

# 可証性述語の述語様相論理

倉橋 太志

神戸大学

2011 年 6 月 4-5 日 科学基礎論学会 愛媛大学

## 目次

- ① 可証性述語の様相論理
- ② 可証性述語の述語様相論理
- ③ 主定理
- ④ 関連する話題

- ① 可証性述語の様相論理
- ② 可証性述語の述語様相論理
- ③ 主定理
- ④ 関連する話題

- 再帰的理論  $T$  の可証性述語とは、任意の  $T$  の言語の文  $\varphi$  に対し、

$$\mathbf{PA} \vdash \mathbf{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \Leftrightarrow T \vdash \varphi$$

を満たす  $\Sigma_1$  論理式  $\mathbf{Pr}_T(x)$  のことをいう。

- 以下の性質を満たす可証性述語  $\mathbf{Pr}_T(x)$  を固定する：

### $\mathbf{Pr}_T$ の性質

$$\mathbf{D1} \quad T \vdash \varphi \Rightarrow \mathbf{PA} \vdash \mathbf{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$$

$$\mathbf{D2} \quad \mathbf{PA} \vdash \mathbf{Pr}_T(\ulcorner \varphi \rightarrow \psi \urcorner) \rightarrow (\mathbf{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \mathbf{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner))$$

$$\mathbf{D3} \quad \mathbf{PA} \vdash \mathbf{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \mathbf{Pr}_T(\ulcorner \mathbf{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \urcorner)$$

$$\mathbf{Löb} \quad \mathbf{PA} \vdash \mathbf{Pr}_T(\ulcorner \mathbf{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \varphi \urcorner) \rightarrow \mathbf{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner).$$

$$\Sigma_1\text{-comp.} \quad \varphi: \Sigma_1 \Rightarrow T \vdash \varphi \rightarrow \mathbf{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner).$$

## Gödel の主張 (1933)

形式的体系の証明可能性は様相の一種である .

## 命題様相論理 GL

- 公理 :
  - すべてのトートロジー;
  - $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$ ;
  - $\Box(\Box A \rightarrow A) \rightarrow \Box A$ .
- 推論規則 :
  - $\frac{A, A \rightarrow B}{B}$ ;
  - $\frac{A}{\Box A}$ .

$\text{Th}(\text{GL}) := \{A \mid \text{GL} \vdash A\}$ .

$F$  を命題変数全体の集合とする .

## 定義

**クリプキフレーム**とは以下を満たす対  $\langle W, \prec \rangle$  のこと:

- $W$  は空でない集合;
- $\prec$  は  $W$  上の二項関係: **到達可能性関係** .

**クリプキモデル**とは以下を満たす3つ組  $\mathcal{M} = \langle W, \prec, \Vdash \rangle$  のこと:

- $\langle W, \prec \rangle$  はクリプキフレーム;
- $\Vdash$  は任意の  $w \in W$  に対して以下を満たすような  $W \times F$  上の二項関係,
  - $w \nVdash \perp$ ;
  - $w \Vdash A \rightarrow B \Leftrightarrow (w \nVdash A \text{ or } w \Vdash B)$ ;
  - $\dots$ ;
  - $w \Vdash \Box A \Leftrightarrow \forall w' \in W (w \prec w' \Rightarrow w' \Vdash A)$ .
  - $w \Vdash \Diamond A \Leftrightarrow \exists w' \in W (w \prec w' \ \& \ w' \Vdash A)$ .

## 定義

$A$ : 命題様相文,  $\mathcal{M}$ : クリプキモデル,  $\mathcal{F}$ : クリプキフレーム.

- $A$  は  $\mathcal{M}$  において妥当  $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall w \in W, w \Vdash A$ .
- $A$  は  $\mathcal{F}$  において妥当  $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} A$  は任意の  $\Vdash$  について  $\langle \mathcal{F}, \Vdash \rangle$  において妥当.

## 定義

- クリプキフレーム  $\langle W, \prec \rangle$  は  $\prec$  が
  1. 推移的,
  2. 逆整礎的
 であるとき, **GL-フレーム** であるという.
- **Fr(GL)** :=  $\{A \mid A \text{ は任意の GL-フレームにおいて妥当} \}$ .

定理 (Segerberg, 1971)

**Th(GL) = Fr(GL).**

$T$ : 再帰的理論 (算術).

