

$I\Sigma_i$ の可証性述語による述語様相論理

倉橋 太志

神戸大学 システム情報学研究科

2012 年 3 月 26 日

日本数学会 2012 年度年会 東京理科大学

背景

- 理論 T の可証性述語 $\text{Pr}_T(x)$ の様相演算子としてのふるまい (provability logic) を調べる.

背景

- 理論 T の可証性述語 $\text{Pr}_T(x)$ の様相演算子としてのふるまい (provability logic) を調べる.
- 命題様相論理：算術的完全性定理 (Solovay, 1976)

背景

- 理論 T の可証性述語 $\text{Pr}_T(x)$ の様相演算子としてのふるまい (provability logic) を調べる.
- 命題様相論理：算術的完全性定理 (Solovay, 1976)
- 述語様相論理：肯定的な結果はほぼ得られない (Montagna, 1984).

背景

- 理論 T の可証性述語 $\text{Pr}_T(x)$ の様相演算子としてのふるまい (provability logic) を調べる.
- 命題様相論理：算術的完全性定理 (Solovay, 1976)
- 述語様相論理：肯定的な結果はほぼ得られない (Montagna, 1984).
- 述語様相論理：理論 T の provability logic は可証性述語の作り方にも依存 (Artemov, 1986).

背景

- 理論 T の可証性述語 $\text{Pr}_T(x)$ の様相演算子としてのふるまい (provability logic) を調べる.
- 命題様相論理：算術的完全性定理 (Solovay, 1976)
- 述語様相論理：肯定的な結果はほぼ得られない (Montagna, 1984).
- 述語様相論理：理論 T の provability logic は可証性述語の作り方にも依存 (Artemov, 1986).

問題

- 述語様相論理において各理論の provability logic 間の関係はほとんど明らかではない.

背景

- 理論 T の可証性述語 $\text{Pr}_T(x)$ の様相演算子としてのふるまい (provability logic) を調べる.
- 命題様相論理: 算術的完全性定理 (Solovay, 1976)
- 述語様相論理: 肯定的な結果はほぼ得られない (Montagna, 1984).
- 述語様相論理: 理論 T の provability logic は可証性述語の作り方にも依存 (Artemov, 1986).

問題

- 述語様相論理において各理論の provability logic 間の関係はほとんど明らかではない.
- Peano 算術 (PA) の部分理論 IS_i に着目.

背景

- 理論 T の可証性述語 $\text{Pr}_T(x)$ の様相演算子としてのふるまい (provability logic) を調べる.
- 命題様相論理: 算術的完全性定理 (Solovay, 1976)
- 述語様相論理: 肯定的な結果はほぼ得られない (Montagna, 1984).
- 述語様相論理: 理論 T の provability logic は可証性述語の作り方にも依存 (Artemov, 1986).

問題

- 述語様相論理において各理論の provability logic 間の関係はほとんど明らかではない.
- Peano 算術 (PA) の部分理論 $\text{I}\Sigma_i$ に着目.

結果

- 異なる $i, j > 0$ については, 可証性述語の構成を考慮に入れても, $\text{I}\Sigma_i$ と $\text{I}\Sigma_j$ の provability logic には大きくギャップがある.

$T: \mathbf{I}\Sigma_1$ の再帰的拡大 $\mathcal{L}_A$ -理論 ($\mathcal{L}_A$: 算術の言語)

T : $\mathbf{I}\Sigma_1$ の再帰的拡大 $\mathcal{L}_A$ -理論 ($\mathcal{L}_A$: 算術の言語)

- 関係 ‘ x は T において証明可能’ を純粹に形式化して得られる Σ_1 論理式 $\text{Pr}_T(x)$ は以下の性質を満たす：

Necessitation $T \vdash \varphi \Rightarrow T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$.

Modus ponens $T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \rightarrow \psi \urcorner) \rightarrow (\text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner))$.

Löb $T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$.

Σ_1 -comp. φ : $\Sigma_1 \Rightarrow T \vdash \varphi \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$.

