算術の超準モデルにおける証明可能性 (菊池誠（神戸大学）との共同研究)

倉橋太志

木更津工業高等専門学校

千葉 logic seminar
千葉大学
2014 年 6 月 4 日

Contents

1. 準備
2. PA + $\mathrm{Con}_{\mathrm{PA}}$ のモデルにおける証明可能性
3. $0 = 1$ の証明に至るまで
4. PA + $\neg\mathrm{Con}_{\mathrm{PA}}$ のモデル

算術の標準モデル

$\mathcal{L}_A = (+, \times, 0, 1, <)$: 算術の言語

算術の標準モデル

$\mathcal{L}_A = (+, \times, 0, 1, <)$: 算術の言語
PA: ペアノ算術（算術の基本的な公理と帰納法公理を持つ $\mathcal{L}_A$-理論）

算術の標準モデル

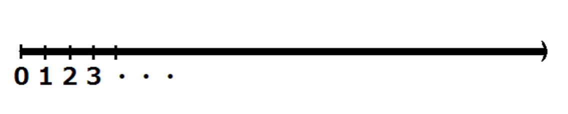
$\mathcal{L}_A = (+, \times, 0, 1, <)$: 算術の言語
PA: ペアノ算術（算術の基本的な公理と帰納法公理を持つ $\mathcal{L}_A$-理論）
$\mathbb{N}$: 算術の標準モデル（領域は自然数全体，$\mathcal{L}_A$ の記号を自然に解釈）

算術の標準モデル

$\mathcal{L}_A = (+, \times, 0, 1, <)$: 算術の言語

PA: ペアノ算術（算術の基本的な公理と帰納法公理を持つ $\mathcal{L}_A$-理論）

$\mathbb{N}$: 算術の標準モデル（領域は自然数全体，$\mathcal{L}_A$ の記号を自然に解釈）

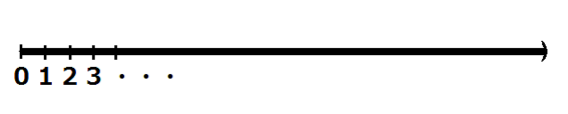


算術の標準モデル

$\mathcal{L}_A = (+, \times, 0, 1, <)$: 算術の言語

PA: ペアノ算術（算術の基本的な公理と帰納法公理を持つ $\mathcal{L}_A$-理論）

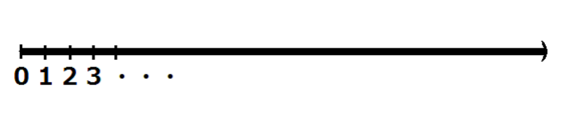
$\mathbb{N}$: 算術の標準モデル（領域は自然数全体，$\mathcal{L}_A$ の記号を自然に解釈）



TA $= \{\varphi \mid \mathbb{N} \models \varphi\}$: True Arithmetic

算術の標準モデル

$\mathcal{L}_A = (+, \times, 0, 1, <)$: 算術の言語
PA: ペアノ算術（算術の基本的な公理と帰納法公理を持つ $\mathcal{L}_A$-理論）
$\mathbb{N}$: 算術の標準モデル（領域は自然数全体，$\mathcal{L}_A$ の記号を自然に解釈）



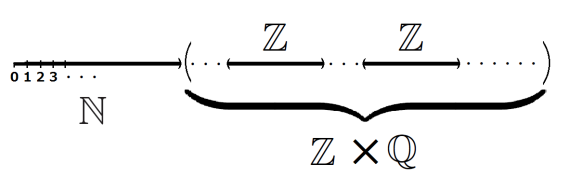
TA $= \{\varphi \mid \mathbb{N} \models \varphi\}$: True Arithmetic

$\mathbb{N}$ は **PA** や **TA** のモデル.

算術の超準モデル

PA や TA は超準モデル（$\mathbb{N}$ と同型でないモデル）をもつ.

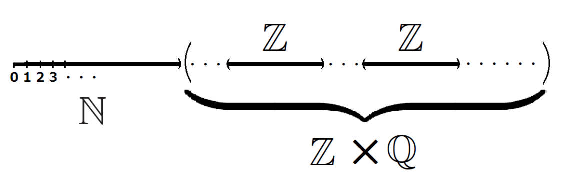
PA の可算超準モデルの順序構造



算術の超準モデル

PA や TA は超準モデル（$\mathbb{N}$ と同型でないモデル）をもつ.

PA の可算超準モデルの順序構造

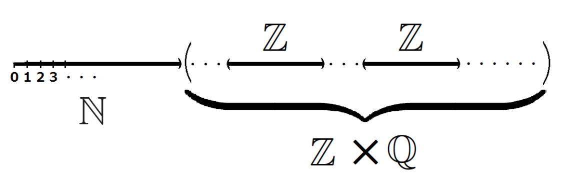


特に PA の超準モデル M は $\mathbb{N}$ の終拡大（$\mathbb{N} \subseteq_e M$）.

算術の超準モデル

PA や TA は超準モデル（$\mathbb{N}$ と同型でないモデル）をもつ.

PA の可算超準モデルの順序構造



特に PA の超準モデル M は $\mathbb{N}$ の終拡大（$\mathbb{N} \subseteq_e M$）.
つまり

1. $\mathbb{N} \subseteq M$ かつ
2. $\forall a \in \mathbb{N}\ \forall b \in M(M \models b < a \Rightarrow b \in \mathbb{N})$.

$0 = 1$ の証明をもつモデル

$\mathsf{Prf}(x, y)$ . . . “y は x の PA における証明” を表現する論理式

$0 = 1$ の証明をもつモデル

$\mathsf{Prf}(x, y) \ldots$ “y は x の PA における証明” を表現する論理式

$\mathsf{Pr}(x) :\equiv \exists y \mathsf{Prf}(x, y)$

$0 = 1$ の証明をもつモデル

$\mathrm{Prf}(x, y) \ldots$ “y は x の PA における証明” を表現する論理式

$\mathrm{Pr}(x) :\equiv \exists y \mathrm{Prf}(x, y)$（PA の可証性述語 … “$x$ は PA において証明可能”）

$0 = 1$ の証明をもつモデル

$\mathrm{Prf}(x, y) \ldots$ “y は x の PA における証明” を表現する論理式
$\mathrm{Pr}(x) :\equiv \exists y \mathrm{Prf}(x, y)$（PA の可証性述語 $\ldots$ “x は PA において証明可能”）
$\mathrm{Con}_{\mathrm{PA}} :\equiv \neg\mathrm{Pr}(\ulcorner 0 = 1 \urcorner) \ldots$ “PA は無矛盾”

$0 = 1$ の証明をもつモデル

$\mathrm{Prf}(x, y) \ldots$ “y は x の PA における証明” を表現する論理式
$\mathrm{Pr}(x) :\equiv \exists y \mathrm{Prf}(x, y)$（PA の可証性述語 . . . “$x$ は PA において証明可能”）
$\mathrm{Con}_{\mathrm{PA}} :\equiv \neg\mathrm{Pr}(\ulcorner 0 = 1 \urcorner) \ldots$ “PA は無矛盾”

第二不完全性定理

$\mathrm{PA} \nvdash \mathrm{Con}_{\mathrm{PA}}$

$0 = 1$ の証明をもつモデル

$\mathrm{Prf}(x, y) \ldots$ "y は x の PA における証明" を表現する論理式
$\mathrm{Pr}(x) :\equiv \exists y \mathrm{Prf}(x, y)$（PA の可証性述語 $\ldots$ "x は PA において証明可能"）
$\mathrm{Con}_{\mathrm{PA}} :\equiv \neg\mathrm{Pr}(\ulcorner 0 = 1 \urcorner) \ldots$ "PA は無矛盾"

第二不完全性定理

$\mathrm{PA} \nvdash \mathrm{Con}_{\mathrm{PA}}$

- PA + $\neg\mathrm{Con}_{\mathrm{PA}}$ は無矛盾なので完全性定理より PA + $\neg\mathrm{Con}_{\mathrm{PA}}$ のモデル M が存在.