### 定義 (算術的解釈)

命題様相文から  $T$  の言語の論理式への翻訳  $T$ -解釈  $*$  を以下で再帰的に定義する:

- 各命題変数  $p$  に対して  $p^*$  は  $T$  の言語のある文;
- $\perp^* \equiv 0 = 1$ ;
- $(A \rightarrow B)^* \equiv (A^* \rightarrow B^*)$ ;
- $\dots$ ;
- $(\Box A)^* \equiv \text{Pr}_T(\ulcorner A^* \urcorner)$ .

### 定義

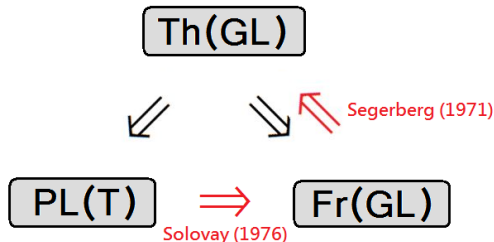
$A$ : 命題様相文 .

- $A$  は  $T$ -妥当  $\stackrel{\text{def.}}{\iff} \forall *: T\text{-解釈}, T \vdash A^*$ ;
- $\text{PL}(T) := \{A \mid A \text{ は } T\text{-妥当}\}$ .

$T$ :  $\text{PA}$  の  $\Sigma_1$ -健全な再帰的拡大理論 .

定理 (Solovay, 1976)

$\text{Th}(\text{GL}) = \text{PL}(T)$ .



$\text{PA}$  の  $\Sigma_1$ -健全な再帰的拡大理論  $T$  に対して  
 $\text{Th}(\text{GL}) = \text{Fr}(\text{GL}) = \text{PL}(T)$  .

- ① 可証性述語の様相論理
- ② 可証性述語の述語様相論理
- ③ 主定理
- ④ 関連する話題

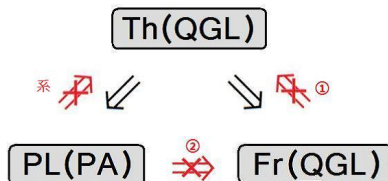
- QGL を GL の述語様相論理への自然な拡張とする .
  - $\text{Th}(\text{QGL})$ ,  $\text{Fr}(\text{QGL})$ ,  $\text{PL}(T)$  を命題論理のときと同様に定める .
- 
- 述語論理式の**算術的解釈**は , 各  $k$ -変数述語記号に  $T$  の言語のある  $k$ -変数論理式を割り当てる .
  - 述語様相論理の**クリプキフレーム**は3つ組  $\langle W, \prec, \{D_w\}_{w \in W} \rangle$  :
    - $\{D_w\}_{w \in W}$  は 空でない集合の族 .
    - $\forall w, w' \in W, w \prec w' \Rightarrow D_w \subseteq D_{w'}$ .
  - 述語様相論理の**クリプキモデル**は4つ組  $\langle W, \prec, \{D_w\}_{w \in W}, \Vdash \rangle$  :  
 $\Vdash$  は  $w \in W$  と ,  $D_w$  の元をパラメータとしてもつ閉論理式の間の二項関係 .
- 
- $\text{Th}(\text{QGL}) \subseteq \text{Fr}(\text{QGL}) \cap \text{PL}(T)$  がいえる .
  - $\text{Th}(\text{QGL})$  はあるクリプキ**モデル**のクラスで特徴付けられる .

## 定理 (Montagna, 1984)

- ①  $\text{Fr}(\text{QGL}) \not\subseteq \text{Th}(\text{QGL})$ .
- ②  $\text{PL}(\text{PA}) \not\subseteq \text{Fr}(\text{QGL})$ .

## 系

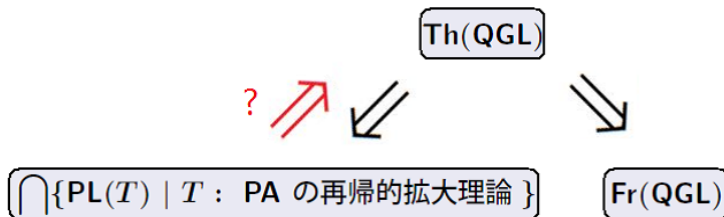
$\text{PL}(\text{PA}) \not\subseteq \text{Th}(\text{QGL})$ .



- Montagna は, ある PA の  $\Sigma_1$ -健全な再帰的拡大理論  $T$  で  $\text{PL}(T) \neq \text{PL}(\text{PA})$  となるものの存在を示した.

### Montagna の予想 (1984)

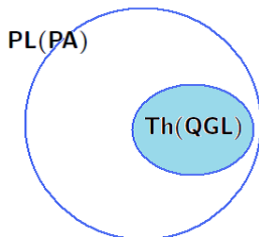
$$\bigcap \{ \text{PL}(T) \mid T : \text{PA の再帰的拡大理論} \} = \text{Th}(\text{QGL})?$$



- Montagna は , ある  $PA$  の  $\Sigma_1$ -健全な再帰的拡大理論  $T$  で  $PL(T) \neq PL(PA)$  となるものの存在を示した .

