算術の超準モデルの predicate provability logic への応用

倉橋　太志

神戸大学 修士 2 年

2011 年 1 月 6-8 日 第 45 回 MLG 研究集会

目次

1. **Provability logic**
2. Predicate provability logic
3. Fr(GL) $\subseteq$ PL(PA) ?
4. 関連する話題

Provability predicate

- R.e. 理論 T の provability predicate $\mathrm{Pr}_T(x)$ は
  $\forall\varphi$: sentence,
  $$T \vdash \varphi \Leftrightarrow \mathsf{PA} \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\varphi\urcorner)$$
  を満たす Σ_1-論理式.

Pr_T の性質

- D1 $T \vdash \varphi \Rightarrow \mathsf{PA} \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\varphi\urcorner)$
- D2 $\mathsf{PA} \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\varphi \to \psi\urcorner) \to (\mathrm{Pr}_T(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\psi\urcorner))$
- D3 $\mathsf{PA} \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\mathrm{Pr}_T(\ulcorner\varphi\urcorner)\urcorner)$
- Löb $\mathsf{PA} \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\mathrm{Pr}_T(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \varphi\urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\varphi\urcorner)$.
- Σ_1-comp. φ: $\Sigma_1 \Rightarrow T \vdash \varphi \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\varphi\urcorner)$.

Gödel の問題 (1933)

$\Box$ を証明可能性として解釈したときに妥当な様相論理の体系はあるか？

Pr_T を $\Box$ に書き換える

D1 $\vdash A \Rightarrow \vdash \Box A$

D2 $\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$

D3 $\Box A \to \Box\Box A$

Löb $\Box(\Box A \to A) \to \Box A$

命題様相体系 GL

$\mathbf{GL} = \mathbf{K} + \Box(\Box A \to A) \to \Box A$

定理 (Segerberg, 1971)

A: **命題様相文．以下は同値:**

1. **GL** $\vdash A$;
2. A **は 1. transitive, 2. conversely well-founded である任意の Kripke frame で valid;**

このような Kripke frame を GL-frame というとする．

T: r.e 理論.

定義（arithmetical interpretation）

命題様相論理式から T の言語の論理式への翻訳

T-interpretation $*$ を以下で帰納的に定義する:

- 各命題変数 p に対して p^* は T の言語のある文;
- $\bot^* \equiv\ 0 = 1$;
- $(A \to B)^* \equiv (A^* \to B^*)$;
- $(\Box A)^* \equiv \mathrm{Pr}_T(\ulcorner A^* \urcorner)$.

定義

A: 命題様相文.

- A は T-valid $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ $\forall *$: T-interpretation, $T \vdash A^*$;

定理 (Solovay, 1976)

A: 命題様相文，T: PA の Σ_1-sound な r.e. 拡大理論．
以下は同値:

1. GL $\vdash A$;
2. A は T-valid;

つまり，

Provability predicate $\mathrm{Pr}_T(x)$ に関して T の証明できる事実は命題様相体系 GL の定理と一致する．
(Gödel の問題への１つの答え)

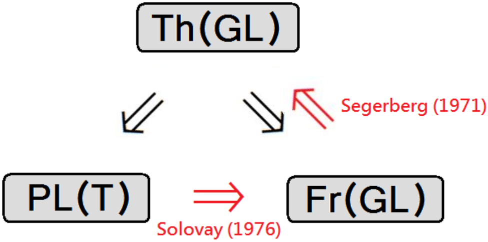
定義

$\mathsf{Th(GL)} := \{A \mid \mathsf{GL} \vdash A\}$

$\mathsf{Fr(GL)} := \{A \mid A$ は任意の GL-frame で valid.$\}$

$\mathsf{PL}(T) := \{A \mid A$ は T-valid.$\}$ (T: r.e. theory)

T: PA の Σ_1-sound な r.e. 拡大理論



$\mathsf{Th(GL)} = \mathsf{Fr(GL)} = \mathsf{PL}(T)$.

1. **Provability logic**
2. **Predicate provability logic**
3. **$\mathrm{Fr}(\mathrm{GL}) \subseteq \mathrm{PL}(\mathrm{PA})$?**
4. **関連する話題**

QGL · · · GL を述語論理に自然に拡張した述語様相体系.
Th(QGL) $:= \{A \mid$ QGL $\vdash A\}$.