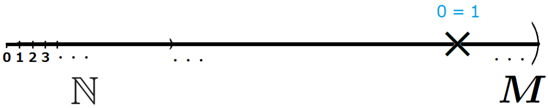
0 = 1 の証明をもつモデル

$\mathrm{Prf}(x, y) \ldots$ "y は x の PA における証明" を表現する論理式
$\mathrm{Pr}(x) :\equiv \exists y \mathrm{Prf}(x, y)$ (PA の可証性述語 ... "x は PA において証明可能")
$\mathrm{Con}_{\mathrm{PA}} :\equiv \neg\mathrm{Pr}(\ulcorner 0 = 1 \urcorner) \ldots$ "PA は無矛盾"

第二不完全性定理

$\mathrm{PA} \nvdash \mathrm{Con}_{\mathrm{PA}}$

- PA + $\neg\mathrm{Con}_{\mathrm{PA}}$ は無矛盾なので完全性定理より PA + $\neg\mathrm{Con}_{\mathrm{PA}}$ のモデル M が存在.
- $M \models \mathrm{Pr}(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$ なので



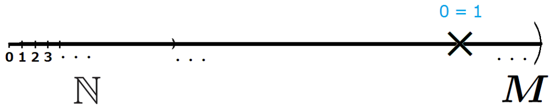
0 ＝ 1 の証明をもつモデル

$\mathrm{Prf}(x, y)$ . . . "y は x の PA における証明" を表現する論理式
$\mathrm{Pr}(x) :\equiv \exists y \mathrm{Prf}(x, y)$（PA の可証性述語 . . . "$x$ は PA において証明可能"）
$\mathrm{Con}_{\mathrm{PA}} :\equiv \neg\mathrm{Pr}(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$ . . . "PA は無矛盾"

第二不完全性定理

$\mathrm{PA} \nvdash \mathrm{Con}_{\mathrm{PA}}$

- PA ＋ $\neg\mathrm{Con}_{\mathrm{PA}}$ は無矛盾なので完全性定理より PA ＋ $\neg\mathrm{Con}_{\mathrm{PA}}$ のモデル M が存在.
- $M \models \mathrm{Pr}(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$ なので



- 0 ＝ 1 の証明はどのようにして得られた？

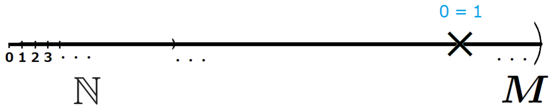
0 ＝ 1 の証明をもつモデル

$\mathsf{Prf}(x, y) \ldots$ “y は x の PA における証明” を表現する論理式
$\mathsf{Pr}(x) :\equiv \exists y \mathsf{Prf}(x, y)$（PA の可証性述語 . . . “$x$ は PA において証明可能”）
$\mathsf{Con}_{\mathsf{PA}} :\equiv \neg\mathsf{Pr}(\ulcorner 0 = 1 \urcorner) \ldots$ “PA は無矛盾”

第二不完全性定理

$\mathsf{PA} \nvdash \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}$

- PA ＋ $\neg\mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}$ は無矛盾なので完全性定理より PA ＋ $\neg\mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}$ のモデル M が存在.
- $M \models \mathsf{Pr}(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$ なので



- 0 ＝ 1 の証明はどのようにして得られた？
- 0 ＝ 1 の証明が得られるまでの状況（PA ＋ $\mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}$ のモデル）を調べる

1. 準備
2. PA $+$ Con$_{\mathsf{PA}}$ のモデルにおける証明可能性
3. $0 = 1$ の証明に至るまで
4. PA $+ \neg$Con$_{\mathsf{PA}}$ のモデル

超準モデルにおける証明可能性

定義

$M \models$ **PA** について

$$\mathbf{Thm}(M) := \{\varphi \mid \varphi \text{ は標準的 } \& M \models \mathbf{Pr}(\ulcorner\varphi\urcorner)\}.$$

超準モデルにおける証明可能性

定義

$M \models \mathsf{PA}$ について

$$\mathsf{Thm}(M) := \{\varphi \mid \varphi \text{ は標準的 } \& M \models \mathsf{Pr}(\ulcorner \varphi \urcorner)\}.$$

命題

1. $\mathsf{Thm}(\mathbb{N}) = \{\varphi \mid \mathsf{PA} \vdash \varphi\}$.

超準モデルにおける証明可能性

定義

$M \models$ PA について

$$\mathrm{Thm}(M) := \{\varphi \mid \varphi \text{ は標準的 } \& M \models \mathrm{Pr}(\ulcorner \varphi \urcorner)\}.$$

命題

1. $\mathrm{Thm}(\mathbb{N}) = \{\varphi \mid \mathrm{PA} \vdash \varphi\}$.
2. $M \subseteq_e N \Rightarrow \mathrm{Thm}(M) \subseteq \mathrm{Thm}(N)$.

超準モデルにおける証明可能性

定義

$M \models \mathsf{PA}$ について

$$\mathsf{Thm}(M) := \{\varphi \mid \varphi \text{ は標準的 } \& M \models \mathsf{Pr}(\ulcorner \varphi \urcorner)\}.$$

命題

1. $\mathsf{Thm}(\mathbb{N}) = \{\varphi \mid \mathsf{PA} \vdash \varphi\}$.
2. $M \subseteq_e N \Rightarrow \mathsf{Thm}(M) \subseteq \mathsf{Thm}(N)$.
3. $\mathsf{Thm}(\mathbb{N}) \subseteq \mathsf{Thm}(M)$.

超準モデルにおける証明可能性

定義

$M \models \mathsf{PA}$ について

$$\mathsf{Thm}(M) := \{\varphi \mid \varphi \text{ は標準的 } \& M \models \mathsf{Pr}(\ulcorner\varphi\urcorner)\}.$$

命題

1. $\mathsf{Thm}(\mathbb{N}) = \{\varphi \mid \mathsf{PA} \vdash \varphi\}$.
2. $M \subseteq_e N \Rightarrow \mathsf{Thm}(M) \subseteq \mathsf{Thm}(N)$.
3. $\mathsf{Thm}(\mathbb{N}) \subseteq \mathsf{Thm}(M)$.
4. $M \models \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}} \Leftrightarrow \exists\varphi$ s.t. $\varphi \notin \mathsf{Thm}(M)$.

超準モデルにおける証明可能性

定義

$M \models \mathsf{PA}$ について

$$\mathsf{Thm}(M) := \{\varphi \mid \varphi \text{ は標準的 } \& M \models \mathsf{Pr}(\ulcorner\varphi\urcorner)\}.$$

命題

1. $\mathsf{Thm}(\mathbb{N}) = \{\varphi \mid \mathsf{PA} \vdash \varphi\}$.
2. $M \subseteq_e N \Rightarrow \mathsf{Thm}(M) \subseteq \mathsf{Thm}(N)$.
3. $\mathsf{Thm}(\mathbb{N}) \subseteq \mathsf{Thm}(M)$.
4. $M \models \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}} \Leftrightarrow \exists\varphi$ s.t. $\varphi \notin \mathsf{Thm}(M)$.

質問

ア. $\mathsf{Thm}(\mathbb{N}) \subsetneq \mathsf{Thm}(M)$ となる $M \models \mathsf{PA} + \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}$ はある？

超準モデルにおける証明可能性

定義

$M \models \mathrm{PA}$ について

$$\mathrm{Thm}(M) := \{\varphi \mid \varphi \text{ は標準的 } \& M \models \mathrm{Pr}(\ulcorner \varphi \urcorner)\}.$$

命題

1. $\mathrm{Thm}(\mathbb{N}) = \{\varphi \mid \mathrm{PA} \vdash \varphi\}$.
2. $M \subseteq_e N \Rightarrow \mathrm{Thm}(M) \subseteq \mathrm{Thm}(N)$.
3. $\mathrm{Thm}(\mathbb{N}) \subseteq \mathrm{Thm}(M)$.
4. $M \models \mathrm{Con}_{\mathrm{PA}} \Leftrightarrow \exists \varphi$ s.t. $\varphi \notin \mathrm{Thm}(M)$.

質問

ア. $\mathrm{Thm}(\mathbb{N}) \subsetneq \mathrm{Thm}(M)$ となる $M \models \mathrm{PA} + \mathrm{Con}_{\mathrm{PA}}$ はある？

イ. $\mathrm{Thm}(\mathbb{N}) \subsetneq \mathrm{Thm}(M)$ の場合，どんな文が増えている？（真・偽？）

超準モデルにおける証明可能性

定義

$M \models \mathrm{PA}$ について

$$\mathrm{Thm}(M) := \{\varphi \mid \varphi \text{ は標準的 } \& M \models \mathrm{Pr}(\ulcorner \varphi \urcorner)\}.$$

命題

1. $\mathrm{Thm}(\mathbb{N}) = \{\varphi \mid \mathrm{PA} \vdash \varphi\}$.
2. $M \subseteq_e N \Rightarrow \mathrm{Thm}(M) \subseteq \mathrm{Thm}(N)$.
3. $\mathrm{Thm}(\mathbb{N}) \subseteq \mathrm{Thm}(M)$.
4. $M \models \mathrm{Con}_{\mathrm{PA}} \Leftrightarrow \exists \varphi$ s.t. $\varphi \notin \mathrm{Thm}(M)$.

質問

ア. $\mathrm{Thm}(\mathbb{N}) \subsetneq \mathrm{Thm}(M)$ となる $M \models \mathrm{PA} + \mathrm{Con}_{\mathrm{PA}}$ はある？

イ. $\mathrm{Thm}(\mathbb{N}) \subsetneq \mathrm{Thm}(M)$ の場合，どんな文が増えている？(真・偽？)

ウ. $\{\mathrm{Thm}(M) \mid M \models \mathrm{PA} + \mathrm{Con}_{\mathrm{PA}}\}$ の中で完全，極大なものは？

ア. $\mathsf{Thm}(\mathbb{N}) \subsetneq \mathsf{Thm}(M)$ となる $M \models \mathsf{PA} + \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}$ は？

ア. $\mathsf{Thm}(\mathbb{N}) \subsetneq \mathsf{Thm}(M)$ となる $M \models \mathsf{PA} + \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}$ は？

答え：ある

ア. $\mathsf{Thm}(\mathbb{N}) \subsetneq \mathsf{Thm}(M)$ となる $M \models \mathsf{PA} + \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}$ は？

答え：ある

事実

π: PA の Gödel 文とすると
$\mathsf{PA} \nvdash \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}} \to \neg\mathsf{Pr}(\ulcorner \neg\pi \urcorner)$.