T : $\mathbf{I}\Sigma_1$ の再帰的拡大 $\mathcal{L}_A$ -理論 ($\mathcal{L}_A$: 算術の言語)

- 関係 ‘ x は T において証明可能’ を純粹に形式化して得られる Σ_1 論理式 $\text{Pr}_T(x)$ は以下の性質を満たす：

Necessitation $T \vdash \varphi \Rightarrow T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$.

Modus ponens $T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \rightarrow \psi \urcorner) \rightarrow (\text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner))$.

Löb $T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$.

Σ_1 -comp. φ : $\Sigma_1 \Rightarrow T \vdash \varphi \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$.

- この $\text{Pr}_T(x)$ を T の可証性述語という.

T : $\mathbf{I}\Sigma_1$ の再帰的拡大 $\mathcal{L}_A$ -理論 ($\mathcal{L}_A$: 算術の言語)

- 関係 ‘ x は T において証明可能’ を純粹に形式化して得られる Σ_1 論理式 $\text{Pr}_T(x)$ は以下の性質を満たす：

Necessitation $T \vdash \varphi \Rightarrow T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$.

Modus ponens $T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \rightarrow \psi \urcorner) \rightarrow (\text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner))$.

Löb $T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$.

Σ_1 -comp. φ : $\Sigma_1 \Rightarrow T \vdash \varphi \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$.

- この $\text{Pr}_T(x)$ を T の可証性述語という.

可証性述語の性質を様相論理を用いて調べる.

T : $\mathbf{I}\Sigma_1$ の再帰的拡大 $\mathcal{L}_A$ -理論, $\text{Pr}_T(x)$: T の可証性述語

T : $\mathbf{IS}_1$ の再帰的拡大 $\mathcal{L}_A$ -理論, $\text{Pr}_T(x)$: T の可証性述語
 $\mathbf{MF}$: 命題様相論理式全体の集合, $\text{Sent}_{\mathcal{L}_A}$: $\mathcal{L}_A$ -文全体の集合

T : $\mathbf{IS}_1$ の再帰的拡大 $\mathcal{L}_A$ -理論, $\text{Pr}_T(x)$: T の可証性述語

$\mathbf{MF}$: 命題様相論理式全体の集合, $\text{Sent}_{\mathcal{L}_A}$: $\mathcal{L}_A$ -文全体の集合

定義

- $* : \mathbf{MF} \rightarrow \text{Sent}_{\mathcal{L}_A}$ が **T -interpretation** であるとは, 以下の条件を満たすことをいう:
 - ① $*$ は論理結合子を保存する;
 - ② $\forall A$: 命題様相論理式, $(\Box A)^* \equiv \text{Pr}_T(\ulcorner A^* \urcorner)$.

T : $\mathbf{IS}_1$ の再帰的拡大 $\mathcal{L}_A$ -理論, $\text{Pr}_T(x)$: T の可証性述語

$\mathbf{MF}$: 命題様相論理式全体の集合, $\text{Sent}_{\mathcal{L}_A}$: $\mathcal{L}_A$ -文全体の集合

定義

- $* : \mathbf{MF} \rightarrow \text{Sent}_{\mathcal{L}_A}$ が **T -interpretation** であるとは, 以下の条件を満たすことをいう:
 - ① $*$ は論理結合子を保存する;
 - ② $\forall A$: 命題様相論理式, $(\Box A)^* \equiv \text{Pr}_T(\ulcorner A^* \urcorner)$.
- A : 命題様相論理式が **T -valid** である
 $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall * : T\text{-interpretation}, T \vdash A^*$.

