First-order Provability Logic

倉橋　太志

神戸大学 M2

2010 年 11 月 20 日　数学基礎論若手の会

GL: **Propositional modal logic**

- **Kripke completeness theorem for** GL **(Segerberg, 1971)**
- **Arithmetical completeness theorem for** GL **(Solovay, 1976)**

QGL: **First-order modal logic (**GL **を自然に拡張)**

- QGL **におけるさまざまな反例 (Montagna, 1984)**
- **First-order Provability Logic は再帰的公理化可能でない (Artemov, 1985)(Vardanyan, 1985)**

目次

1. Propositional provability logic
2. 述語様相体系 QGL と Kripke model
3. Montagna の結果
4. Interpretations
5. 更なる結果と問題

1. **Propositional provability logic**
2. 述語様相体系 QGL と Kripke model
3. Montagna の結果
4. Interpretations
5. 更なる結果と問題

T : Σ_1-sound な PA の r.e. 拡大理論とする.

Provability predicate

- T の provability predicate $\mathrm{Pr}_T(x)$ は
  $\forall\varphi$: sentence,
  $$T \vdash \varphi \iff \text{PA} \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\varphi\urcorner)$$
  を満たす Σ_1-論理式.
- Gödel は $\mathrm{Pr}_T(x)$ を用いて不完全性定理を証明した.
  (PA $\vdash \sigma \leftrightarrow \neg\mathrm{Pr}_T(\ulcorner\sigma\urcorner)$.)
- $\forall\varphi,\psi$: sentences,
  - PA $\vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\mathrm{Pr}_T(\ulcorner\varphi\urcorner)\urcorner)$
  - PA $\vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\varphi \to \psi\urcorner) \to (\mathrm{Pr}_T(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\psi\urcorner))$
  - PA $\vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\mathrm{Pr}_T(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \varphi\urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\varphi\urcorner)$.

Gödel の問題 (1933)

様相演算子 $\Box$ を証明可能性として解釈する様相論理の体系はあるか？

様相論理 (Modal logic): "必然性" と "可能性" に関する論理．
$\Box$：「〜は必然である」，$\Diamond$：「〜は可能である」．
$\Diamond p \leftrightarrow \neg\Box\neg p$, $\Box p \leftrightarrow \neg\Diamond\neg p$．

$\Box$：「〜は証明可能である」とすれば
$\Diamond$：「〜は無矛盾である」．

Gödel の問題への１つの答え (Solovay, 1976)

Provability predicate $\mathrm{Pr}_T(x)$ に関して T の証明できる事実は命題様相体系 GL の定理と一致する.

$*$: 様相文から算術の文への翻訳:
$p \mapsto \varphi$ (p: 命題変数，φ: 算術のある文)，
$\Box A \mapsto \mathrm{Pr}_T(\ulcorner A^* \urcorner)$.
例: $(\neg p \land \Box \neg p)^* \equiv \neg \varphi \land \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \neg \varphi \urcorner)$.

First arithmetical completeness theorem (Solovay, 1976)

任意の命題様相文 A に対して

$$\mathsf{GL} \vdash A \iff \forall *,\ T \vdash A^*.$$

Second arithmetical completeness theorem (Solovay, 1976)

任意の命題様相文 A に対して

$$\mathsf{GLS} \vdash A \iff \forall *,\ \mathbb{N} \models A^*.$$

PA の任意の Σ_1-sound な r.e. 拡大理論 T で成立する.

任意の命題命題様相文 A に対して以下は同値:

(i) GL $\vdash A$;

(ii) $\prec$: 推移的・conversely well-founded である任意の Kripke frame $\mathcal{M} = \langle W, \prec \rangle$ で A は valid;

(iii) $\forall *,\ T \vdash A^*$.

メインテーマ

以上の議論を一階述語様相論理に拡張できるか？

問題 1: Kripke completeness が成立するか？((i) と (ii))

問題 2: Solovay の定理が成立するか？((i) と (iii))

問題 3: (ii) と (iii) の関係は？

1. Propositional provability logic
2. **述語様相体系 QGL と Kripke model**
3. Montagna の結果
4. Interpretations
5. 更なる結果と問題

述語様相論理の言語

- 変数記号: $v_0, v_1, \ldots$;
- k 変数述語記号: $P_0^k(\vec{x}), P_1^k(\vec{x}), \ldots$;
- 論理記号: $\bot, \to, \forall$;
- 様相演算子: $\Box$ (ただし $\Diamond A :\equiv \neg\Box\neg A$).