ア. $\mathrm{Thm}(\mathbb{N}) \subsetneq \mathrm{Thm}(M)$ となる $M \models \mathrm{PA} + \mathrm{Con}_{\mathrm{PA}}$ は？

答え：ある

事実

π: PA の Gödel 文とすると
$\mathrm{PA} \nvdash \mathrm{Con}_{\mathrm{PA}} \to \neg\mathrm{Pr}(\ulcorner\neg\pi\urcorner)$.

Proof.

$\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Con}_{\mathrm{PA}} \to \neg\mathrm{Pr}(\ulcorner\neg\pi\urcorner)$ とすると

ア. $\mathsf{Thm}(\mathbb{N}) \subsetneq \mathsf{Thm}(M)$ となる $M \models \mathsf{PA} + \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}$ は？

答え：ある

事実

π: PA の Gödel 文とすると
$\mathsf{PA} \nvdash \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}} \to \neg\mathsf{Pr}(\ulcorner\neg\pi\urcorner)$.

Proof.

$\mathsf{PA} \vdash \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}} \to \neg\mathsf{Pr}(\ulcorner\neg\pi\urcorner)$ とすると
$\mathsf{PA} \vdash \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}} \leftrightarrow \pi$ なので

ア. $\mathsf{Thm}(\mathbb{N}) \subsetneq \mathsf{Thm}(M)$ となる $M \models \mathsf{PA} + \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}$ は？

答え：**ある**

事実

π: PA の Gödel 文とすると
$\mathsf{PA} \nvdash \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}} \to \neg\mathsf{Pr}(\ulcorner\neg\pi\urcorner)$.

Proof.

$\mathsf{PA} \vdash \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}} \to \neg\mathsf{Pr}(\ulcorner\neg\pi\urcorner)$ とすると
$\mathsf{PA} \vdash \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}} \leftrightarrow \pi$ なので
$\mathsf{PA} \vdash \pi \to \neg\mathsf{Pr}(\ulcorner\neg\pi\urcorner)$ つまり

ア. $\mathsf{Thm}(\mathbb{N}) \subsetneq \mathsf{Thm}(M)$ となる $M \models \mathsf{PA} + \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}$ は?

答え：ある

事実

π: PA の Gödel 文とすると
$\mathsf{PA} \nvdash \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}} \to \neg\mathsf{Pr}(\ulcorner \neg\pi \urcorner)$.

Proof.

$\mathsf{PA} \vdash \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}} \to \neg\mathsf{Pr}(\ulcorner \neg\pi \urcorner)$ とすると
$\mathsf{PA} \vdash \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}} \leftrightarrow \pi$ なので
$\mathsf{PA} \vdash \pi \to \neg\mathsf{Pr}(\ulcorner \neg\pi \urcorner)$ つまり
$\mathsf{PA} \vdash \mathsf{Pr}(\ulcorner \neg\pi \urcorner) \to \neg\pi$.

ア. $\mathrm{Thm}(\mathbb{N}) \subsetneq \mathrm{Thm}(M)$ となる $M \models \mathrm{PA} + \mathrm{Con}_{\mathrm{PA}}$ は？

答え：ある

事実

π: PA の Gödel 文とすると
$\mathrm{PA} \nvdash \mathrm{Con}_{\mathrm{PA}} \to \neg\mathrm{Pr}(\ulcorner\neg\pi\urcorner)$.

Proof.

$\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Con}_{\mathrm{PA}} \to \neg\mathrm{Pr}(\ulcorner\neg\pi\urcorner)$ とすると
$\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Con}_{\mathrm{PA}} \leftrightarrow \pi$ なので
$\mathrm{PA} \vdash \pi \to \neg\mathrm{Pr}(\ulcorner\neg\pi\urcorner)$ つまり
$\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Pr}(\ulcorner\neg\pi\urcorner) \to \neg\pi$.
Löb の定理より
$\mathrm{PA} \vdash \neg\pi$

ア. $\mathsf{Thm}(\mathbb{N}) \subsetneq \mathsf{Thm}(M)$ となる $M \models \mathsf{PA} + \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}$ は？

答え：ある

事実

π: PA の Gödel 文とすると
$\mathsf{PA} \nvdash \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}} \to \neg\mathsf{Pr}(\ulcorner \neg\pi \urcorner)$.

Proof.

$\mathsf{PA} \vdash \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}} \to \neg\mathsf{Pr}(\ulcorner \neg\pi \urcorner)$ とすると
$\mathsf{PA} \vdash \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}} \leftrightarrow \pi$ なので
$\mathsf{PA} \vdash \pi \to \neg\mathsf{Pr}(\ulcorner \neg\pi \urcorner)$ つまり
$\mathsf{PA} \vdash \mathsf{Pr}(\ulcorner \neg\pi \urcorner) \to \neg\pi$.
Löb の定理より
$\mathsf{PA} \vdash \neg\pi$
なので PA の Σ_1-健全性に反する（第一不完全性定理）. $\square$

ア. $\mathsf{Thm}(\mathbb{N}) \subsetneq \mathsf{Thm}(M)$ となる $M \models \mathsf{PA} + \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}$ は?

答え : ある

事実

π: PA の Gödel 文とすると
$\mathsf{PA} \nvdash \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}} \to \neg\mathsf{Pr}(\ulcorner \neg\pi \urcorner)$.

Proof.

$\mathsf{PA} \vdash \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}} \to \neg\mathsf{Pr}(\ulcorner \neg\pi \urcorner)$ とすると
$\mathsf{PA} \vdash \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}} \leftrightarrow \pi$ なので
$\mathsf{PA} \vdash \pi \to \neg\mathsf{Pr}(\ulcorner \neg\pi \urcorner)$ つまり
$\mathsf{PA} \vdash \mathsf{Pr}(\ulcorner \neg\pi \urcorner) \to \neg\pi$.
Löb の定理より
$\mathsf{PA} \vdash \neg\pi$
なので PA の Σ_1-健全性に反する(第一不完全性定理). □

完全性定理より $\mathsf{PA} + \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}} + \mathsf{Pr}(\ulcorner \neg\pi \urcorner)$ のモデル M がとれる.

ア．$\mathsf{Thm}(\mathbb{N}) \subsetneq \mathsf{Thm}(M)$ となる $M \models \mathsf{PA} + \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}$ は？

答え：ある

事実

π: PA の Gödel 文とすると
$\mathsf{PA} \nvdash \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}} \to \neg\mathsf{Pr}(\ulcorner\neg\pi\urcorner)$.

Proof.

$\mathsf{PA} \vdash \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}} \to \neg\mathsf{Pr}(\ulcorner\neg\pi\urcorner)$ とすると
$\mathsf{PA} \vdash \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}} \leftrightarrow \pi$ なので
$\mathsf{PA} \vdash \pi \to \neg\mathsf{Pr}(\ulcorner\neg\pi\urcorner)$ つまり
$\mathsf{PA} \vdash \mathsf{Pr}(\ulcorner\neg\pi\urcorner) \to \neg\pi$.
Löb の定理より
$\mathsf{PA} \vdash \neg\pi$
なので PA の Σ_1-健全性に反する（第一不完全性定理）. $\square$

完全性定理より $\mathsf{PA} + \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}} + \mathsf{Pr}(\ulcorner\neg\pi\urcorner)$ のモデル M がとれる.
$\neg\pi \notin \mathsf{Thm}(\mathbb{N})$ かつ $\neg\pi \in \mathsf{Thm}(M)$.

イ．$\mathrm{Thm}(\mathbb{N}) \subsetneq \mathrm{Thm}(M)$ の場合，どんな文が増えている？

イ．$\mathsf{Thm}(\mathbb{N}) \subsetneq \mathsf{Thm}(M)$ の場合，どんな文が増えている？

答え：真なものも偽なものも

イ．$\mathsf{Thm}(\mathbb{N}) \subsetneq \mathsf{Thm}(M)$ の場合，どんな文が増えている？

答え：真なものも偽なものも

定理

PA $\nvdash \varphi$ となる任意の φ について，
次を満たす Σ_1 文 σ と Π_1 文 π が存在する：

イ．$\mathrm{Thm}(\mathbb{N}) \subsetneq \mathrm{Thm}(M)$ の場合，どんな文が増えている？

答え：真なものも偽なものも

定理

PA $\nvdash \varphi$ となる任意の φ について，
次を満たす Σ_1 文 σ と Π_1 文 π が存在する：
1. PA $\nvdash \sigma$ かつ PA $\nvdash \pi$,

イ．$\mathrm{Thm}(\mathbb{N}) \subsetneq \mathrm{Thm}(M)$ の場合，どんな文が増えている？

答え：真なものも偽なものも

定理

PA $\nvdash \varphi$ となる任意の φ について，
次を満たす Σ_1 文 σ と Π_1 文 π が存在する：

1. PA $\nvdash \sigma$ かつ PA $\nvdash \pi$,
2. $\mathbb{N} \not\models \sigma$ かつ $\mathbb{N} \models \pi$,

イ．$\mathsf{Thm}(\mathbb{N}) \subsetneq \mathsf{Thm}(M)$ の場合，どんな文が増えている？

答え：真なものも偽なものも

定理

$\mathsf{PA} \nvdash \varphi$ となる任意の φ について，
次を満たす Σ_1 文 σ と Π_1 文 π が存在する：
1. $\mathsf{PA} \nvdash \sigma$ かつ $\mathsf{PA} \nvdash \pi$,
2. $\mathbb{N} \not\models \sigma$ かつ $\mathbb{N} \models \pi$,
3. $\mathsf{PA} \vdash \mathsf{Pr}(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathsf{Pr}(\ulcorner \sigma \urcorner) \land \mathsf{Pr}(\ulcorner \pi \urcorner)$.

