) \to \varphi \lor \psi$.
2. ある証明述語 $\mathsf{Prf}'_T(x, y)$ が存在して,
   - $\mathsf{PA} \vdash \forall x(\mathsf{Pr}_T(x) \leftrightarrow \mathsf{Pr}'_T(x))$,
   - φ は $\mathsf{Pr}'^R_T(x)$ の **Rosser 型 Henkin 文**.

独立な Rosser 型 Henkin 文をもつ Rosser 可証性述語

Rosser 型 Henkin 文の特徴付けを与えた.

定理 (K.)

任意の Σ_1 文 φ について，以下は同値:

1. ある Σ_1 文 ψ が存在して，
   - $\mathsf{PA} \vdash \neg\varphi \lor \neg\psi$,
   - $\mathsf{PA} \vdash \mathsf{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \lor \mathsf{Pr}_T(\ulcorner \neg\varphi \urcorner) \to \varphi \lor \psi$.
2. ある証明述語 $\mathsf{Prf}'_T(x, y)$ が存在して，
   - $\mathsf{PA} \vdash \forall x(\mathsf{Pr}_T(x) \leftrightarrow \mathsf{Pr}'_T(x))$,
   - φ は $\mathsf{Pr}'^R_T(x)$ の **Rosser 型 Henkin** 文.

- **Arai(1990)** は **Rosser** 文について同様の特徴づけを与えている.

独立な Rosser 型 Henkin 文をもつ Rosser 可証性述語

Rosser 型 Henkin 文の特徴付けを与えた.

定理 (K.)

任意の Σ_1 文 φ について，以下は同値:

1. ある Σ_1 文 ψ が存在して，
   - $\mathsf{PA} \vdash \neg\varphi \lor \neg\psi$,
   - $\mathsf{PA} \vdash \mathsf{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \lor \mathsf{Pr}_T(\ulcorner \neg\varphi \urcorner) \to \varphi \lor \psi$.
2. ある証明述語 $\mathsf{Prf}'_T(x, y)$ が存在して，
   - $\mathsf{PA} \vdash \forall x(\mathsf{Pr}_T(x) \leftrightarrow \mathsf{Pr}'_T(x))$,
   - φ は $\mathsf{Pr}'^R_T(x)$ の **Rosser 型 Henkin** 文.

- **Arai(1990)** は **Rosser** 文について同様の特徴づけを与えている.
- $\mathsf{Pr}^R_T(x)$ の **Rosser** 文の否定は条件 1 を満たすので，次の系を得る.

独立な Rosser 型 Henkin 文をもつ Rosser 可証性述語

Rosser 型 Henkin 文の特徴付けを与えた.

定理 (K.)

任意の Σ_1 文 φ について，以下は同値:

1. ある Σ_1 文 ψ が存在して,
    - $\mathsf{PA} \vdash \neg\varphi \lor \neg\psi$,
    - $\mathsf{PA} \vdash \mathsf{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \lor \mathsf{Pr}_T(\ulcorner \neg\varphi \urcorner) \to \varphi \lor \psi$.
2. ある証明述語 $\mathsf{Prf}'_T(x, y)$ が存在して,
    - $\mathsf{PA} \vdash \forall x(\mathsf{Pr}_T(x) \leftrightarrow \mathsf{Pr}'_T(x))$,
    - φ は $\mathsf{Pr}'^R_T(x)$ の **Rosser 型 Henkin** 文.

- **Arai(1990)** は **Rosser** 文について同様の特徴づけを与えている.
- $\mathsf{Pr}^R_T(x)$ の **Rosser** 文の否定は条件 1 を満たすので，次の系を得る.

系

独立な **Rosser** 型 **Henkin** 文をもつような T の **Rosser** 可証性述語が存在する.

独立な Rosser 型 Henkin 文をもたない Rosser 可証性述語

一方，**Löb** の定理のアナロジーが成り立つような **Rosser** 可証性述語がある.

定理 (K.)

次を満たすような T の **Rosser** 可証性述語 $\mathsf{Pr}_T^R(x)$ が存在する：
任意の φ について，
$T \vdash \mathsf{Pr}_T^R(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \varphi$ ならば $(T \vdash \varphi$ または $T \vdash \neg\varphi)$.

独立な Rosser 型 Henkin 文をもたない Rosser 可証性述語

一方，**Löb** の定理のアナロジーが成り立つような **Rosser** 可証性述語がある．

定理 (K.)

次を満たすような T の **Rosser** 可証性述語 $\mathsf{Pr}^R_T(x)$ が存在する：
任意の φ について，
$T \vdash \mathsf{Pr}^R_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \varphi$ ならば $(T \vdash \varphi$ または $T \vdash \neg\varphi)$.

系

独立な **Rosser** 型 **Henkin** 文をもたないような T の **Rosser** 可証性述語が存在する．