

可証性述語の述語様相論理に関する Montagna の定理の拡張について

倉橋 太志

神戸大学 システム情報学研究科

2011 年 9 月 29 日 日本数学会秋季総合分科会 信州大学

- 再帰的理論 T の可証性述語とは、任意の T の言語の文 φ に対し、

$$\text{PA} \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \Leftrightarrow T \vdash \varphi$$

を満たす Σ_1 論理式 $\text{Pr}_T(x)$ のことをいう。

- 以下の性質を満たす可証性述語 $\text{Pr}_T(x)$ を固定する：

$\text{Pr}_T(x)$ の性質

Modus ponens $\text{PA} \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \rightarrow \psi \urcorner) \rightarrow (\text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner))$

Löb $\text{PA} \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner).$

Σ_1 -comp. $\varphi: \Sigma_1 \Rightarrow T \vdash \varphi \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner).$

可証性述語の性質を様相論理を用いて調べる。

$\mathcal{L}_A = \{+, \times, S, 0, <, =\}$, T : 再帰的 $\mathcal{L}_A$ -理論.

定義 (算術的解釈)

命題様相文から $\mathcal{L}_A$ の文への翻訳 **T -解釈** $*$ を以下で再帰的に定義する:

- 各命題変数 p に対して p^* はある $\mathcal{L}_A$ -文;
- $\perp^* \equiv 0 = 1$;
- $(A \rightarrow B)^* \equiv (A^* \rightarrow B^*)$;
- $\dots$;
- $(\Box A)^* \equiv \text{Pr}_T(\ulcorner A^* \urcorner)$.

定義

A : 命題様相文 .

- A は **T -妥当** $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall *: T\text{-解釈}, T \vdash A^*$;
- **$\text{PL}(T)$** := $\{A \mid A \text{ は } T\text{-妥当な命題様相文}\}$
(T の provability logic)

命題様相論理 GL

- 公理 :
 - すべてのトートロジー;
 - $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$;
 - $\Box(\Box A \rightarrow A) \rightarrow \Box A$.
- 推論規則 : **modus ponens** と **necessitation** $\frac{A}{\Box A}$.

Th(GL) := $\{A \mid \text{GL} \vdash A\}$. このとき $\text{Th}(\text{GL}) \subseteq \text{PL}(T)$.

定義

- クリプキフレーム $\langle W, \prec \rangle$ が **GL-フレーム** である
 $\stackrel{\text{def.}}{\iff} \prec$ が
 - 推移的 かつ
 - 逆整礎的 (無限上昇列をもたない).
- Fr(GL)** := $\{A \mid A \text{ は任意の GL-フレームにおいて妥当な命題様相文}\}$.

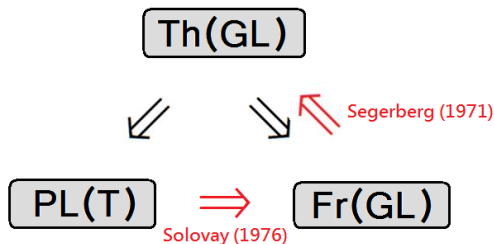
定理 (Segerberg, 1971)

Th(GL) = Fr(GL).

$T: \mathbf{I}\Sigma_1$ の Σ_1 -健全な再帰的拡大理論 .

定理 (Solovay, 1976)

$\text{Th}(\text{GL}) = \text{PL}(T)$.



$\mathbf{I}\Sigma_1$ の Σ_1 -健全な再帰的拡大理論 T に対して

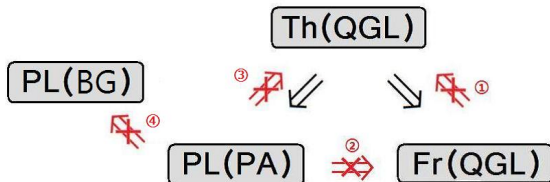
$\text{Th}(\text{GL}) = \text{Fr}(\text{GL}) = \text{PL}(T)$.

述語様相論理ではどうか？

- QGL を GL の述語様相論理への自然な拡張とする .
- $\text{Th}(\text{QGL})$, $\text{Fr}(\text{QGL})$, $\text{PL}(T)$ を命題論理のときと同様に定める .

定理 (Montagna, 1984)

- ① $\text{Fr}(\text{QGL}) \not\subseteq \text{Th}(\text{QGL})$.
- ② $\text{PL}(\text{PA}) \not\subseteq \text{Fr}(\text{QGL})$.
- ③ $\text{PL}(\text{PA}) \not\subseteq \text{Th}(\text{QGL})$.
- ④ $\text{PL}(\text{PA}) \not\subseteq \text{PL}(\text{BG})$ (BG: Bernays-Gödel 集合論).