イ．$\mathrm{Thm}(\mathbb{N}) \subsetneq \mathrm{Thm}(M)$ の場合，どんな文が増えている？

答え：真なものも偽なものも

定理

$\mathrm{PA} \nvdash \varphi$ となる任意の φ について，
次を満たす Σ_1 文 σ と Π_1 文 π が存在する：

1. $\mathrm{PA} \nvdash \sigma$ かつ $\mathrm{PA} \nvdash \pi$,
2. $\mathbb{N} \not\models \sigma$ かつ $\mathbb{N} \models \pi$,
3. $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Pr}(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathrm{Pr}(\ulcorner \sigma \urcorner) \land \mathrm{Pr}(\ulcorner \pi \urcorner)$.

Proof.

$\sigma \equiv \mathrm{Pr}(\ulcorner \varphi \urcorner)$ とすればよい．

イ．$\mathsf{Thm}(\mathbb{N}) \subsetneq \mathsf{Thm}(M)$ の場合，どんな文が増えている？

答え：真なものも偽なものも

定理

$\mathsf{PA} \nvdash \varphi$ となる任意の φ について，
次を満たす Σ_1 文 σ と Π_1 文 π が存在する：

1. $\mathsf{PA} \nvdash \sigma$ かつ $\mathsf{PA} \nvdash \pi$,
2. $\mathbb{N} \not\models \sigma$ かつ $\mathbb{N} \models \pi$,
3. $\mathsf{PA} \vdash \mathsf{Pr}(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathsf{Pr}(\ulcorner \sigma \urcorner) \land \mathsf{Pr}(\ulcorner \pi \urcorner)$.

Proof.

$\sigma \equiv \mathsf{Pr}(\ulcorner \varphi \urcorner)$ とすればよい．
π は次を満たす Π_1 文とすればよい：
$\mathsf{PA} \vdash \pi \leftrightarrow \forall y(\mathsf{Prf}(\ulcorner \varphi \urcorner, y) \to \exists z \leq y \mathsf{Prf}(\ulcorner \pi \urcorner, z))$. $\square$

イ．$\mathrm{Thm}(\mathbb{N}) \subsetneq \mathrm{Thm}(M)$ の場合，どんな文が増えている？

答え：真なものも偽なものも

定理

PA $\nvdash \varphi$ となる任意の φ について，
次を満たす Σ_1 文 σ と Π_1 文 π が存在する：

1. PA $\nvdash \sigma$ かつ PA $\nvdash \pi$,
2. $\mathbb{N} \not\models \sigma$ かつ $\mathbb{N} \models \pi$,
3. PA $\vdash \mathrm{Pr}(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathrm{Pr}(\ulcorner \sigma \urcorner) \land \mathrm{Pr}(\ulcorner \pi \urcorner)$.

Proof.

$\sigma \equiv \mathrm{Pr}(\ulcorner \varphi \urcorner)$ とすればよい．
π は次を満たす Π_1 文とすればよい：
PA $\vdash \pi \leftrightarrow \forall y(\mathrm{Prf}(\ulcorner \varphi \urcorner, y) \to \exists z \leq y \mathrm{Prf}(\ulcorner \pi \urcorner, z))$. □

$\mathrm{Thm}(\mathbb{N}) \subsetneq \mathrm{Thm}(M)$ のとき，$\mathrm{Thm}(M) \setminus \mathrm{Thm}(\mathbb{N})$ は真・偽 両方の文を含む．

ウ. $\{\mathsf{Thm}(M) \mid M \models \mathsf{PA} + \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}\}$ の中で完全，極大なものは？

ウ. $\{\mathsf{Thm}(M) \mid M \models \mathsf{PA} + \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}\}$ の中で完全，極大なものは？

答え：$\mathsf{Thm}(M)$ は不完全

ウ. $\{\mathrm{Thm}(M) \mid M \models \mathrm{PA} + \mathrm{Con}_{\mathrm{PA}}\}$ の中で完全，極大なものは？

答え：$\mathrm{Thm}(M)$ は不完全

事実

ρ: PA の Rosser 文
とすると
$\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Con}_{\mathrm{PA}} \to \neg\mathrm{Pr}(\ulcorner\rho\urcorner) \land \neg\mathrm{Pr}(\ulcorner\neg\rho\urcorner)$.

ウ. $\{\mathrm{Thm}(M) \mid M \models \mathrm{PA} + \mathrm{Con}_{\mathrm{PA}}\}$ の中で完全，極大なものは？

答え：**$\mathrm{Thm}(M)$ は不完全**

事実

ρ: PA の Rosser 文
とすると
$\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Con}_{\mathrm{PA}} \to \neg\mathrm{Pr}(\ulcorner\rho\urcorner) \land \neg\mathrm{Pr}(\ulcorner\neg\rho\urcorner)$.

$M \models \mathrm{PA} + \mathrm{Con}_{\mathrm{PA}}$ ならば $\rho, \neg\rho \notin \mathrm{Thm}(M)$.

ウ．$\{\mathsf{Thm}(M) \mid M \models \mathsf{PA} + \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}\}$ の中で完全，極大なものは？

ウ. $\{\mathsf{Thm}(M) \mid M \models \mathsf{PA} + \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}\}$ の中で完全，極大なものは？

答え：極大なものはある

ウ. $\{\mathsf{Thm}(M) \mid M \models \mathsf{PA} + \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}\}$ の中で完全，極大なものは？

答え：極大なものはある

定義

$M \models \mathsf{PA}$ は証明可能的極大

ウ. $\{\mathsf{Thm}(M) \mid M \models \mathsf{PA} + \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}\}$ の中で完全，極大なものは？

答え：極大なものはある

定義

$M \models \mathsf{PA}$ は証明可能的極大
$\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ 1. $M \models \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}$

ウ. $\{\mathsf{Thm}(M) \mid M \models \mathsf{PA} + \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}\}$ の中で完全，極大なものは？

答え：極大なものはある

定義

$M \models \mathsf{PA}$ は証明可能的極大

$\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ 1. $M \models \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}$

2. $\mathsf{Thm}(M) \subsetneq \mathsf{Thm}(N)$ となる $N \models \mathsf{PA} + \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}$ はない．

ウ. $\{\mathrm{Thm}(M) \mid M \models \mathrm{PA} + \mathrm{Con}_{\mathrm{PA}}\}$ の中で完全, 極大なものは？

答え：極大なものはある

定義

$M \models \mathrm{PA}$ は証明可能的極大

$\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ 1. $M \models \mathrm{Con}_{\mathrm{PA}}$

2. $\mathrm{Thm}(M) \subsetneq \mathrm{Thm}(N)$ となる $N \models \mathrm{PA} + \mathrm{Con}_{\mathrm{PA}}$ はない.

Proof.

$\{\varphi_i\}_{i\in\omega}$ を全ての文の枚挙とする.

ウ. $\{\mathsf{Thm}(M) \mid M \models \mathsf{PA} + \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}\}$ の中で完全，極大なものは？

答え：極大なものはある

定義

$M \models \mathsf{PA}$ は証明可能的極大

$\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ 1. $M \models \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}$

2. $\mathsf{Thm}(M) \subsetneq \mathsf{Thm}(N)$ となる $N \models \mathsf{PA} + \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}$ はない.

Proof.

$\{\varphi_i\}_{i\in\omega}$ を全ての文の枚挙とする.

$\mathsf{PA} + \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}$ の拡大理論の列 $\{T_i\}_{i\in\omega}$ を再帰的に定める：

ウ. $\{\mathrm{Thm}(M) \mid M \models \mathrm{PA} + \mathrm{Con}_{\mathrm{PA}}\}$ の中で完全，極大なものは？

答え：極大なものはある

定義

$M \models \mathrm{PA}$ は証明可能的極大

$\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ 1. $M \models \mathrm{Con}_{\mathrm{PA}}$

2. $\mathrm{Thm}(M) \subsetneq \mathrm{Thm}(N)$ となる $N \models \mathrm{PA} + \mathrm{Con}_{\mathrm{PA}}$ はない.

Proof.

$\{\varphi_i\}_{i\in\omega}$ を全ての文の枚挙とする.

$\mathrm{PA} + \mathrm{Con}_{\mathrm{PA}}$ の拡大理論の列 $\{T_i\}_{i\in\omega}$ を再帰的に定める：

$T_0 := \mathrm{PA} + \mathrm{Con}_{\mathrm{PA}}$

ウ. $\{\mathrm{Thm}(M) \mid M \models \mathrm{PA} + \mathrm{Con}_{\mathrm{PA}}\}$ の中で完全，極大なものは？

答え：極大なものはある

定義

$M \models \mathrm{PA}$ は証明可能的極大

$\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ 1. $M \models \mathrm{Con}_{\mathrm{PA}}$

2. $\mathrm{Thm}(M) \subsetneq \mathrm{Thm}(N)$ となる $N \models \mathrm{PA} + \mathrm{Con}_{\mathrm{PA}}$ はない.

Proof.

$\{\varphi_i\}_{i\in\omega}$ を全ての文の枚挙とする.