定義（arithmetical interpretation）

述語様相論理式から T の言語の論理式への翻訳
T-interpretation $*$ を以下で帰納的に定義する:

- 各 k-変数述語記号 $P_i^k(\vec{x})$ に対し，
  $(P_i^k(\vec{x}))^*$ は算術の言語のある k-変数論理式;
- $\bot^* \equiv \ 0 = 1$;
- $(A(\vec{x}) \to B(\vec{y}))^* \equiv (A^*(\vec{x}) \to B^*(\vec{y}))$;
- $(\forall x A(x, \vec{y}))^* \equiv \forall x A^*(x, \vec{y})$;
- $(\Box A(\vec{x}))^* \equiv \mathrm{Pr}_T(\ulcorner A^*(\dot{\vec{x}}) \urcorner)$.

$(\Box A(\vec{x}))^*$ は $\Box A(\vec{x})$ と等しい自由変数をもつ.

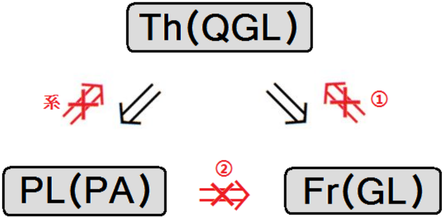
Predicate provability logic

定理 (Montagna, 1984)

1. $\mathbf{Th(QGL)} \subsetneq \mathbf{Fr(GL)}$;
2. $\mathbf{PL(PA)} \not\subseteq \mathbf{Fr(GL)}$.

系

$\mathbf{Th(QGL)} \subsetneq \mathbf{PL(PA)}$.



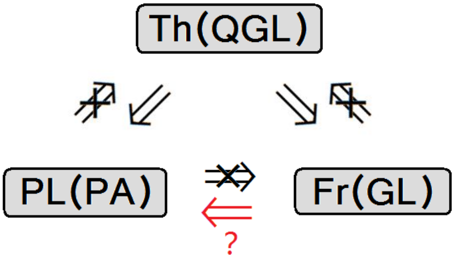
証明のポイント

1. **Th(QGL) $\subsetneq$ Fr(GL)**:
   $A \equiv \exists x \Diamond p(x) \wedge \forall x \exists y \Box (p(x) \to \Diamond p(y))$.
   $\mathcal{M} = \langle W, \prec, \{D_w\}_{w \in W}, \Vdash \rangle$: transitive Kripke model.
   $w \Vdash A$ となる $w \in W$ があれば
   $\prec$: conversely well-founded でない.
2. **PL(PA) $\not\subseteq$ Fr(GL)**:
   BG: 有限公理化可能 (1つの述語様相論理式として扱える),
   PA $\vdash$ Con(BG) $\to$ Con(PA $+$ Con(PA)).

ただし，Con$(T) \equiv \neg \mathrm{Pr}_T(\ulcorner 0 = S(0) \urcorner)$.

問題

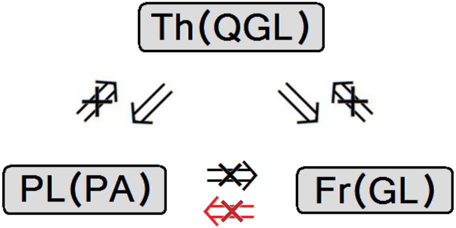
$$\mathbf{Fr(GL)} \subseteq \mathbf{PL(PA)}\ ?$$



1. Provability logic
2. Predicate provability logic
3. $\mathrm{Fr}(\mathsf{GL}) \subseteq \mathsf{PL}(\mathsf{PA})$?
4. 関連する話題

定理 1

$$\mathsf{Fr}(\mathsf{GL}) \not\subseteq \mathsf{PL}(\mathsf{PA}).$$



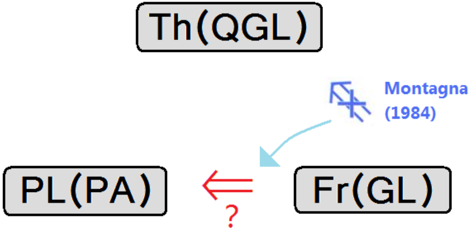
証明の方針

$\neg A \in \mathsf{Fr(GL)}$, $\neg A \notin \mathsf{PL(PA)}$ となる述語様相文 A をみつける.

条件

(i) $\mathcal{M} = \langle W, \prec, \{D_w\}_{w \in W}, \Vdash \rangle$: transitive Kripke model.
$w \Vdash A$ となる $w \in W$ があれば
$\prec$: conversely well-founded でない.

(ii) $\exists *$: PA-interpretation s.t. PA $+ A^*$: 無矛盾.



$p(x)$: 新しい１変数述語記号.

