

Yablo の逆理の Rosser 可証性述語による形式化

倉橋太志

神戸大学 システム情報学研究科
日本学術振興会特別研究員

日本数学会 2013 年度秋季総合分科会
愛媛大学
2013 年 9 月 27 日

	Σ_1 -健全 (ω -無矛盾)	無矛盾
嘘つきの逆理	Gödel (1931)	Rosser (1936)
Yablo の逆理	Priest (1997)	?

Contents

- ① Gödel と Rosser の定理
- ② Yablo の逆理に基づく不完全性定理
- ③ Rosser 型の形式化

- ① Gödel と Rosser の定理
- ② Yablo の逆理に基づく不完全性定理
- ③ Rosser 型の形式化

Standard proof predicates

T : PA を含む算術の再帰的理論

Standard proof predicates

T : PA を含む算術の再帰的理論

$\ulcorner \varphi \urcorner$: 論理式 φ の Gödel 数の数項

Standard proof predicates

T : PA を含む算術の再帰的理論

$\ulcorner \varphi \urcorner$: 論理式 φ の Gödel 数の数項

定義

論理式 $\text{Prf}_T(x, y)$ は T の **standard proof predicate (s.p.p.)**

Standard proof predicates

T : PA を含む算術の再帰的理論

$\ulcorner \varphi \urcorner$: 論理式 φ の Gödel 数の数項

定義

論理式 $\text{Prf}_T(x, y)$ は T の **standard proof predicate (s.p.p.)**

$:\Leftrightarrow$

- $\text{Prf}_T(x, y)$ は Δ_1 論理式;

Standard proof predicates

T : PA を含む算術の再帰的理論

$\ulcorner \varphi \urcorner$: 論理式 φ の Gödel 数の数項

定義

論理式 $\text{Prf}_T(x, y)$ は T の **standard proof predicate (s.p.p.)**

$:\Leftrightarrow$

- $\text{Prf}_T(x, y)$ は Δ_1 論理式;
- $T \vdash \varphi \Leftrightarrow \exists p \in \omega \text{ s.t. } \mathbb{N} \models \text{Prf}_T(\ulcorner \varphi \urcorner, \bar{p})$;

Standard proof predicates

T : PA を含む算術の再帰的理論

$\ulcorner \varphi \urcorner$: 論理式 φ の Gödel 数の数項

定義

論理式 $\text{Prf}_T(x, y)$ は T の **standard proof predicate (s.p.p.)**

$:\Leftrightarrow$

- $\text{Prf}_T(x, y)$ は Δ_1 論理式;
- $T \vdash \varphi \Leftrightarrow \exists p \in \omega \text{ s.t. } \mathbb{N} \models \text{Prf}_T(\ulcorner \varphi \urcorner, \bar{p});$
- 論理式 $\text{Pr}_T(x) \equiv \exists y \text{Prf}_T(x, y)$ について,
 - $\text{PA} \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \rightarrow \psi \urcorner) \rightarrow (\text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner));$

Standard proof predicates

T : PA を含む算術の再帰的理論

$\ulcorner \varphi \urcorner$: 論理式 φ の Gödel 数の数項

定義

論理式 $\text{Prf}_T(x, y)$ は T の **standard proof predicate (s.p.p.)**

$:\Leftrightarrow$

- $\text{Prf}_T(x, y)$ は Δ_1 論理式;
- $T \vdash \varphi \Leftrightarrow \exists p \in \omega \text{ s.t. } \mathbb{N} \models \text{Prf}_T(\ulcorner \varphi \urcorner, \bar{p});$
- 論理式 $\text{Pr}_T(x) \equiv \exists y \text{Prf}_T(x, y)$ について,
 - $\text{PA} \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \rightarrow \psi \urcorner) \rightarrow (\text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner));$
 - $\varphi \in \Sigma_1 \Rightarrow \text{PA} \vdash \varphi \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner).$