$\mathrm{PA} + \mathrm{Con}_{\mathrm{PA}}$ の拡大理論の列 $\{T_i\}_{i\in\omega}$ を再帰的に定める：

$T_0 := \mathrm{PA} + \mathrm{Con}_{\mathrm{PA}}$

$$T_{i+1} := \begin{cases} T_i + \mathrm{Pr}(\ulcorner \varphi_i \urcorner) & \text{この理論が無矛盾のとき} \\ T_i & \text{そうでないとき.} \end{cases}$$

ウ. $\{\mathrm{Thm}(M) \mid M \models \mathrm{PA} + \mathrm{Con}_{\mathrm{PA}}\}$ の中で完全，極大なものは？

答え：極大なものはある

定義

$M \models \mathrm{PA}$ は証明可能的極大

$\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ 1. $M \models \mathrm{Con}_{\mathrm{PA}}$

2. $\mathrm{Thm}(M) \subsetneq \mathrm{Thm}(N)$ となる $N \models \mathrm{PA} + \mathrm{Con}_{\mathrm{PA}}$ はない.

Proof.

$\{\varphi_i\}_{i\in\omega}$ を全ての文の枚挙とする.

$\mathrm{PA} + \mathrm{Con}_{\mathrm{PA}}$ の拡大理論の列 $\{T_i\}_{i\in\omega}$ を再帰的に定める：

$T_0 := \mathrm{PA} + \mathrm{Con}_{\mathrm{PA}}$

$$T_{i+1} := \begin{cases} T_i + \mathrm{Pr}(\ulcorner \varphi_i \urcorner) & \text{この理論が無矛盾のとき} \\ T_i & \text{そうでないとき.} \end{cases}$$

$T := \bigcup_{i\in\omega} T_i$ とすれば T は無矛盾であり，

T のモデルは証明可能的極大. $\square$

極大性について

事実（算術化された完全性定理）

$M \models \mathsf{PA}$ について，

$M \models \mathrm{Con}_{\mathsf{PA}+\varphi}$

$\Rightarrow \exists N \models \mathsf{PA}$ s.t. $M \subseteq_e N$ かつ $N \models \varphi \wedge \neg\mathrm{Con}_{\mathsf{PA}+\varphi}$.

極大性について

事実（算術化された完全性定理）

$M \models \mathsf{PA}$ について,
$M \models \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}+\varphi}$
$\Rightarrow \exists N \models \mathsf{PA}$ s.t. $M \subseteq_e N$ かつ $N \models \varphi \wedge \neg\mathsf{Con}_{\mathsf{PA}+\varphi}$.

$\mathsf{PA} + \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}$ のモデルは，のばすと $\mathsf{PA} + \neg\mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}$ のモデルにできる.

極大性について

事実（算術化された完全性定理）

$M \models$ PA について，
$M \models \mathrm{Con}_{\mathrm{PA}+\varphi}$
$\Rightarrow \exists N \models$ PA s.t. $M \subseteq_e N$ かつ $N \models \varphi \wedge \neg\mathrm{Con}_{\mathrm{PA}+\varphi}$.

PA $+$ Con$_{\mathrm{PA}}$ のモデルは，のばすと PA $+ \neg$Con$_{\mathrm{PA}}$ のモデルにできる．

事実（第二不完全性定理の形式化）

$\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Con}_{\mathrm{PA}} \to \mathrm{Con}_{\mathrm{PA}+\neg\mathrm{Con}_{\mathrm{PA}}}$.

極大性について

事実（算術化された完全性定理）

$M \models \mathsf{PA}$ について，
$M \models \mathrm{Con}_{\mathsf{PA}+\varphi}$
$\Rightarrow \exists N \models \mathsf{PA}$ s.t. $M \subseteq_e N$ かつ $N \models \varphi \wedge \neg\mathrm{Con}_{\mathsf{PA}+\varphi}$.

$\mathsf{PA} + \mathrm{Con}_{\mathsf{PA}}$ のモデルは，のばすと $\mathsf{PA} + \neg\mathrm{Con}_{\mathsf{PA}}$ のモデルにできる．

事実（第二不完全性定理の形式化）

$\mathsf{PA} \vdash \mathrm{Con}_{\mathsf{PA}} \rightarrow \mathrm{Con}_{\mathsf{PA}+\neg\mathrm{Con}_{\mathsf{PA}}}$.

$M \models \mathsf{PA} + \mathrm{Con}_{\mathsf{PA}}$

極大性について

事実（算術化された完全性定理）

$M \models \mathrm{PA}$ について,
$M \models \mathrm{Con}_{\mathrm{PA}+\varphi}$
$\Rightarrow \exists N \models \mathrm{PA}$ s.t. $M \subseteq_e N$ かつ $N \models \varphi \wedge \neg\mathrm{Con}_{\mathrm{PA}+\varphi}$.

PA + $\mathrm{Con}_{\mathrm{PA}}$ のモデルは，のばすと PA + $\neg\mathrm{Con}_{\mathrm{PA}}$ のモデルにできる.

事実（第二不完全性定理の形式化）

$\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Con}_{\mathrm{PA}} \to \mathrm{Con}_{\mathrm{PA}+\neg\mathrm{Con}_{\mathrm{PA}}}$.

$M \models \mathrm{PA} + \mathrm{Con}_{\mathrm{PA}}$
$\Rightarrow M \models \mathrm{PA} + \mathrm{Con}_{\mathrm{PA}+\neg\mathrm{Con}_{\mathrm{PA}}}$

極大性について

事実（算術化された完全性定理）

$M \models \mathsf{PA}$ について,
$M \models \mathrm{Con}_{\mathsf{PA}+\varphi}$
$\Rightarrow \exists N \models \mathsf{PA}$ s.t. $M \subseteq_e N$ かつ $N \models \varphi \land \neg\mathrm{Con}_{\mathsf{PA}+\varphi}$.

PA + $\mathrm{Con}_{\mathsf{PA}}$ のモデルは，のばすと PA + $\neg\mathrm{Con}_{\mathsf{PA}}$ のモデルにできる.

事実（第二不完全性定理の形式化）

$\mathsf{PA} \vdash \mathrm{Con}_{\mathsf{PA}} \rightarrow \mathrm{Con}_{\mathsf{PA}+\neg\mathrm{Con}_{\mathsf{PA}}}$.

$M \models \mathsf{PA} + \mathrm{Con}_{\mathsf{PA}}$
$\Rightarrow M \models \mathsf{PA} + \mathrm{Con}_{\mathsf{PA}+\neg\mathrm{Con}_{\mathsf{PA}}}$
$\Rightarrow \exists N \models \mathsf{PA}$ s.t. $M \subseteq_e N$ かつ $N \models \neg\mathrm{Con}_{\mathsf{PA}}$.

極大性について

$$\mathsf{Con}^2_{\mathsf{PA}} :\equiv \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}+\mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}}$$

極大性について

$$\mathbf{Con}^2_{\mathbf{PA}} :\equiv \mathbf{Con}_{\mathbf{PA}+\mathbf{Con}_{\mathbf{PA}}} \ (\leftrightarrow \neg\mathbf{Pr}(\ulcorner \neg\mathbf{Con}_{\mathbf{PA}} \urcorner))$$

極大性について

$$\mathsf{Con}^2_{\mathsf{PA}} :\equiv \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}+\mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}} \ (\leftrightarrow \neg\mathsf{Pr}(\ulcorner \neg\mathsf{Con}_{\mathsf{PA}} \urcorner))$$

$M \models \mathsf{PA} + \mathsf{Con}^2_{\mathsf{PA}}$

極大性について

$$\mathsf{Con}^2_{\mathsf{PA}} :\equiv \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}+\mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}} \ (\leftrightarrow \neg\mathsf{Pr}(\ulcorner \neg\mathsf{Con}_{\mathsf{PA}} \urcorner))$$

$M \models \mathsf{PA} + \mathsf{Con}^2_{\mathsf{PA}}$
$\Rightarrow \exists N \models \mathsf{PA}$ s.t. $M \subseteq_e N$ かつ $N \models \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}} \wedge \neg\mathsf{Con}^2_{\mathsf{PA}}$.

極大性について

$\mathrm{Con}^2_{\mathrm{PA}} :\equiv \mathrm{Con}_{\mathrm{PA}+\mathrm{Con}_{\mathrm{PA}}} \quad (\leftrightarrow \neg\mathrm{Pr}(\ulcorner \neg\mathrm{Con}_{\mathrm{PA}} \urcorner))$

$M \models \mathrm{PA} + \mathrm{Con}^2_{\mathrm{PA}}$
$\Rightarrow \exists N \models \mathrm{PA}$ s.t. $M \subseteq_e N$ かつ $N \models \mathrm{Con}_{\mathrm{PA}} \wedge \neg\mathrm{Con}^2_{\mathrm{PA}}$.

上記の M, N について
1. $\mathrm{Thm}(M) \subseteq \mathrm{Thm}(N)$

極大性について

$\mathrm{Con}^2_{\mathrm{PA}} :\equiv \mathrm{Con}_{\mathrm{PA}+\mathrm{Con}_{\mathrm{PA}}} \ (\leftrightarrow \neg\mathrm{Pr}(\ulcorner\neg\mathrm{Con}_{\mathrm{PA}}\urcorner))$

$M \models \mathrm{PA} + \mathrm{Con}^2_{\mathrm{PA}}$
$\Rightarrow \exists N \models \mathrm{PA}$ s.t. $M \subseteq_e N$ かつ $N \models \mathrm{Con}_{\mathrm{PA}} \wedge \neg\mathrm{Con}^2_{\mathrm{PA}}$.