- Montagna's sentence
  $A \equiv \exists x \Diamond p(x) \land \forall x \exists y \Box (p(x) \to \Diamond p(y))$
  とすれば (i) を満たす.

- $A^* \equiv$
  $\exists x \mathrm{Con}(\mathrm{PA}+p^*(x)) \land \forall x \exists y \mathrm{Pr}_{\mathrm{PA}}(\ulcorner p^*(\dot{x}) \to \mathrm{Con}(\mathrm{PA}+p^*(\dot{y}))\urcorner)$
  が PA と無矛盾となる $\mathcal{L}_A$-論理式 $p^*(x)$ はあるか？

- (i) を満たしたまま (ii) を満たすように A のとり方を変える.

定義 (iterated consistency assertions)

$\mathsf{Con}^0 :\equiv (0 = 0)$;
$\mathsf{Con}^{n+1} :\equiv \mathsf{Con}(\mathsf{PA} + \mathsf{Con}^n)$.

定義 (parameterized iterated consistency assertions)

以下の式を満たす $\mathcal{L}_A$-論理式 $\varphi(x)$ の一つを $\mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}(x)$ とかく:

$$\mathsf{PA} \vdash \forall x(\varphi(x) \leftrightarrow [\mathsf{Con}(\mathsf{PA} + \varphi(\dot{x} \dot{-} 1)) \lor x = 0]).$$

任意の $n \in \omega$ について

$$\mathsf{PA} \vdash \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}(\bar{n}) \leftrightarrow \mathsf{Con}^n.$$

命題

1. $\mathsf{PA} \vdash \forall x(\mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}(x+1) \to \mathsf{Con}(\mathsf{PA} + \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}(\dot{x})))$.
2. $\mathbb{N} \models \mathsf{Con}(\mathsf{PA} + \forall x \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}(x))$.

$p^*(x) \equiv \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}(x)$ を考えれば，命題より

$$\forall x p(x) \land \Box \forall x (p(x+1) \to \Diamond p(x)) \qquad (\dagger)$$

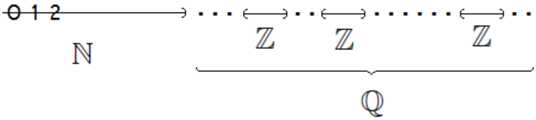
を満たす算術のモデルがある.
(Montagna's sentence: $\exists x \Diamond p(x) \land \forall x \exists y \Box (p(x) \to \Diamond p(y))$).

- 自然数では無限列は得られない.
- 算術のモデルの超準元ならば無限列が得られる.

言語 $\mathcal{L}_A := (S, +, \times, 0, <)$

- $\mathbb{N}$: 自然数論の標準モデル.
- $\mathcal{M}$: 超準モデル $\Leftrightarrow$ $\mathcal{M} \not\cong \mathbb{N}$.

$\mathcal{M} \models$ PA: 超準モデル の順序構造



$E(x, y), S(x, y), A(x, y, z), M(x, y, z), Z(x), L(x, y)$: 述語記号

定義

PA-interpretation $*$ は natural
$\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$

$(E(x, y))^* \equiv x = y$,
$(S(x, y))^* \equiv S(x) = y$,
$(A(x, y, z))^* \equiv x + y = z$,
$(M(x, y, z))^* \equiv x \times y = z$,
$(Z(x))^* \equiv x = 0$,
$(L(x, y))^* \equiv x < y$.

$$E(x,y), S(x,y), A(x,y,z), M(x,y,z), Z(x), L(x,y) \quad (*)$$

- 各 $\mathcal{L}_A$-論理式 φ を $(*)$ の述語記号のみで (natural interpretation の意味で) 同値な書き換えをした述語論理式を $\varphi^{\#}$ とかく.

- 任意の $\mathcal{L}_A$-論理式 φ，natural interpretation $*$ に対して,

$$\mathsf{PA} \vdash \varphi \leftrightarrow (\varphi^{\#})^*.$$

- 算術の超準モデルをワールドにもつ Kripke model を構成したい.
- PA は有限公理化可能でないため不適.
- $\mathrm{I\Sigma_n}$ ··· PA の induction を Σ_n-論理式のみに制限.

事実

各 $n \in \omega$ について，$\mathrm{I\Sigma_n}$ は有限公理化可能.

- $\mathrm{I\Sigma_n}$ の有限公理化の conjunction を $\bigwedge \mathrm{I\Sigma_n}$ とかく.

定理 1 の証明.