Standard proof predicates

T : PA を含む算術の再帰的理論

$\ulcorner \varphi \urcorner$: 論理式 φ の Gödel 数の数項

定義

論理式 $\text{Prf}_T(x, y)$ は T の **standard proof predicate (s.p.p.)**

$:\Leftrightarrow$

- $\text{Prf}_T(x, y)$ は Δ_1 論理式;
- $T \vdash \varphi \Leftrightarrow \exists p \in \omega \text{ s.t. } \mathbb{N} \models \text{Prf}_T(\ulcorner \varphi \urcorner, \bar{p})$;
- 論理式 $\text{Pr}_T(x) \equiv \exists y \text{Prf}_T(x, y)$ について,
 - $\text{PA} \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \rightarrow \psi \urcorner) \rightarrow (\text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner))$;
 - $\varphi \in \Sigma_1 \Rightarrow \text{PA} \vdash \varphi \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$.

Gödel は各 T に対する s.p.p. を具体的に構成した.

Gödel と Rosser の不完全性定理

$\text{Prf}_T(x, y)$ を T の任意の s.p.p. とする.

Gödel と Rosser の不完全性定理

$\text{Prf}_T(x, y)$ を T の任意の s.p.p. とする.

- $\text{Pr}_T(x) \equiv \exists y \text{Prf}_T(x, y)$ (T の可証性述語)
- $\text{Pr}_T^R(x) \equiv \exists y (\text{Prf}_T(x, y) \wedge \forall z \leq y \neg \text{Prf}_T(\neg x, z))$
(T の Rosser 可証性述語)

Gödel と Rosser の不完全性定理

$\text{Prf}_T(x, y)$ を T の任意の s.p.p. とする.

- $\text{Pr}_T(x) \equiv \exists y \text{Prf}_T(x, y)$ (T の可証性述語)
- $\text{Pr}_T^R(x) \equiv \exists y (\text{Prf}_T(x, y) \wedge \forall z \leq y \neg \text{Prf}_T(\neg x, z))$
(T の Rosser 可証性述語)

定理 (Gödel, 1931)

$\text{PA} \vdash \varphi \leftrightarrow \neg \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$ を満たす任意の文 φ について,

- T : 無矛盾 $\Rightarrow T \not\vdash \varphi$;
- T : Σ_1 -健全 $\Rightarrow T \not\vdash \neg \varphi$.

Gödel と Rosser の不完全性定理

$\text{Prf}_T(x, y)$ を T の任意の s.p.p. とする.

- $\text{Pr}_T(x) \equiv \exists y \text{Prf}_T(x, y)$ (T の可証性述語)
- $\text{Pr}_T^R(x) \equiv \exists y (\text{Prf}_T(x, y) \wedge \forall z \leq y \neg \text{Prf}_T(\neg x, z))$
(T の Rosser 可証性述語)

定理 (Gödel, 1931)

$\text{PA} \vdash \varphi \leftrightarrow \neg \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$ を満たす任意の文 φ について,

- T : 無矛盾 $\Rightarrow T \not\models \varphi$;
- T : Σ_1 -健全 $\Rightarrow T \not\models \neg \varphi$.

T は Σ_1 -健全

$\Leftrightarrow \forall \varphi: \Sigma_1 \text{ 文 } (T \vdash \varphi \Rightarrow \mathbb{N} \models \varphi)$.

Gödel と Rosser の不完全性定理

$\text{Prf}_T(x, y)$ を T の任意の s.p.p. とする.

- $\text{Pr}_T(x) \equiv \exists y \text{Prf}_T(x, y)$ (T の可証性述語)
- $\text{Pr}_T^R(x) \equiv \exists y (\text{Prf}_T(x, y) \wedge \forall z \leq y \neg \text{Prf}_T(\neg x, z))$
(T の Rosser 可証性述語)

定理 (Gödel, 1931)

$\text{PA} \vdash \varphi \leftrightarrow \neg \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$ を満たす任意の文 φ について,

- T : 無矛盾 $\Rightarrow T \not\vdash \varphi$;
- T : Σ_1 -健全 $\Rightarrow T \not\vdash \neg \varphi$.