T : $\mathbf{IS}_1$ の再帰的拡大 $\mathcal{L}_A$ -理論, $\text{Pr}_T(x)$: T の可証性述語
 $\mathbf{MF}$: 命題様相論理式全体の集合, $\text{Sent}_{\mathcal{L}_A}$: $\mathcal{L}_A$ -文全体の集合

定義

- $* : \mathbf{MF} \rightarrow \text{Sent}_{\mathcal{L}_A}$ が **T -interpretation** であるとは, 以下の条件を満たすことをいう:
 - ① $*$ は論理結合子を保存する;
 - ② $\forall A$: 命題様相論理式, $(\Box A)^* \equiv \text{Pr}_T(\ulcorner A^* \urcorner)$.
- A : 命題様相論理式が **T -valid** である
 $\stackrel{\text{def.}}{\iff} \forall * : T\text{-interpretation}, T \vdash A^*$.
- $\text{PL}(T) := \{A : A \text{ は } T\text{-valid}\}$
 $(T \text{ の } \textbf{provability logic}).$

T : $\mathbf{I}\Sigma_1$ の再帰的拡大 $\mathcal{L}_A$ -理論, $\text{Pr}_T(x)$: T の可証性述語
 $\mathbf{MF}$: 命題様相論理式全体の集合, $\text{Sent}_{\mathcal{L}_A}$: $\mathcal{L}_A$ -文全体の集合

定義

- $* : \mathbf{MF} \rightarrow \text{Sent}_{\mathcal{L}_A}$ が **T -interpretation** であるとは、以下の条件を満たすことをいう：
 - ① $*$ は論理結合子を保存する；
 - ② $\forall A$: 命題様相論理式, $(\Box A)^* \equiv \text{Pr}_T(\ulcorner A^* \urcorner)$.
- A : 命題様相論理式が **T -valid** である
 $\stackrel{\text{def.}}{\iff} \forall * : T\text{-interpretation}, T \vdash A^*$.
- $\text{PL}(T) := \{A : A \text{ は } T\text{-valid}\}$
 (T の **provability logic**).
- $\text{PL}(T)$ は決定可能？

T : $\mathbf{IS}_1$ の再帰的拡大 $\mathcal{L}_A$ -理論, $\text{Pr}_T(x)$: T の可証性述語
 $\mathbf{MF}$: 命題様相論理式全体の集合, $\text{Sent}_{\mathcal{L}_A}$: $\mathcal{L}_A$ -文全体の集合

定義

- $*$: $\mathbf{MF} \rightarrow \text{Sent}_{\mathcal{L}_A}$ が **T -interpretation** であるとは、以下の条件を満たすことをいう：
 - ① $*$ は論理結合子を保存する；
 - ② $\forall A$: 命題様相論理式, $(\Box A)^* \equiv \text{Pr}_T(\ulcorner A^* \urcorner)$.
- A : 命題様相論理式が **T -valid** である
 $\stackrel{\text{def.}}{\iff} \forall * : T\text{-interpretation}, T \vdash A^*$.
- $\text{PL}(T) := \{A : A \text{ は } T\text{-valid}\}$
 (T の **provability logic**).
- $\text{PL}(T)$ は決定可能？ T に依存？

GL: 可証性述語の **derivability conditions**, **Löb** の定理
に対応する公理や推論規則をもつ命題様相論理の体系

GL: 可証性述語の **derivability conditions**, **Löb** の定理
に対応する公理や推論規則をもつ命題様相論理の体系

定理 (Solovay, 1976)

T : $\mathbf{I}\Sigma_1$ の Σ_1 -健全な再帰的拡大理論

$\mathbf{PL}(T)$ は **GL** の定理全体の集合と一致する.

GL: 可証性述語の **derivability conditions**, **Löb** の定理
に対応する公理や推論規則をもつ命題様相論理の体系

定理 (Solovay, 1976)

T : $\mathbf{I}\Sigma_1$ の Σ_1 -健全な再帰的拡大理論

$\mathbf{PL}(T)$ は **GL** の定理全体の集合と一致する.

系

- **GL** の定理全体の集合は決定可能なので, $\mathbf{PL}(T)$ も決定可能.

GL: 可証性述語の **derivability conditions**, **Löb** の定理
に対応する公理や推論規則をもつ命題様相論理の体系

定理 (Solovay, 1976)

T : $\mathbf{I}\Sigma_1$ の Σ_1 -健全な再帰的拡大理論

$\mathbf{PL}(T)$ は **GL** の定理全体の集合と一致する.