- $\forall x p(x) \wedge \Box \forall x (p(x+1) \to \Diamond p(x))$ (†)
- 算術のモデル $(\bigwedge \mathbf{I\Sigma_1})^\#$
  超準モデル $(\neg \mathrm{Con}(\mathrm{PA} + \forall x \mathrm{Con_{PA}}(x)))^\#$
  (†) $B \equiv \forall x \forall y (S(y, x) \wedge p(x) \to \Diamond p(y))$
  (†) $\forall x p(x) \wedge B \wedge \Box B$
  Successor を保存 $\forall x \forall y (S(x, y) \to \Box S(x, y))$
- これらの conjunction を A とする.
- A が (i) と (ii) を満たすことをみる.

(i) $\mathcal{M} = \langle W, \prec, \{D_w\}_{w \in W}, \Vdash \rangle$: transitive Kripke model.
$w \Vdash A$ となる $w \in W$ があれば
$\prec$: conversely well-founded でない.

(ii) $\exists *$: PA-interpretation s.t. PA $+ A^*$: 無矛盾.

(i)

$\mathcal{M} = \langle W, \prec, \{D_w\}_{w \in W}, \Vdash \rangle$: transitive Kripke model.
$w_0 \in W$ を $w_0 \Vdash A$ とする．
w_0: $\mathrm{I}\Sigma_1$ の超準モデル．a_0: D_{w_0} の超準元．

$$a_0,\ a_0 - 1,\ a_0 - 2,\ \ldots\ :\ \text{無限下降列.}$$

Successor の保存より，この無限列は保存される．

- $w_0 \Vdash p(a_0)$, $\qquad w_0 \Vdash p(a_0) \to \Diamond p(a_0 - 1)$ (†)
- $w_0 \Vdash \Diamond p(a_0 - 1)$
- $\exists w_1 \in W$ s.t. $(w_0 \prec w_1\ \&\ w_1 \Vdash p(a_0 - 1))$
- $w_1 \Vdash \Diamond p(a_0 - 2)$

  $\ldots$

$\prec$ は無限列をもつ．

$B \equiv \forall x \forall y (S(y, x) \land p(x) \to \Diamond p(y))$
$A \equiv \forall x p(x) \land B \land \Box B \land \forall x \forall y (S(x, y) \to \Box S(x, y)) \land$
$\quad (\bigwedge \mathrm{I}\Sigma_1)^{\#} \land (\neg \mathrm{Con}(\mathrm{PA} + \forall x \mathrm{Con}_{\mathrm{PA}}(x)))^{\#}$

(ii)

- PA $+ \forall x \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}(x)$: 無矛盾．第二不完全性定理より
- $\exists \mathcal{M} \models \mathsf{PA} + \forall x \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}(x) + \neg \mathsf{Con}(\mathsf{PA} + \forall x \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}(x))$.
- $*$: natural T-interpretation s.t. $p^*(x) \equiv \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}(x)$.
- PA $\vdash B^*$.
- PA $\vdash (\forall x \forall y (S(x, y) \to \Box S(x, y)))^*$.
- $\mathcal{M} \models A^*$.

なので A は (ii) を満たす．

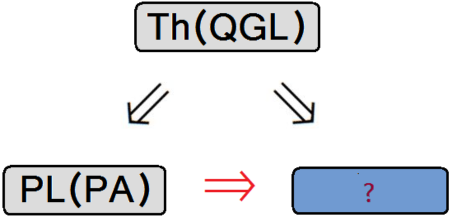
$$B \equiv \forall x \forall y (S(y, x) \wedge p(x) \to \Diamond p(y))$$

$$A \equiv \forall x p(x) \wedge B \wedge \Box B \wedge \forall x \forall y (S(x, y) \to \Box S(x, y)) \wedge (\bigwedge \mathsf{I}\Sigma_1)^{\#} \wedge (\neg \mathsf{Con}(\mathsf{PA} + \forall x \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}(x)))^{\#}$$

1. Provability logic
2. Predicate provability logic
3. $\mathbf{Fr}(\mathbf{GL}) \subseteq \mathbf{PL}(\mathbf{PA})$?
4. **関連する話題**

問題

GL-frame のクラスを制限して肯定的な結果が出せないか？



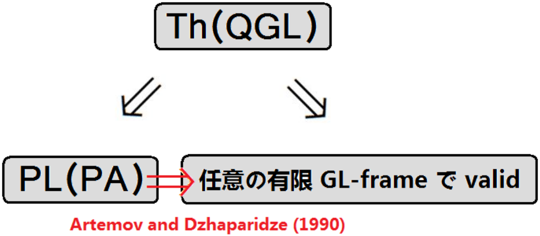
定理 (Artemov and Dzhaparidze, 1990)

A: 述語様相文.