T は Σ_1 -健全

$\Leftrightarrow \forall \varphi: \Sigma_1 \text{ 文 } (T \vdash \varphi \Rightarrow \mathbb{N} \models \varphi)$.

定理 (Rosser, 1936)

$\text{PA} \vdash \psi \leftrightarrow \neg \text{Pr}_T^R(\ulcorner \psi \urcorner)$ を満たす任意の文 ψ について,

T : 無矛盾 $\Rightarrow T \not\vdash \psi$ かつ $T \not\vdash \neg \psi$.

Guaspari and Solovay の結果

定理 (Guaspari and Solovay, 1979)

- ① 同値でない2つの Rosser 文をもつような T の s.p.p. が存在する.

Guaspari and Solovay の結果

定理 (Guaspari and Solovay, 1979)

- ① 同値でない2つの Rosser 文をもつような T の s.p.p. が存在する.
- ② Rosser 文が全て同値な T の s.p.p. が存在する.

- ① Gödel と Rosser の定理
- ② **Yablo の逆理に基づく不完全性定理**
- ③ Rosser 型の形式化

Yablo の逆理

Yablo の逆理 (Yablo, 1993)

- $Y_0, Y_1, \dots, Y_n, \dots$ は次を満たす命題の無限列：
各 Y_i は “全ての $j > i$ について Y_j は偽” と主張.
- このとき Y_i の真偽は決定できない.

Yablo の逆理に基づく不完全性定理

Yablo の列の形式化

$Y(x)$ を次の同値性を満たす論理式とする：

$$\mathbf{PA} \vdash \forall x (Y(x) \leftrightarrow \forall y > x \neg \mathbf{Pr}_T(\ulcorner Y(\dot{y}) \urcorner)),$$

ここで y は $\mathbf{Pr}_T(\ulcorner Y(\dot{y}) \urcorner)$ において自由変数.

Yablo の逆理に基づく不完全性定理

Yablo の列の形式化

$Y(x)$ を次の同値性を満たす論理式とする：

$$\mathbf{PA} \vdash \forall x (Y(x) \leftrightarrow \forall y > x \neg \mathbf{Pr}_T(\ulcorner Y(\dot{y}) \urcorner)),$$

ここで y は $\mathbf{Pr}_T(\ulcorner Y(\dot{y}) \urcorner)$ において自由変数.

定理 (Priest, 1997)

- T : 無矛盾 $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, T \not\models Y(\bar{n})$.
- T : Σ_1 -健全 $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, T \not\models \neg Y(\bar{n})$.

Yablo の逆理に基づく不完全性定理

Yablo の列の形式化

$Y(x)$ を次の同値性を満たす論理式とする：

$$\mathbf{PA} \vdash \forall x (Y(x) \leftrightarrow \forall y > x \neg \mathbf{Pr}_T(\ulcorner Y(\dot{y}) \urcorner)),$$

ここで y は $\mathbf{Pr}_T(\ulcorner Y(\dot{y}) \urcorner)$ において自由変数.

定理 (Priest, 1997)

- T : 無矛盾 $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, T \not\models Y(\bar{n})$.
- T : Σ_1 -健全 $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, T \not\models \neg Y(\bar{n})$.

定理 (菊池・倉橋, 2011; Cieśliński and Urbaniak, 2012)

- 任意の $n \in \mathbb{N}$ について, $\mathbf{PA} \vdash Y(\bar{n}) \leftrightarrow \mathbf{Con}_T$.

Yablo の逆理に基づく不完全性定理

Yablo の列の形式化

$Y(x)$ を次の同値性を満たす論理式とする：

$$\mathbf{PA} \vdash \forall x (Y(x) \leftrightarrow \forall y > x \neg \mathbf{Pr}_T(\ulcorner Y(\dot{y}) \urcorner)),$$

ここで y は $\mathbf{Pr}_T(\ulcorner Y(\dot{y}) \urcorner)$ において自由変数.

定理 (Priest, 1997)

- T : 無矛盾 $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, T \not\models Y(\bar{n})$.
- T : Σ_1 -健全 $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, T \not\models \neg Y(\bar{n})$.