系

- **GL** の定理全体の集合は決定可能なので, $\mathbf{PL}(T)$ も決定可能.
- $\mathbf{I}\Sigma_1$ の Σ_1 -健全なすべての再帰的拡大理論 T について
 $\mathbf{PL}(T)$ は一致する.

GL: 可証性述語の **derivability conditions**, **Löb** の定理
に対応する公理や推論規則をもつ命題様相論理の体系

定理 (Solovay, 1976)

T : $\mathbf{I}\Sigma_1$ の Σ_1 -健全な再帰的拡大理論

$\mathbf{PL}(T)$ は **GL** の定理全体の集合と一致する.

系

- **GL** の定理全体の集合は決定可能なので, $\mathbf{PL}(T)$ も決定可能.
- $\mathbf{I}\Sigma_1$ の Σ_1 -健全なすべての再帰的拡大理論 T について
 $\mathbf{PL}(T)$ は一致する.
- これらの結果を述語様相論理に拡張できるか?

GL: 可証性述語の **derivability conditions**, **Löb** の定理
に対応する公理や推論規則をもつ命題様相論理の体系

定理 (Solovay, 1976)

T : $\mathbf{I}\Sigma_1$ の Σ_1 -健全な再帰的拡大理論

$\mathbf{PL}(T)$ は **GL** の定理全体の集合と一致する.

系

- **GL** の定理全体の集合は決定可能なので, $\mathbf{PL}(T)$ も決定可能.
- $\mathbf{I}\Sigma_1$ の Σ_1 -健全なすべての再帰的拡大理論 T について
 $\mathbf{PL}(T)$ は一致する.
- これらの結果を述語様相論理に拡張できるか?
- **Montagna**: できない.

$\text{QPL}(T)$ を命題様相論理のときと同様に定義
(= 任意の T -interpretation に対して T で証明可能である述語様相論理式全体の集合)

$\text{QPL}(T)$ を命題様相論理のときと同様に定義
(= 任意の T -interpretation に対して T で証明可能である述語様相論理式全体の集合)

定理 (Montagna, 1984)

PA: Peano 算術, BG: Bernays-Gödel 集合論

① $\text{QPL}(\text{PA}) \not\subseteq \text{QPL}(\text{BG})$.

$\text{QPL}(T)$ を命題様相論理のときと同様に定義
(= 任意の T -interpretation に対して T で証明可能である述語様相論理式全体の集合)

定理 (Montagna, 1984)

PA: Peano 算術, BG: Bernays-Gödel 集合論

- ① $\text{QPL}(\text{PA}) \not\subseteq \text{QPL}(\text{BG})$.
- $\text{QPL}(T)$ は T に依存している.

$\text{QPL}(T)$ を命題様相論理のときと同様に定義
(= 任意の T -interpretation に対して T で証明可能である述語様相論理式全体の集合)

定理 (Montagna, 1984)

PA: Peano 算術, BG: Bernays-Gödel 集合論

① $\text{QPL}(\text{PA}) \not\subseteq \text{QPL}(\text{BG})$.

- $\text{QPL}(T)$ は T に依存している.
- $\text{QPL}(T)$ は T だけでなく, 他のものにも依存しているか?

$\text{QPL}(T)$ を命題様相論理のときと同様に定義
(= 任意の T -interpretation に対して T で証明可能である述語様相論理式全体の集合)

定理 (Montagna, 1984)

PA: Peano 算術, BG: Bernays-Gödel 集合論

① $\text{QPL}(\text{PA}) \not\subseteq \text{QPL}(\text{BG})$.

- $\text{QPL}(T)$ は T に依存している.
- $\text{QPL}(T)$ は T だけでなく, 他のものにも依存しているか?
- Artemov: $\text{Pr}_T(x)$ の作り方に依存している.