A が PA-valid

$\Rightarrow$ A は任意の有限 GL-frame で valid.

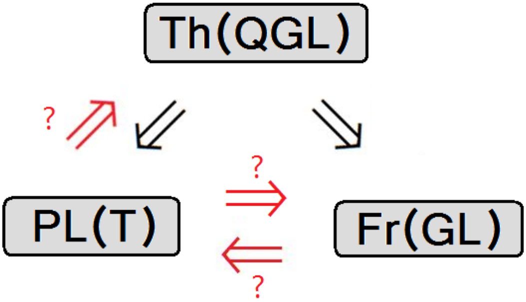
(frame が有限 $\Leftrightarrow$ universe と domain がすべて有限)



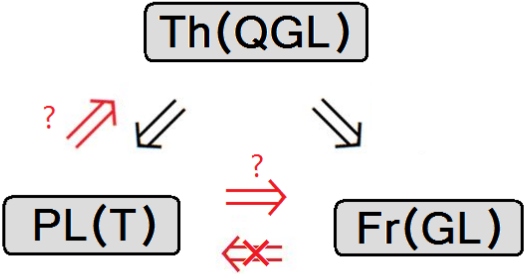
注意: 逆はいえない (定理 1 の系).

問題

Fr(GL) $=$ PL(T) もしくは Th(QGL) $=$ PL(T)
となる T は存在するか？



定理 1 は PA の Σ_1-sound な r.e. 拡大理論 T に拡張可能.



Montagna の問題 (1984)

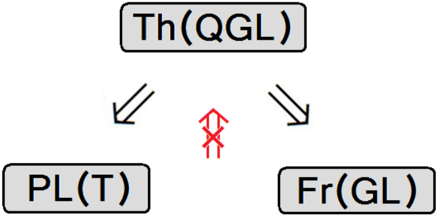
$$\mathbf{Th}(\mathbf{QGL}) = \bigcap \{\mathbf{PL}(T) \mid T:\ \text{PA の r.e. 拡大理論}\}\ ?$$

$$\begin{tikzcd}
& \boxed{\mathrm{Th(QGL)}} \arrow[dl, Rightarrow, shift left] \arrow[dr, Rightarrow] & \\
\boxed{\cap\{\mathrm{PL(T)|T: PA\ の\ r.e.\ 拡大}\}} \arrow[ur, Rightarrow, shift left, "?"] & & \boxed{\mathrm{Fr(GL)}}
\end{tikzcd}$$

定理 2

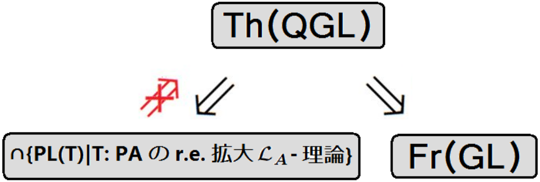
T: PA の r.e. 拡大 $\mathcal{L}_A$-理論

$\mathrm{Th}(\mathrm{QGL}) \subsetneq \mathrm{PL}(T) \cap \mathrm{Fr}(\mathrm{GL})$.



定理 2 の系

$\mathbf{Th(QGL)} \subsetneq \bigcap\{\mathbf{PL}(T) \mid T :\ \textbf{PA の r.e. 拡大 } \mathcal{L}_A\textbf{-理論}\}.$



Propositional provability logic について

- **K. Segerberg,** *An essay in classical modal logic*, **Filosofiska Föreningen och Filosofiska Institutionen vid Uppsala Universitet, 1971.**
- **R. Solovay,** *Provability interpretations of modal logic*, **Israel J. Math. 25 (1976), no. 3-4, 287–304.**

Predicate provability logic について

- **F. Montagna.** *The predicate modal logic of provability*. **Notre Dame Journal of Formal Logic 25 (1984), 179–189.**
- **S. Artemov; G. Dzhaparidze.** *Finite Kripke models and predicate logics of provability*, **J. Symbolic Logic 55 (1990), no. 3, 1090–1098.**

教科書

- **C. Smoryński.** *Self-Reference and Modal Logic*. **Springer, New York, 1985.**
- **G. Boolos.** *The logic of provability*. **Cambridge University Press, Cambridge, 1993.**

Survey

- **G. Dzhaparidze and D. de Jongh.** *The Logic of Provability*. **Handbook of Proof Theory. North holland, 1998.**
- **S. Artemov and Lev D. Beklemishev.** *Provability logic*. **Handbook of Philosophical Logic. Springer, 2005.**