### Montagna の予想 (1984)

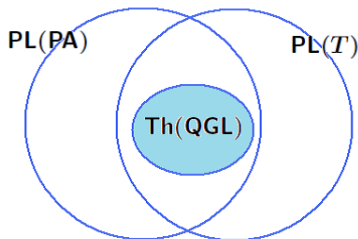
$$\bigcap \{PL(T) \mid T : PA \text{ の再帰的拡大理論} \} = Th(QGL)?$$



- Montagna は , ある  $PA$  の  $\Sigma_1$ -健全な再帰的拡大理論  $T$  で  $PL(T) \neq PL(PA)$  となるものの存在を示した .

### Montagna の予想 (1984)

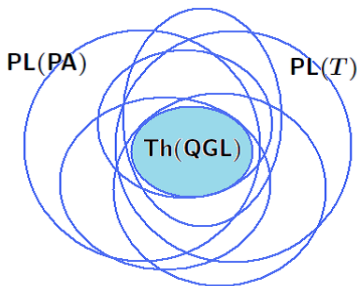
$$\bigcap \{PL(T) \mid T : PA \text{ の再帰的拡大理論} \} = Th(QGL)?$$



- Montagna は , ある PA の  $\Sigma_1$ -健全な再帰的拡大理論  $T$  で  $PL(T) \neq PL(PA)$  となるものの存在を示した .

### Montagna の予想 (1984)

$$\bigcap \{ PL(T) \mid T : \text{PA の再帰的拡大理論} \} = Th(QGL)?$$



PA の再帰的拡大理論  $T$  とは？

## 定理 (Vardanyan, 1985)

$\text{PL}(\text{PA})$  は  $\Pi_2^0$ -完全集合である .

- $\text{PL}(\text{PA})$  は  $\Sigma_1^0$  集合ではない .
- QGL の再帰的拡大理論では  $\text{PL}(\text{PA})$  を特徴付けられない .

同様の証明法で ,

$\bigcap \{ \text{PL}(T) \mid T : \text{PA の再帰的拡大 } \mathcal{L}_A\text{-理論} \}$  は  $\Sigma_1^0$  集合ではない .

$\mathcal{L}_A = \{+, \times, S, 0, <\}$ .

## 系

$\bigcap \{ \text{PL}(T) \mid T : \text{PA の再帰的拡大 } \mathcal{L}_A\text{-理論} \} \neq \text{Th}(\text{QGL})$  .

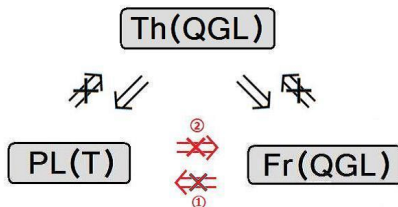
$\text{Th}(\text{QGL})$ ,  $\text{Fr}(\text{QGL})$ ,  $\text{PL}(T)$  の間の関係は完全に理解されているわけではない .

- ① 可証性述語の様相論理
- ② 可証性述語の述語様相論理
- ③ **主定理**
- ④ 関連する話題

## 定理 1 (T.K.)

$\mathbf{I}\Sigma_1$  の任意の  $\Sigma_1$ -健全な再帰的拡大理論  $T$  に対して,

$$\mathbf{Fr}(\mathbf{QGL}) \not\subseteq \mathbf{PL}(T).$$



## 定理 2 (T.K.)

$\bigcap \{ \mathbf{PL}(T) \mid T : \mathbf{I}\Sigma_1 \text{ の再帰的拡大 } \mathcal{L}_A\text{-理論} \} \not\subseteq \mathbf{Fr}(\mathbf{QGL}).$

## 定理 2 の系

$$\bigcap \{ \text{PL}(T) \mid T : \text{I}\Sigma_1 \text{ の再帰的拡大 } \mathcal{L}_A\text{-理論} \} \not\subseteq \text{Th}(\text{QGL}).$$

集合どうしの複雑さを比較するのではなく，具体的な例を構成した．  
定理の条件を  $\text{I}\Sigma_2$  に弱めれば，次の強い形を得る．

## 定理 3 (T.K.)

$$\bigcap \{ \text{PL}(T) \mid T : \text{I}\Sigma_2 \text{ の再帰的拡大 } \mathcal{L}_A\text{-理論} \} \cap \text{Fr}(\text{QGL}) \not\subseteq \text{Th}(\text{QGL}).$$

## 定理 4 (T.K.)

任意の異なる 0 でない自然数  $m, n$  に対して  $\text{PL}(\text{I}\Sigma_m) \neq \text{PL}(\text{I}\Sigma_n)$  .