T : $\mathbf{IS}_1$ の拡大 $\mathcal{L}_A$ -理論

$T: \mathbf{IS}_1$ の拡大 $\mathcal{L}_A$ -理論

定義

- 論理式 $\alpha(x)$ が T の **binumeration** である
 $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall \varphi: \mathcal{L}_A\text{-文},$

$$\varphi \in T \Rightarrow T \vdash \alpha(\ulcorner \varphi \urcorner);$$

$$\varphi \notin T \Rightarrow T \vdash \neg \alpha(\ulcorner \varphi \urcorner).$$

$T: \mathbf{I}\Sigma_1$ の拡大 $\mathcal{L}_A$ -理論

定義

- 論理式 $\alpha(x)$ が T の **binumeration** である
 $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall \varphi: \mathcal{L}_A\text{-文},$

$$\varphi \in T \Rightarrow T \vdash \alpha(\ulcorner \varphi \urcorner);$$

$$\varphi \notin T \Rightarrow T \vdash \neg \alpha(\ulcorner \varphi \urcorner).$$

- 特に $\alpha(x)$ が Σ_1 論理式であるとき, $\alpha(x)$ を T の **Σ_1 binumeration** という.

$T: \text{I}\Sigma_1$ の拡大 $\mathcal{L}_A$ -理論

定義

- 論理式 $\alpha(x)$ が T の **binumeration** である
 $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall \varphi: \mathcal{L}_A\text{-文},$

$$\varphi \in T \Rightarrow T \vdash \alpha(\ulcorner \varphi \urcorner);$$

$$\varphi \notin T \Rightarrow T \vdash \neg \alpha(\ulcorner \varphi \urcorner).$$

- 特に $\alpha(x)$ が Σ_1 論理式であるとき, $\alpha(x)$ を T の **Σ_1 binumeration** という.
- T の **binumeration** とは, T において
 集合 $\{\ulcorner \varphi \urcorner : \varphi \in T\}$ を表現する論理式のこと.

$T: \mathbf{I}\Sigma_1$ の拡大 $\mathcal{L}_A$ -理論

定義

- 論理式 $\alpha(x)$ が T の **binumeration** である
 $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall \varphi: \mathcal{L}_A\text{-文},$

$$\varphi \in T \Rightarrow T \vdash \alpha(\ulcorner \varphi \urcorner);$$

$$\varphi \notin T \Rightarrow T \vdash \neg \alpha(\ulcorner \varphi \urcorner).$$

- 特に $\alpha(x)$ が Σ_1 論理式であるとき, $\alpha(x)$ を T の **Σ_1 binumeration** という.
- T の **binumeration** とは, T において
 集合 $\{\ulcorner \varphi \urcorner : \varphi \in T\}$ を表現する論理式のこと.
- T が再帰的理論 $\Rightarrow T$ の Σ_1 **binumeration** が存在する.

- 通常, T の可証性述語 $\text{Pr}_T(x)$ の構成の際に, どのような T の Σ_1 **binumeration** を用いたかは明記しない.

- 通常, T の可証性述語 $\text{Pr}_T(x)$ の構成の際に, どのような T の Σ_1 binumeration を用いたかは明記しない.
- T の Σ_1 binumeration $\alpha(x)$ を用いて構成した可証性述語を $\text{Pr}_\alpha(x)$ と書く.

- 通常, T の可証性述語 $\text{Pr}_T(x)$ の構成の際に, どのような T の Σ_1 **binumeration** を用いたかは明記しない.
- T の Σ_1 **binumeration** $\alpha(x)$ を用いて構成した可証性述語を $\text{Pr}_\alpha(x)$ と書く.
- $\text{QPL}(\alpha)$ を $\text{Pr}_\alpha(x)$ により定義される T の **provability logic** とする.

- 通常, T の可証性述語 $\text{Pr}_T(x)$ の構成の際に, どのような T の Σ_1 binumeration を用いたかは明記しない.
- T の Σ_1 binumeration $\alpha(x)$ を用いて構成した可証性述語を $\text{Pr}_\alpha(x)$ と書く.
- $\text{QPL}(\alpha)$ を $\text{Pr}_\alpha(x)$ により定義される T の provability logic とする.

定理 (Artemov, 1986)

T : PA の Σ_1 -健全な再帰的拡大理論.