上記の M, N について

1. $\mathrm{Thm}(M) \subseteq \mathrm{Thm}(N)$
2. $\neg\mathrm{Con}_{\mathrm{PA}} \notin \mathrm{Thm}(M)$ かつ $\neg\mathrm{Con}_{\mathrm{PA}} \in \mathrm{Thm}(N)$.

極大性について

$\mathrm{Con}^2_{\mathrm{PA}} :\equiv \mathrm{Con}_{\mathrm{PA}+\mathrm{Con}_{\mathrm{PA}}} \quad (\leftrightarrow \neg\mathrm{Pr}(\ulcorner \neg\mathrm{Con}_{\mathrm{PA}} \urcorner))$

$M \models \mathrm{PA} + \mathrm{Con}^2_{\mathrm{PA}}$
$\Rightarrow \exists N \models \mathrm{PA}$ s.t. $M \subseteq_e N$ かつ $N \models \mathrm{Con}_{\mathrm{PA}} \wedge \neg\mathrm{Con}^2_{\mathrm{PA}}$.

上記の M, N について

1. $\mathrm{Thm}(M) \subseteq \mathrm{Thm}(N)$
2. $\neg\mathrm{Con}_{\mathrm{PA}} \notin \mathrm{Thm}(M)$ かつ $\neg\mathrm{Con}_{\mathrm{PA}} \in \mathrm{Thm}(N)$.

よって

系

$M \models \mathrm{PA} + \mathrm{Con}^2_{\mathrm{PA}}$ ならば M は証明可能的極大でない.

極大性について

$\mathsf{Con}^2_{\mathsf{PA}} :\equiv \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}+\mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}}$ $(\leftrightarrow \neg\mathsf{Pr}(\ulcorner\neg\mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}\urcorner))$

$M \models \mathsf{PA} + \mathsf{Con}^2_{\mathsf{PA}}$
$\Rightarrow \exists N \models \mathsf{PA}$ s.t. $M \subseteq_e N$ かつ $N \models \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}} \wedge \neg\mathsf{Con}^2_{\mathsf{PA}}$.

上記の M, N について
1. $\mathsf{Thm}(M) \subseteq \mathsf{Thm}(N)$
2. $\neg\mathsf{Con}_{\mathsf{PA}} \notin \mathsf{Thm}(M)$ かつ $\neg\mathsf{Con}_{\mathsf{PA}} \in \mathsf{Thm}(N)$.

よって

系

$M \models \mathsf{PA} + \mathsf{Con}^2_{\mathsf{PA}}$ ならば M は証明可能的極大でない.

つまり，M が証明可能的極大ならば $M \models \mathsf{PA} + \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}} + \neg\mathsf{Con}^2_{\mathsf{PA}}$

極大性について

定理

証明可能的極大でない $M \models \mathsf{PA} + \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}} + \neg\mathsf{Con}^2_{\mathsf{PA}}$ が存在する.

極大性について

定理

証明可能的極大でない $M \models \mathsf{PA} + \mathrm{Con}_{\mathsf{PA}} + \neg\mathrm{Con}^2_{\mathsf{PA}}$ が存在する.

問題

どんな $M \models \mathsf{PA} + \mathrm{Con}_{\mathsf{PA}}$ もその終拡大に証明可能的極大なモデルをもつか？

極大性について

定理

証明可能的極大でない $M \models \mathsf{PA} + \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}} + \neg\mathsf{Con}^2_{\mathsf{PA}}$ が存在する.

問題

どんな $M \models \mathsf{PA} + \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}$ もその終拡大に証明可能的極大なモデルをもつか？

問題

証明可能的極大でないどんな $M \models \mathsf{PA} + \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}$ も
その終拡大に $\mathsf{Thm}(M) \subsetneq \mathsf{Thm}(N)$ となる $N \models \mathsf{PA} + \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}$ をもつか？

1. 準備
2. **PA $+$ Con$_{\mathrm{PA}}$ のモデルにおける証明可能性**
3. **$0 = 1$ の証明に至るまで**
4. **PA $+ \neg$Con$_{\mathrm{PA}}$ のモデル**

定理が徐々に増えていくモデル

M: **TA** の超準モデル

定理が徐々に増えていくモデル

M: TA の超準モデル
$\mathrm{Thm}(M) = \mathrm{Thm}(\mathbb{N})$.

定理が徐々に増えていくモデル

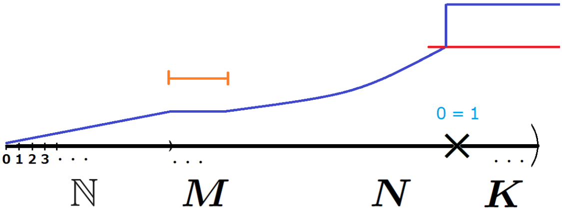
M: TA の超準モデル
$\mathrm{Thm}(M) = \mathrm{Thm}(\mathbb{N})$.
$M \models \mathrm{Con}^2_{\mathrm{PA}}$ なので，$\mathrm{Thm}(M) \subsetneq \mathrm{Thm}(N)$ となる終拡大
$N \models \mathrm{PA} + \mathrm{Con}_{\mathrm{PA}}$ をもつ.

定理が徐々に増えていくモデル

M: TA の超準モデル
$\mathrm{Thm}(M) = \mathrm{Thm}(\mathbb{N})$.
$M \models \mathrm{Con}^2_{\mathrm{PA}}$ なので，$\mathrm{Thm}(M) \subsetneq \mathrm{Thm}(N)$ となる終拡大
$N \models \mathrm{PA} + \mathrm{Con}_{\mathrm{PA}}$ をもつ.
N は終拡大 $K \models \mathrm{PA} + \neg\mathrm{Con}_{\mathrm{PA}}$ をもつ.

定理が徐々に増えていくモデル

M: TA の超準モデル
$\mathrm{Thm}(M) = \mathrm{Thm}(\mathbb{N})$.
$M \models \mathrm{Con}^2_{\mathrm{PA}}$ なので, $\mathrm{Thm}(M) \subsetneq \mathrm{Thm}(N)$ となる終拡大
$N \models \mathrm{PA} + \mathrm{Con_{PA}}$ をもつ.
N は終拡大 $K \models \mathrm{PA} + \neg\mathrm{Con_{PA}}$ をもつ.



いきなり 0 = 1 が証明できるモデル

定理（Solovay (1989)）（Hájek (1983), Krajíček and Pudlák (1989) ）

M: PA の超準モデル，　a: M の超準元　について

いきなり $0=1$ が証明できるモデル

定理（Solovay (1989)）（Hájek (1983), Krajíček and Pudlák (1989) ）

M: PA の超準モデル，　a: M の超準元　について
$\exists N \models \mathsf{PA}$ s.t. $M \restriction a \simeq N \restriction a$ かつ $N \models \exists y < 2^{2^a} \mathsf{Prf}(\ulcorner 0 = 1 \urcorner, y)$.

いきなり $0 = 1$ が証明できるモデル

定理（Solovay (1989)）（Hájek (1983), Krajíček and Pudlák (1989) ）

M: PA の超準モデル，　a: M の超準元　について
$\exists N \models \mathsf{PA}$ s.t. $M \restriction a \simeq N \restriction a$ かつ $N \models \exists y < 2^{2^a} \mathsf{Prf}(\ulcorner 0 = 1 \urcorner, y)$.

系

$\exists N \models \mathsf{PA} + \neg \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}$ s.t.
$\forall I \subseteq_e N (I \models \mathsf{PA} + \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}} \Rightarrow \mathsf{Thm}(I) = \mathsf{Thm}(\mathbb{N}))$.

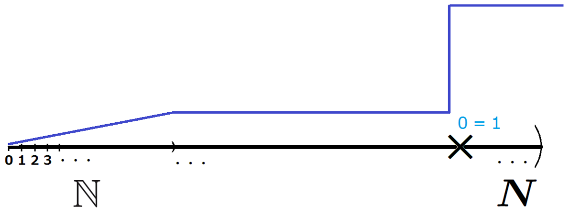
いきなり 0 = 1 が証明できるモデル

定理（Solovay (1989)）（Hájek (1983), Krajíček and Pudlák (1989) ）

M: PA の超準モデル, a: M の超準元 について
$\exists N \models \mathsf{PA}$ s.t. $M \upharpoonright a \simeq N \upharpoonright a$ かつ $N \models \exists y < 2^{2^a} \mathsf{Prf}(\ulcorner 0 = 1 \urcorner, y)$.

系

$\exists N \models \mathsf{PA} + \neg\mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}$ s.t.
$\forall I \subseteq_e N (I \models \mathsf{PA} + \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}} \Rightarrow \mathsf{Thm}(I) = \mathsf{Thm}(\mathbb{N}))$.



どんなに短くしても定理が増えているモデル

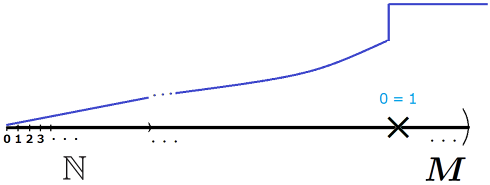
定理

$\exists M \models \mathsf{PA} + \neg\mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}$ s.t.
$\forall N \subseteq_e M(N$: PA の超準モデル $\Rightarrow \mathsf{Thm}(\mathbb{N}) \subsetneq \mathsf{Thm}(N))$.