## 定理 1 の証明のポイント

## 定理 1

$\text{IS}_1$  の任意の  $\Sigma_1$ -健全な再帰的拡大理論  $T$  に対して,

$$\text{Fr}(\text{QGL}) \not\subseteq \text{PL}(T).$$

$$B \equiv \forall x \forall y (S(y, x) \wedge p(x) \rightarrow \Diamond p(y)) ,$$

$$A \equiv \forall x p(x) \wedge B \wedge \Box B \wedge \forall x \forall y (S(x, y) \rightarrow \Box S(x, y))$$

$$\wedge [\wedge Q] \wedge [\neg \text{Con}(\text{PA} + \forall x \text{Con}_{\text{PA}}(x))]$$

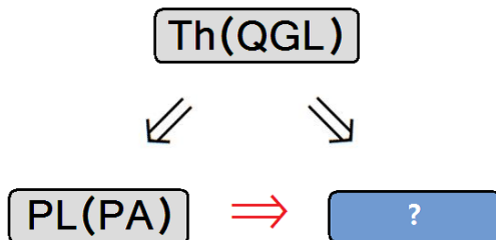
- $w \Vdash A \Rightarrow w$  は**算術の超準モデル**となる .
- $w \Vdash A$  となる  $w \in W$  をもてば,  $W$  の元の無限上昇列が存在 .
- $\exists^*: T$ -解釈  $\exists \mathcal{M}: T$  のモデル s.t.  $\mathcal{M} \models A^*$  .

このとき  $\neg A \in \text{Fr}(\text{QGL})$  ,  $\neg A \notin \text{PL}(T)$  .

- ① 可証性述語の様相論理
- ② 可証性述語の述語様相論理
- ③ 主定理
- ④ 関連する話題

## 問題

QGL-フレームのクラスを制限して肯定的な結果が出せないか？



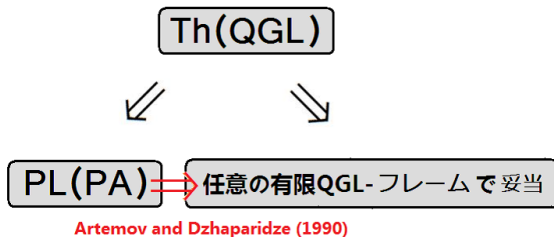
## 定理 (Artemov and Dzhaparidze, 1990)

**A**: 述語様相文.

**A** が **PA-valid**

$\Rightarrow$  **A** は任意の有限 **QGL**-フレームで妥当.

(フレームが有限  $\Leftrightarrow$  universe と domain がすべて有限)

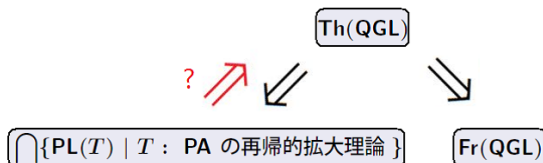


注意: 逆はいえない (定理 1 の系).

## 問題

- Montagna の予想は成り立つか？

$$\bigcap \{ \text{PL}(T) \mid T : \text{PA の再帰的拡大理論} \} = \text{Th}(\text{QGL})?$$



## 参考文献

- R. Solovay, *Provability interpretations of modal logic*, Israel J. Math. 25 (1976), no. 3-4, 287–304.
- F. Montagna. *The predicate modal logic of provability*. Notre Dame Journal of Formal Logic 25 (1984), 179–189.
- C. Smoryński. *Self-Reference and Modal Logic*. Springer, New York, 1985.
- S. Artemov; G. Dzhabaridze. *Finite Kripke models and predicate logics of provability*, J. Symbolic Logic 55 (1990), no. 3, 1090–1098.
- G. Boolos. *The logic of provability*. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- G. Dzhabaridze and D. de Jongh. *The Logic of Provability*. Handbook of Proof Theory. North holland, 1998.
- S. Artemov and Lev D. Beklemishev. *Provability logic*. Handbook of Philosophical Logic. Springer, 2005.
- T. Kurahashi. *Semantical Analysis of Predicate Modal Logic of Provability*. Master's Thesis, Kobe University, 2011.
- T. Kurahashi. *Arithmetical interpretations and Kripke frames of predicate modal logic of provability*. preprint.