$\forall \alpha(x)$: T の Σ_1 binumeration,

$\exists \beta(x)$: T の Σ_1 binumeration s.t.

$$\text{QPL}(\alpha) \not\subseteq \text{QPL}(\beta).$$

問題

- 各理論の $\text{QPL}(T)$ 間の関係はほとんど把握されていない.

問題

- 各理論の $\text{QPL}(T)$ 間の関係はほとんど把握されていない.
- 可証性述語の構成も考慮に入れた上での $\text{QPL}(\text{I}\Sigma_i)$ 間の関係は？

問題

- 各理論の $\text{QPL}(T)$ 間の関係はほとんど把握されていない.
- 可証性述語の構成も考慮に入れた上での $\text{QPL}(\mathbf{I}\Sigma_i)$ 間の関係は？

定理 1

$T: \mathbf{I}\Sigma_1$ の 無矛盾な再帰的拡大理論.

問題

- 各理論の $\text{QPL}(T)$ 間の関係はほとんど把握されていない.
- 可証性述語の構成も考慮に入れた上での $\text{QPL}(\mathbf{I}\Sigma_i)$ 間の関係は？

定理 1

$T: \mathbf{I}\Sigma_1$ の 無矛盾な再帰的拡大理論.

- $\forall \alpha(x): T$ の Σ_1 **binumeration**,
 $\exists \beta(x): T$ の Σ_1 **binumeration** s.t.

$$\text{QPL}(\alpha) \not\subseteq \text{QPL}(\beta).$$

問題

- 各理論の $\mathbf{QPL}(T)$ 間の関係はほとんど把握されていない.
- 可証性述語の構成も考慮に入れた上での $\mathbf{QPL}(\mathbf{I}\Sigma_i)$ 間の関係は？

定理 1

$T: \mathbf{I}\Sigma_1$ の 無矛盾な再帰的拡大理論.

- $\forall \alpha(x): T$ の Σ_1 **binumeration**,
 $\exists \beta(x): T$ の Σ_1 **binumeration** s.t.

$$\mathbf{QPL}(\alpha) \not\subseteq \mathbf{QPL}(\beta).$$

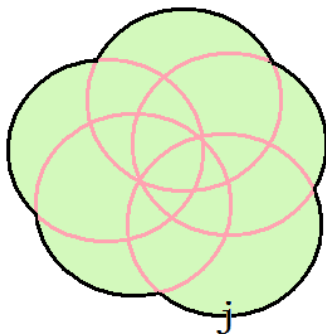
- $\forall \alpha(x): T$ の Σ_1 **binumeration**,
 $\exists \beta(x): T$ の Σ_1 **binumeration** s.t.

$$\mathbf{QPL}(\beta) \not\subseteq \mathbf{QPL}(\alpha).$$

定理 2

- $\forall i, j$: 非負自然数 ($i < j$),
 $\exists \alpha(x)$: $\mathbf{I}\Sigma_i$ のある r.a. の Σ_1 binumeration s.t.
 $\mathbf{QPL}(\alpha) \not\subseteq \bigcup \{ \mathbf{QPL}(\beta) \mid \beta(x): \mathbf{I}\Sigma_j \text{ のある r.a. の } \Sigma_1 \text{ binumeration} \}.$

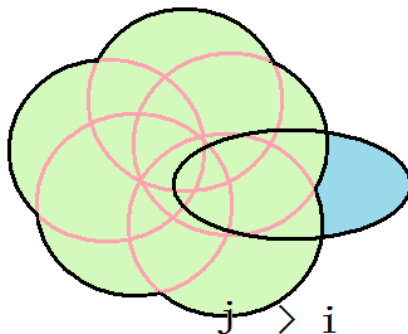
(r.a.: recursive axiomatization)



定理 2

- $\forall i, j$: 非負自然数 ($i < j$),
 $\exists \alpha(x)$: $\mathbf{I}\Sigma_i$ のある r.a. の Σ_1 binumeration s.t.
 $\mathbf{QPL}(\alpha) \not\subseteq \bigcup \{ \mathbf{QPL}(\beta) \mid \beta(x): \mathbf{I}\Sigma_j \text{ のある r.a. の } \Sigma_1 \text{ binumeration} \}.$