どんなに短くしても定理が増えているモデル

定理

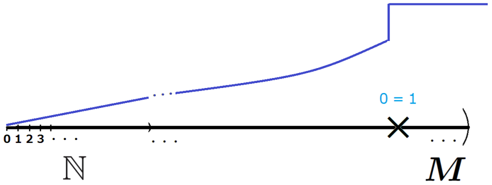
$\exists M \models \mathsf{PA} + \neg \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}$ s.t.
$\forall N \subseteq_e M (N$: PA の超準モデル $\Rightarrow \mathsf{Thm}(\mathbb{N}) \subsetneq \mathsf{Thm}(N))$.



どんなに短くしても定理が増えているモデル

定理

$\exists M \models \mathsf{PA} + \neg\mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}$ s.t.
$\forall N \subseteq_e M (N$: PA の超準モデル $\Rightarrow \mathsf{Thm}(\mathbb{N}) \subsetneq \mathsf{Thm}(N))$.



Omitting Types Theorem
(Model Theory - Chang and Keisler pp.79–81)
を用いて証明した.

1. 準備
2. PA + $\mathrm{Con}_{\mathrm{PA}}$ のモデルにおける証明可能性
3. $0 = 1$ の証明に至るまで
4. PA + $\neg\mathrm{Con}_{\mathrm{PA}}$ のモデル

ロッサー可証性述語

定義

- $\mathsf{Pr}^R(x) :\equiv \exists y(\mathsf{Prf}(x, y) \land \forall z \leq y \neg \mathsf{Prf}(\neg x, z))$

ロッサー可証性述語

定義

- $\mathrm{Pr}^R(x) :\equiv \exists y(\mathrm{Prf}(x, y) \land \forall z \leq y \neg \mathrm{Prf}(\neg x, z))$
- $\mathrm{Thm}^R(M) := \{\varphi \mid \varphi$ は標準的 & $M \models \mathrm{Pr}^R(\ulcorner \varphi \urcorner)\}$

ロッサー可証性述語

定義

- $\mathsf{Pr}^R(x) :\equiv \exists y(\mathsf{Prf}(x, y) \land \forall z \leq y \neg \mathsf{Prf}(\neg x, z))$
- $\mathsf{Thm}^R(M) := \{\varphi \mid \varphi$ は標準的 & $M \models \mathsf{Pr}^R(\ulcorner \varphi \urcorner)\}$

命題

$M \models \mathsf{PA} + \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}$ ならば $\mathsf{Thm}(M) = \mathsf{Thm}^R(M)$

ロッサー可証性述語

定義

- $\mathsf{Pr}^R(x) :\equiv \exists y(\mathsf{Prf}(x, y) \wedge \forall z \leq y \neg \mathsf{Prf}(\neg x, z))$
- $\mathsf{Thm}^R(M) := \{\varphi \mid \varphi$ は標準的 & $M \models \mathsf{Pr}^R(\ulcorner \varphi \urcorner)\}$

命題

$M \models \mathsf{PA} + \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}$ ならば $\mathsf{Thm}(M) = \mathsf{Thm}^R(M)$

$M \models \mathsf{PA} + \neg\mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}$ のとき
$M \models \mathsf{Pr}^R(\ulcorner \varphi \urcorner)$ とは

ロッサー可証性述語

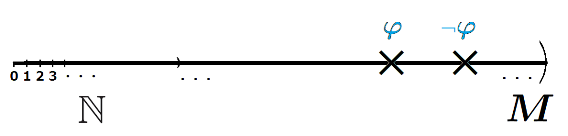
定義

- $\mathsf{Pr}^R(x) :\equiv \exists y(\mathsf{Prf}(x, y) \land \forall z \leq y \neg \mathsf{Prf}(\neg x, z))$
- $\mathsf{Thm}^R(M) := \{\varphi \mid \varphi$ は標準的 & $M \models \mathsf{Pr}^R(\ulcorner \varphi \urcorner)\}$

命題

$M \models \mathsf{PA} + \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}$ ならば $\mathsf{Thm}(M) = \mathsf{Thm}^R(M)$

$M \models \mathsf{PA} + \neg\mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}$ のとき
$M \models \mathsf{Pr}^R(\ulcorner \varphi \urcorner)$ とは



PA + ¬$\mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}$ におけるロッサー可証性述語

定理

次の条件を満たす $\mathsf{Prf}'(x, y)$ が存在する：

1. $\mathsf{PA} \vdash \forall x(\mathsf{Pr}(x) \leftrightarrow \exists y \mathsf{Prf}'(x, y))$
2. $\forall T$: PA の無矛盾な完全拡大
$\exists M \models \mathsf{PA} + \neg\mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}$ s.t. $\mathsf{Thm}'^{R}(M) = T$

PA + $\neg\mathrm{Con}_{\mathrm{PA}}$ におけるロッサー可証性述語

定理

次の条件を満たす $\mathrm{Prf}'(x, y)$ が存在する：

1. $\mathrm{PA} \vdash \forall x(\mathrm{Pr}(x) \leftrightarrow \exists y \mathrm{Prf}'(x, y))$
2. $\forall T$: PA の無矛盾な完全拡大
   $\exists M \models \mathrm{PA} + \neg\mathrm{Con}_{\mathrm{PA}}$ s.t. $\mathrm{Thm}'^R(M) = T$

次の条件を満たす $\mathrm{Pr}'^R(x, y)$ の存在を示すことが本質的：

1. $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Pr}'^R(\ulcorner \varphi \to \psi \urcorner) \to (\mathrm{Pr}'^R(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathrm{Pr}'^R(\ulcorner \psi \urcorner))$
2. $\mathrm{PA} \vdash \neg\mathrm{Pr}'^R(\ulcorner \varphi \urcorner) \Rightarrow \mathrm{PA} \vdash \neg\varphi$

PA + ¬Con$_{\mathsf{PA}}$ におけるロッサー可証性述語

定理

次の条件を満たす $\mathsf{Prf}'(x, y)$ が存在する：

1. $\mathsf{PA} \vdash \forall x(\mathsf{Pr}(x) \leftrightarrow \exists y \mathsf{Prf}'(x, y))$
2. $\forall T$: PA の無矛盾な完全拡大
   $\exists M \models \mathsf{PA} + \neg\mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}$ s.t. $\mathsf{Thm}'^R(M) = T$

次の条件を満たす $\mathsf{Pr}'^R(x, y)$ の存在を示すことが本質的：

1. $\mathsf{PA} \vdash \mathsf{Pr}'^R(\ulcorner \varphi \to \psi \urcorner) \to (\mathsf{Pr}'^R(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathsf{Pr}'^R(\ulcorner \psi \urcorner))$
2. $\mathsf{PA} \vdash \neg\mathsf{Pr}'^R(\ulcorner \varphi \urcorner) \Rightarrow \mathsf{PA} \vdash \neg\varphi$

T. Arai, "Derivability conditions on Rosser's provability predicates", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, Vol.31, No.4, 487–497(1990)

における，1 を満たす $\mathsf{Prf}'^R(x)$ の構成法を用いた.

いきなり $0 = 1$ が証明できるモデル

定理の $\mathrm{Prf}'(x, y)$ について,

$$\exists N \models \mathrm{PA} + \neg\mathrm{Con}_{\mathrm{PA}} \text{ s.t. } \mathrm{Thm}'^{R}(N) = \mathrm{TA}$$

いきなり $0 = 1$ が証明できるモデル

定理の $\mathsf{Prf}'(x, y)$ について，

$$\exists N \models \mathsf{PA} + \neg\mathsf{Con}_{\mathsf{PA}} \text{ s.t. } \mathsf{Thm}'^{R}(N) = \mathsf{TA}$$

系

$\exists N \models \mathsf{PA} + \neg\mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}$ s.t.
$\forall I \subseteq_e N(I \models \mathsf{PA} + \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}} \Rightarrow \mathsf{Thm}(I) = \mathsf{Thm}(\mathbb{N}))$.

いきなり $0=1$ が証明できるモデル

定理の $\mathrm{Prf}'(x,y)$ について，

$\exists N \models \mathrm{PA} + \neg\mathrm{Con}_{\mathrm{PA}}$ s.t. $\mathrm{Thm}'^{R}(N) = \mathrm{TA}$

系

$\exists N \models \mathrm{PA} + \neg\mathrm{Con}_{\mathrm{PA}}$ s.t.
$\forall I \subseteq_e N(I \models \mathrm{PA} + \mathrm{Con}_{\mathrm{PA}} \Rightarrow \mathrm{Thm}(I) = \mathrm{Thm}(\mathbb{N}))$.

Proof.

上記の $N \models \mathrm{PA} + \neg\mathrm{Con}_{\mathrm{PA}}$ をとる.

いきなり $0 = 1$ が証明できるモデル

定理の $\mathrm{Prf}'(x, y)$ について,

$\exists N \models \mathrm{PA} + \neg\mathrm{Con}_{\mathrm{PA}}$ s.t. $\mathrm{Thm}'^R(N) = \mathrm{TA}$

系

$\exists N \models \mathrm{PA} + \neg\mathrm{Con}_{\mathrm{PA}}$ s.t.
$\forall I \subseteq_e N (I \models \mathrm{PA} + \mathrm{Con}_{\mathrm{PA}} \Rightarrow \mathrm{Thm}(I) = \mathrm{Thm}(\mathbb{N}))$.