定理 (菊池・倉橋, 2011; Cieśliński and Urbaniak, 2012)

- 任意の $n \in \mathbb{N}$ について, $\mathbf{PA} \vdash Y(\bar{n}) \leftrightarrow \mathbf{Con}_T$.
- 任意の $m, n \in \mathbb{N}$ について, $\mathbf{PA} \vdash Y(\bar{m}) \leftrightarrow Y(\bar{n})$.

	Σ_1 -健全	無矛盾
嘘つきの逆理	$\text{Pr}_T(x)$	$\text{Pr}_T^R(x)$
Yablo の逆理	$\text{Pr}_T(x)$	$\text{Pr}_T^R(x)?$

	Σ_1 -健全	無矛盾
嘘つきの逆理	$\text{Pr}_T(x)$	$\text{Pr}_T^R(x)$
Yablo の逆理	$\text{Pr}_T(x)$	$\text{Pr}_T^R(x)?$

s.p.p. の取り方に依存する.

- ① Gödel と Rosser の定理
- ② Yablo の逆理
- ③ Rosser 型の形式化

Rosser 可証性述語を用いた Yablo の逆理の形式化

Yablo の逆理の Rosser 型の形式化

$Y^R(x)$ を次の同値性を満たす論理式とする：

$$\text{PA} \vdash \forall x (Y^R(x) \leftrightarrow \forall y > x \neg \text{Pr}_T^R(\ulcorner Y^R(\dot{y}) \urcorner)).$$

Rosser 可証性述語を用いた Yablo の逆理の形式化

Yablo の逆理の Rosser 型の形式化

$Y^R(x)$ を次の同値性を満たす論理式とする：

$$\text{PA} \vdash \forall x (Y^R(x) \leftrightarrow \forall y > x \neg \text{Pr}_T^R(\ulcorner Y^R(\dot{y}) \urcorner)).$$

- T : 無矛盾 $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, T \not\models Y^R(\bar{n})$.
- T : Σ_1 -健全 $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, T \not\models \neg Y^R(\bar{n})$.

Rosser 可証性述語を用いた Yablo の逆理の形式化

Yablo の逆理の Rosser 型の形式化

$Y^R(x)$ を次の同値性を満たす論理式とする：

$$\text{PA} \vdash \forall x (Y^R(x) \leftrightarrow \forall y > x \neg \text{Pr}_T^R(\ulcorner Y^R(y) \urcorner)).$$

- T : 無矛盾 $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, T \not\models Y^R(\bar{n})$.
- T : Σ_1 -健全 $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, T \not\models \neg Y^R(\bar{n})$.

Question

T : 無矛盾 $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, T \not\models \neg Y^R(\bar{n})$?

Rosser 可証性述語を用いた Yablo の逆理の形式化

Yablo の逆理の Rosser 型の形式化

$Y^R(x)$ を次の同値性を満たす論理式とする：

$$PA \vdash \forall x (Y^R(x) \leftrightarrow \forall y > x \neg \text{Pr}_T^R(\ulcorner Y^R(\dot{y}) \urcorner)).$$

- T : 無矛盾 $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, T \not\models Y^R(\bar{n})$.
- T : Σ_1 -健全 $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, T \not\models \neg Y^R(\bar{n})$.

Question

T : 無矛盾 $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, T \not\models \neg Y^R(\bar{n})$?

Answer

No.

T が無矛盾であるが Σ_1 -健全でないならば,
 $\neg Y^R(\bar{n})$ の証明可能性は s.p.p. の取り方に依存する.

主定理

定理 1

T : 無矛盾

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, T \not\models \neg Y^R(\bar{n})$ を満たす T の s.p.p. が存在する.

主定理

定理 1

T : 無矛盾

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, T \not\models \neg Y^R(\bar{n})$ を満たす T の s.p.p. が存在する.

定理 2

T : Σ_1 -健全でない

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, T \vdash \neg Y^R(\bar{n})$ を満たす T の s.p.p. が存在する.