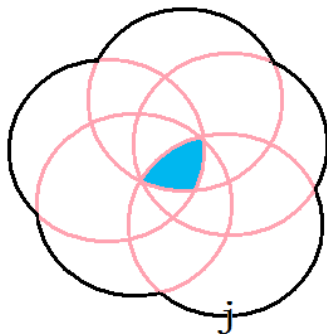
(r.a.: recursive axiomatization)



定理 3

- $\forall i, j$: 非負自然数 ($i < j$),
 $\exists \beta(x)$: $\mathbf{I}\Sigma_i$ のある r.a. の Σ_1 binumeration s.t.
 $\bigcap \{ \mathbf{QPL}(\alpha) \mid \alpha(x): \mathbf{I}\Sigma_j \text{ のある r.a. の } \Sigma_1 \text{ binumeration} \} \not\subseteq \mathbf{QPL}(\beta).$

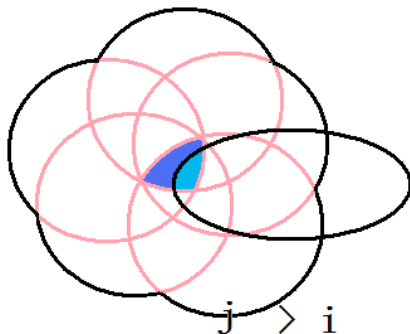
(r.a.: recursive axiomatization)



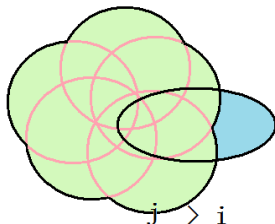
定理 3

- $\forall i, j$: 非負自然数 ($i < j$),
 $\exists \beta(x)$: $\mathbf{I}\Sigma_i$ のある r.a. の Σ_1 binumeration s.t.
 $\bigcap \{ \mathbf{QPL}(\alpha) \mid \alpha(x): \mathbf{I}\Sigma_j \text{ のある r.a. の } \Sigma_1 \text{ binumeration} \} \not\subseteq \mathbf{QPL}(\beta).$

(r.a.: recursive axiomatization)



証明のアイディア 定理 2

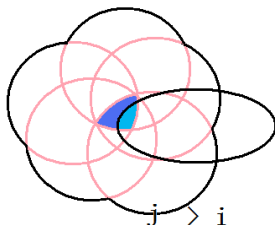


Montagna, Artemov の証明のアイディアを応用した.

ポイント

- $I\Sigma_j$ は有限公理化可能なので、文として扱える.
- $I\Sigma_i$, $I\Sigma_j$ それぞれにおいて様相演算子 $\Box$ の解釈が異なるので、そのギャップを用いた.

証明のアイデア 定理 3



次の補題を用いた.

補題 (Visser and de Jonge, 2006)

T : $I\Sigma_1$ の拡大理論, $\alpha(x)$: $\mathbf{Q}$ のある拡大理論の Σ_1 binumeration.

$\exists A$: 述語様相文 s.t.

$\forall \varphi$: $\mathcal{L}_A$ 文, 以下は同値 :

- ① $A \rightarrow \varphi \in \mathbf{QPL}(\alpha)$;
- ② $T + \mathbf{Con}_\alpha \vdash \varphi$.

参考文献

- S. Artemov. *Numerically correct logics of provability*. (Russian) Dokl. Akad. Nauk SSSR 290 (1986), no. 6, 1289–1292.
- R. Solovay. *Provability interpretations of modal logic*, Israel J. Math. 25 (1976), no. 3-4, 287–304.
- C. Smoryński. *Self-Reference and Modal Logic*. Springer, New York, 1985.
- G. Boolos. *The logic of provability*. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- T. Kurahashi. *On the predicate provability logics and the binumerations of the theories of arithmetic*. preprint.
- A. Visser; M. de Jonge. *No escape from Vardanyan's theorem*. Arch. Math. Logic 45 (2006), no. 5, 539–554.