Proof.

上記の $N \models \mathrm{PA} + \neg\mathrm{Con}_{\mathrm{PA}}$ をとる.
$I \subseteq_e N$ が $I \models \mathrm{PA} + \mathrm{Con}_{\mathrm{PA}}$ かつ $\mathrm{Thm}(\mathbb{N}) \subsetneq \mathrm{Thm}(I)$ とする.

いきなり $0 = 1$ が証明できるモデル

定理の $\mathsf{Prf}'(x, y)$ について，

$$\exists N \models \mathsf{PA} + \neg\mathsf{Con}_{\mathsf{PA}} \text{ s.t. } \mathsf{Thm}'^{R}(N) = \mathsf{TA}$$

系

$\exists N \models \mathsf{PA} + \neg\mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}$ s.t.
$\forall I \subseteq_e N (I \models \mathsf{PA} + \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}} \Rightarrow \mathsf{Thm}(I) = \mathsf{Thm}(\mathbb{N}))$.

Proof.

上記の $N \models \mathsf{PA} + \neg\mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}$ をとる．
$I \subseteq_e N$ が $I \models \mathsf{PA} + \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}$ かつ $\mathsf{Thm}(\mathbb{N}) \subsetneq \mathsf{Thm}(I)$ とする．
$T \nvdash \sigma$ かつ $\mathbb{N} \not\models \sigma$ かつ $\sigma \in \mathsf{Thm}(I)$ となる σ がある．

いきなり $0 = 1$ が証明できるモデル

定理の $\mathrm{Prf}'(x, y)$ について，

$\exists N \models \mathrm{PA} + \neg\mathrm{Con}_{\mathrm{PA}}$ s.t. $\mathrm{Thm}'^{R}(N) = \mathrm{TA}$

系

$\exists N \models \mathrm{PA} + \neg\mathrm{Con}_{\mathrm{PA}}$ s.t.
$\forall I \subseteq_e N(I \models \mathrm{PA} + \mathrm{Con}_{\mathrm{PA}} \Rightarrow \mathrm{Thm}(I) = \mathrm{Thm}(\mathbb{N}))$.

Proof.

上記の $N \models \mathrm{PA} + \neg\mathrm{Con}_{\mathrm{PA}}$ をとる.
$I \subseteq_e N$ が $I \models \mathrm{PA} + \mathrm{Con}_{\mathrm{PA}}$ かつ $\mathrm{Thm}(\mathbb{N}) \subsetneq \mathrm{Thm}(I)$ とする.
$T \nvdash \sigma$ かつ $\mathbb{N} \not\models \sigma$ かつ $\sigma \in \mathrm{Thm}(I)$ となる σ がある.
よって $I \models \mathrm{Pr}(\ulcorner\sigma\urcorner) \wedge \neg\mathrm{Pr}(\ulcorner\neg\sigma\urcorner)$ なので

いきなり $0 = 1$ が証明できるモデル

定理の $\mathrm{Prf}'(x, y)$ について，

$$\exists N \models \mathrm{PA} + \neg\mathrm{Con_{PA}} \text{ s.t. } \mathrm{Thm}'^{R}(N) = \mathrm{TA}$$

系

$\exists N \models \mathrm{PA} + \neg\mathrm{Con_{PA}}$ s.t.
$\forall I \subseteq_e N (I \models \mathrm{PA} + \mathrm{Con_{PA}} \Rightarrow \mathrm{Thm}(I) = \mathrm{Thm}(\mathbb{N}))$.

Proof.

上記の $N \models \mathrm{PA} + \neg\mathrm{Con_{PA}}$ をとる．
$I \subseteq_e N$ が $I \models \mathrm{PA} + \mathrm{Con_{PA}}$ かつ $\mathrm{Thm}(\mathbb{N}) \subsetneq \mathrm{Thm}(I)$ とする．
$T \nvdash \sigma$ かつ $\mathbb{N} \not\models \sigma$ かつ $\sigma \in \mathrm{Thm}(I)$ となる σ がある．
よって $I \models \mathrm{Pr}(\ulcorner\sigma\urcorner) \land \neg\mathrm{Pr}(\ulcorner\neg\sigma\urcorner)$ なので
$I \models \mathrm{Pr}'(\ulcorner\sigma\urcorner) \land \neg\mathrm{Pr}'(\ulcorner\neg\sigma\urcorner)$.

いきなり $0 = 1$ が証明できるモデル

定理の $\mathsf{Prf}'(x, y)$ について,

$\exists N \models \mathsf{PA} + \neg\mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}$ s.t. $\mathsf{Thm}'^{R}(N) = \mathsf{TA}$

系

$\exists N \models \mathsf{PA} + \neg\mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}$ s.t.
$\forall I \subseteq_e N (I \models \mathsf{PA} + \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}} \Rightarrow \mathsf{Thm}(I) = \mathsf{Thm}(\mathbb{N}))$.

Proof.

上記の $N \models \mathsf{PA} + \neg\mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}$ をとる.
$I \subseteq_e N$ が $I \models \mathsf{PA} + \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}$ かつ $\mathsf{Thm}(\mathbb{N}) \subsetneq \mathsf{Thm}(I)$ とする.
$T \nvdash \sigma$ かつ $\mathbb{N} \not\models \sigma$ かつ $\sigma \in \mathsf{Thm}(I)$ となる σ がある.
よって $I \models \mathsf{Pr}(\ulcorner \sigma \urcorner) \land \neg\mathsf{Pr}(\ulcorner \neg\sigma \urcorner)$ なので
$I \models \mathsf{Pr}'(\ulcorner \sigma \urcorner) \land \neg\mathsf{Pr}'(\ulcorner \neg\sigma \urcorner)$.
つまり $I \models \mathsf{Pr}'^{R}(\ulcorner \sigma \urcorner)$.

いきなり $0 = 1$ が証明できるモデル

定理の $\mathsf{Prf}'(x, y)$ について,

$$\exists N \models \mathsf{PA} + \neg\mathsf{Con}_{\mathsf{PA}} \text{ s.t. } \mathsf{Thm}'^{R}(N) = \mathsf{TA}$$

系

$\exists N \models \mathsf{PA} + \neg\mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}$ s.t.
$\forall I \subseteq_e N(I \models \mathsf{PA} + \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}} \Rightarrow \mathsf{Thm}(I) = \mathsf{Thm}(\mathbb{N}))$.

Proof.

上記の $N \models \mathsf{PA} + \neg\mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}$ をとる.
$I \subseteq_e N$ が $I \models \mathsf{PA} + \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}$ かつ $\mathsf{Thm}(\mathbb{N}) \subsetneq \mathsf{Thm}(I)$ とする.
$T \nvdash \sigma$ かつ $\mathbb{N} \not\models \sigma$ かつ $\sigma \in \mathsf{Thm}(I)$ となる σ がある.
よって $I \models \mathsf{Pr}(\ulcorner\sigma\urcorner) \land \neg\mathsf{Pr}(\ulcorner\neg\sigma\urcorner)$ なので
$I \models \mathsf{Pr}'(\ulcorner\sigma\urcorner) \land \neg\mathsf{Pr}'(\ulcorner\neg\sigma\urcorner)$.
つまり $I \models \mathsf{Pr}'^{R}(\ulcorner\sigma\urcorner)$.
$I \subseteq_e N$ なので $N \models \mathsf{Pr}'^{R}(\ulcorner\sigma\urcorner)$.

いきなり $0=1$ が証明できるモデル

定理の $\mathsf{Prf}'(x,y)$ について,

$\exists N \models \mathsf{PA} + \neg\mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}$ s.t. $\mathsf{Thm}'^{R}(N) = \mathsf{TA}$

系

$\exists N \models \mathsf{PA} + \neg\mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}$ s.t.
$\forall I \subseteq_e N(I \models \mathsf{PA} + \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}} \Rightarrow \mathsf{Thm}(I) = \mathsf{Thm}(\mathbb{N}))$.

Proof.

上記の $N \models \mathsf{PA} + \neg\mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}$ をとる.
$I \subseteq_e N$ が $I \models \mathsf{PA} + \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}$ かつ $\mathsf{Thm}(\mathbb{N}) \subsetneq \mathsf{Thm}(I)$ とする.
$T \nvdash \sigma$ かつ $\mathbb{N} \not\models \sigma$ かつ $\sigma \in \mathsf{Thm}(I)$ となる σ がある.
よって $I \models \mathsf{Pr}(\ulcorner\sigma\urcorner) \land \neg\mathsf{Pr}(\ulcorner\neg\sigma\urcorner)$ なので
$I \models \mathsf{Pr}'(\ulcorner\sigma\urcorner) \land \neg\mathsf{Pr}'(\ulcorner\neg\sigma\urcorner)$.
つまり $I \models \mathsf{Pr}'^{R}(\ulcorner\sigma\urcorner)$.
$I \subseteq_e N$ なので $N \models \mathsf{Pr}'^{R}(\ulcorner\sigma\urcorner)$.
$\sigma \in \mathsf{Thm}'^{R}(N)$ なので $\sigma \in \mathsf{TA}$ となりおかしい. $\square$