Montagna の予想 (1984)

$$\bigcap \{ \text{PL}(T) \mid T : \text{PA の再帰的拡大理論} \} = \text{Th}(\text{QGL})?$$

定理 (Vardanyan, 1985)

$\text{PL}(\text{PA})$ は Π_2^0 -完全集合 .

- $\text{PL}(\text{PA})$ は Σ_1^0 集合ではない .
- QGL の再帰的拡大理論では $\text{PL}(\text{PA})$ を特徴付けられない .

同様の証明法で ,

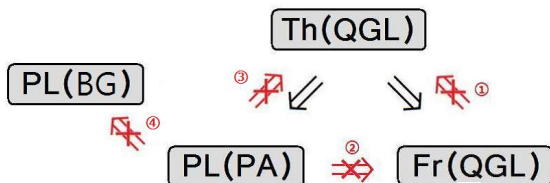
$\bigcap \{ \text{PL}(T) \mid T : \text{PA の再帰的拡大 } \mathcal{L}_A\text{-理論} \}$ は Σ_1^0 集合ではない .

系

$\bigcap \{ \text{PL}(T) \mid T : \text{PA の再帰的拡大 } \mathcal{L}_A\text{-理論} \} \not\subseteq \text{Th}(\text{QGL})$.

$\text{Th}(\text{QGL})$, $\text{Fr}(\text{QGL})$, $\text{PL}(T)$ の間の関係をより詳しく調べる .

Montagna の定理



Montagna の定理 1 の拡張:

定理 1 (T.K.)

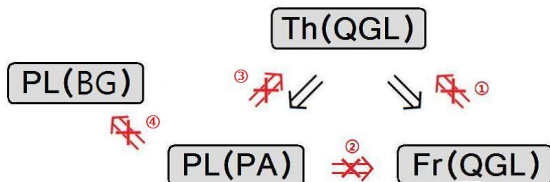
$\mathbf{I}\Sigma_1$ の任意の Σ_1 -健全な再帰的拡大理論 T に対して $\text{Fr}(\text{QGL}) \not\subseteq \text{PL}(T)$.

Montagna の定理 2 の拡張:

定理 2 (T.K.)

$\bigcap \{ \text{PL}(T) \mid T : \mathbf{I}\Sigma_1 \text{ の再帰的拡大 } \mathcal{L}_A\text{-理論} \} \not\subseteq \text{Fr}(\text{QGL})$.

Montagna の定理



Montagna の定理 1 と 3 の拡張:

定理 3 (T.K.)

$\bigcap \{ \text{PL}(T) \mid T : \mathbf{I}\Sigma_2 \text{ の再帰的拡大 } \mathcal{L}_A\text{-理論} \} \cap \text{Fr}(\text{QGL}) \not\subseteq \text{Th}(\text{QGL}).$

Montagna の定理 4 に関連する結果:

定理 4 (T.K.)

任意の異なる 0 でない自然数 m, n に対して $\text{PL}(\mathbf{I}\Sigma_m) \not\subseteq \text{PL}(\mathbf{I}\Sigma_n).$

定理 3 の証明のポイント

定理 3 (T.K.)

$\bigcap \{ \text{PL}(T) \mid T : \text{I}\Sigma_2 \text{ の再帰的拡大 } \mathcal{L}_A\text{-理論} \} \cap \text{Fr}(\text{QGL}) \not\subseteq \text{Th}(\text{QGL}).$

$\mathcal{L}_A$ の各元に対応する関係記号を用意: $P_+, P_\times, P_S, P_0, P_<, P_=$.

$\mathcal{L}_A$ -論理式 φ をこれらの記号のみを用いて書き換えた論理式を $\llbracket \varphi \rrbracket$ と書く.

$$B \equiv \forall x \forall y (P_S(y, x) \wedge p(x) \rightarrow \Diamond p(y)),$$

$$C \equiv \forall x p(x) \wedge B \wedge \Box B \wedge \llbracket \neg \text{Con}(\text{I}\Sigma_1 + \forall x \text{Con}_{\text{I}\Sigma_1}(x)) \rrbracket,$$

$$D \equiv \Diamond \mathbf{T} \wedge \bigwedge \{ P_\circ \rightarrow \Box P_\circ, \neg P_\circ \rightarrow \Box \neg P_\circ \mid \circ \in \mathcal{L}_A \},$$

$$A \equiv \llbracket \text{I}\Sigma_1 \rrbracket \wedge D \wedge C \rightarrow \llbracket \text{I}\Sigma_2 \rrbracket.$$

T を $\text{I}\Sigma_2$ の再帰的拡大 $\mathcal{L}_A$ -理論とすると,

$A \in \text{PL}(T)$, $A \in \text{Fr}(\text{QGL})$, $A \notin \text{PL}(\text{I}\Sigma_1)$.