主定理

定理 1

T : 無矛盾

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, T \not\models \neg Y^R(\bar{n})$ を満たす T の s.p.p. が存在する.

定理 2

T : Σ_1 -健全でない

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, T \vdash \neg Y^R(\bar{n})$ を満たす T の s.p.p. が存在する.

Gaspari and Solovay による手法を用いてこれらを証明.

$Y(\bar{n})$ の同値性

- 各 $Y^R(\bar{m})$ と $Y^R(\bar{n})$ ($m \neq n$) は同値か？ (Cieśliński and Urbaniak)

$Y(\bar{n})$ の同値性

- 各 $Y^R(\bar{m})$ と $Y^R(\bar{n})$ ($m \neq n$) は同値か？ (Cieśliński and Urbaniak)
- この問題に対して部分解を与えた:
文 $\forall x \forall y (Y^R(x) \leftrightarrow Y^R(y))$ の証明可能性は s.p.p. の取り方に依存する.

$Y(\bar{n})$ の同値性

- 各 $Y^R(\bar{m})$ と $Y^R(\bar{n})$ ($m \neq n$) は同値か？ (Cieśliński and Urbaniak)
- この問題に対して部分解を与えた:
文 $\forall x \forall y (Y^R(x) \leftrightarrow Y^R(y))$ の証明可能性は s.p.p. の取り方に依存する.

定理 3

- ④ $\text{PA} \vdash \forall x \forall y (Y^R(x) \leftrightarrow Y^R(y))$ を満たす T の s.p.p. が存在する.

$Y(\bar{n})$ の同値性

- 各 $Y^R(\bar{m})$ と $Y^R(\bar{n})$ ($m \neq n$) は同値か？ (Cieśliński and Urbaniak)
- この問題に対して部分解を与えた:
文 $\forall x \forall y (Y^R(x) \leftrightarrow Y^R(y))$ の証明可能性は s.p.p. の取り方に依存する.

定理 3

- ① $\text{PA} \vdash \forall x \forall y (Y^R(x) \leftrightarrow Y^R(y))$ を満たす T の s.p.p. が存在する.
- ② T : 無矛盾
 $\Rightarrow T \not\vdash \forall x \forall y (Y^R(x) \leftrightarrow Y^R(y))$ を満たす T の s.p.p. が存在する.

$Y(\bar{n})$ の同値性

- 各 $Y^R(\bar{m})$ と $Y^R(\bar{n})$ ($m \neq n$) は同値か？ (Cieśliński and Urbaniak)
- この問題に対して部分解を与えた:
文 $\forall x \forall y (Y^R(x) \leftrightarrow Y^R(y))$ の証明可能性は s.p.p. の取り方に依存する.

定理 3

- ① $\text{PA} \vdash \forall x \forall y (Y^R(x) \leftrightarrow Y^R(y))$ を満たす T の s.p.p. が存在する.
- ② T : 無矛盾
 $\Rightarrow T \not\vdash \forall x \forall y (Y^R(x) \leftrightarrow Y^R(y))$ を満たす T の s.p.p. が存在する.

Leach-Krouse も定理 3 の 1 を独立に証明

$Y(\bar{n})$ の同値性

- 各 $Y^R(\bar{m})$ と $Y^R(\bar{n})$ ($m \neq n$) は同値か？ (Cieśliński and Urbaniak)
- この問題に対して部分解を与えた:
文 $\forall x \forall y (Y^R(x) \leftrightarrow Y^R(y))$ の証明可能性は s.p.p. の取り方に依存する.

定理 3

- ① $\text{PA} \vdash \forall x \forall y (Y^R(x) \leftrightarrow Y^R(y))$ を満たす T の s.p.p. が存在する.
- ② T : 無矛盾
 $\Rightarrow T \not\vdash \forall x \forall y (Y^R(x) \leftrightarrow Y^R(y))$ を満たす T の s.p.p. が存在する.

Leach-Krouse も定理 3 の 1 を独立に証明

問題

$Y^R(0)$ と $Y^R(\bar{1})$ が同値でない T の s.p.p. は存在するか？