$\text{Th}(\text{QGL}) \subseteq \text{PL}(\text{I}\Sigma_1)$ なので定理が従う.

$$A \equiv [\mathbf{I}\Sigma_1] \wedge D \wedge C \rightarrow [\mathbf{I}\Sigma_2]$$

$A \in \text{PL}(T)$ について

任意の T -解釈 $*$ と任意の $\mathcal{L}_A$ -論理式 φ について

$$T \vdash [\mathbf{I}\Sigma_1]^* \wedge D^* \rightarrow (\varphi \leftrightarrow [\varphi]^*).$$

$T \vdash \mathbf{I}\Sigma_2$ なので $T \vdash [\mathbf{I}\Sigma_1]^* \wedge D^* \rightarrow [\mathbf{I}\Sigma_2]^*$.

$A \notin \text{PL}(\mathbf{I}\Sigma_1)$ について

Iterated consistency assertions

$$\text{Con}_T^0 := (0 = 0), \text{Con}_T^{i+1} := \text{Con}(T + \text{Con}_T^i)$$

をパラメータ化した論理式 $\text{Con}_T(x)$ について,

- $p^*(x) := \text{Con}_{\mathbf{I}\Sigma_1}(x),$
- $P_+^*(x, y, z) \equiv (x + y = z)$ など自然に解釈,

を満たす $\mathbf{I}\Sigma_1$ -解釈 $*$ をとれば,

$\mathbf{I}\Sigma_1$ のモデル $\mathcal{M}$ で $\mathcal{M} \models (\neg A)^*$ となるものがとれる.

$$\begin{aligned}
B &\equiv \forall x \forall y (P_S(y, x) \wedge p(x) \rightarrow \Diamond p(y)), \\
C &\equiv \forall x p(x) \wedge B \wedge \Box B \wedge [\neg \text{Con}(\text{I}\Sigma_1 + \forall x \text{Con}_{\text{I}\Sigma_1}(x))], \\
D &\equiv \Diamond \mathbf{T} \wedge \bigwedge \{P_\circ \rightarrow \Box P_\circ, \neg P_\circ \rightarrow \Box \neg P_\circ \mid \circ \in \mathcal{L}_A\}, \\
A &\equiv [\text{I}\Sigma_1] \wedge D \wedge C \rightarrow [\text{I}\Sigma_2].
\end{aligned}$$

$A \in \text{Fr}(\text{QGL})$ について

- 推移的なクリプキモデル $\mathcal{K}$ のある世界 w において $\neg A$ が成り立つと仮定すると,
- $[\text{I}\Sigma_1]$ より w は $\text{I}\Sigma_1$ のモデル,
- $[\neg \text{Con}(\text{I}\Sigma_1 + \forall x \text{Con}_{\text{I}\Sigma_1}(x))]$ より w は **超準モデル**,
- B より $\mathcal{K}$ は世界の無限上昇列をもつ.

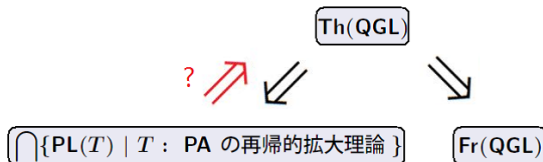
つまり,

$\mathcal{K}$ が逆整礎的 $\Rightarrow A$ は $\mathcal{K}$ において妥当.

問題

- Montagna の予想は更に範囲を広げれば成り立つか？

$$\bigcap \{ \text{PL}(T) \mid T : \text{PA の再帰的拡大理論} \} = \text{Th}(\text{QGL})?$$



$$\bigcap \{ \text{PL}(T) \mid T : \text{PA を解釈可能な再帰的理論} \} = \text{Th}(\text{QGL})?$$

参考文献

- R. Solovay, *Provability interpretations of modal logic*, Israel J. Math. 25 (1976), no. 3-4, 287–304.
- F. Montagna. *The predicate modal logic of provability*. Notre Dame Journal of Formal Logic 25 (1984), 179–189.
- C. Smoryński. *Self-Reference and Modal Logic*. Springer, New York, 1985.
- G. Boolos. *The logic of provability*. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- G. Dzhaparidze and D. de Jongh. *The Logic of Provability*. Handbook of Proof Theory. North holland, 1998.
- S. Artemov and Lev D. Beklemishev. *Provability logic*. Handbook of Philosophical Logic. Springer, 2005.
- T. Kurahashi. *Arithmetical interpretations and Kripke frames of predicate modal logic of provability*. preprint.