述語様相体系 QGL

- 推論規則:

  modus ponens $A, A \to B / B$

  generalization $A(x) / \forall x A(x)$

  necessitation $A / \Box A$

- 公理:
  - 述語様相論理の言語の全ての恒真式
  - $\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$
  - $\Box(\Box A \to A) \to \Box A$

定義 (Kripke model)

- 空でない集合 W とその上の二項関係 $\prec$,
  空でない集合の列 $\{D_w\}_{w \in W}$ $(x \prec y \Rightarrow D_x \subseteq D_y)$
  の組 $\langle W, \prec, \{D_w\}_{w \in W} \rangle$ を Kripke frame という.
- Kripke frame $\langle W, \prec, \{D_w\}_{w \in W} \rangle$ と,
  $w \in W$ と述語記号の閉インスタンス $Q(\vec{a})$ $(\vec{a} \in D_w^k)$ の関係 $\Vdash$
  の組 $\langle W, \prec, \{D_w\}_{w \in W}, \Vdash \rangle$ を Kripke model という.
- Kripke model $\mathcal{M} = \langle W, \prec, \{D_w\}_{w \in W}, \Vdash \rangle$ に対して
  - W を $\mathcal{M}$ の universe,
  - W の元を world,
  - $\prec$ を $\mathcal{M}$ の accessibility relation,
  - D_w を w の domain,
  - $\Vdash$ を $\mathcal{M}$ の valuation

  という.

定義

任意の述語様相論理式 $Q(\vec{x})$,
Kripke model $\mathcal{M} = \langle W, \prec, \{D_w\}_{w \in W}, \Vdash \rangle$,
$w \in W$, $\vec{a} \in D_w^k$ に対して 関係

$$\mathcal{M}, w \Vdash Q(\vec{a})$$

を以下で定義する.

- $\mathcal{M}, w \Vdash P^k(\vec{a}) \iff w \Vdash P^k(\vec{a})$
  ($P^k(\vec{a})$: 述語記号の閉インスタンス);
- $\mathcal{M}, w \nVdash \bot$;
- $\mathcal{M}, w \Vdash A \to B \iff (\mathcal{M}, w \Vdash A \Longrightarrow \mathcal{M}, w \Vdash B)$;
- $\mathcal{M}, w \Vdash \forall x Q(x) \iff \forall b \in D_w(\mathcal{M}, w \Vdash Q(b))$;
- $\mathcal{M}, w \Vdash \Box A \iff \forall x \in W(w \prec x \Longrightarrow \mathcal{M}, x \Vdash A)$.

L を述語様相体系とする．

定義 (validity)

Kripke frame $\mathcal{F} = \langle W, \prec, \{D_w\}_{w \in W} \rangle$ と
Kripke model $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, \Vdash \rangle$，述語様相文 A に対して，

- A は $\mathcal{M}$ において valid $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall w \in W$, $w \Vdash A$;
- A は $\mathcal{F}$ において valid $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ $\mathcal{F}$ を frame としてもつ任意の model で A は valid．
- L が $\mathcal{M}(\mathcal{F})$ において valid $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ L の公理がすべて $\mathcal{M}(\mathcal{F})$ において valid．

Kripke soundness theorem

$L \vdash A \Rightarrow L$ を valid とする全ての model で A は valid．

定義 (completeness)

- L は Kripke frame complete $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ $\forall A$(L を valid とする全ての frame で A は valid $\Rightarrow L \vdash A$).

問題 1

QGL は Kripke frame complete か？

定理

Kripke frame $\mathcal{F} = \langle W, \prec, \{D_w\}_{w \in W} \rangle$ に対して以下は同値:

- QGL は $\mathcal{F}$ において valid;
- $\prec$ が推移的かつ conversely well-founded.

このような frame を QGL-frame という.

定義（arithmetical interpretation）

述語様相論理式から T の言語の論理式への翻訳

T-interpretation $*$ を以下で帰納的に定義する:

- 各 k-変数述語記号 $P_i^k(\vec{x})$ に対して $(P_i^k(\vec{x}))^*$ は算術の言語のある k-変数論理式;
- $\perp^* \equiv \ 0 = 1$;
- $(A(\vec{x}) \to B(\vec{y}))^* \equiv (A^*(\vec{x}) \to B^*(\vec{y}))$;
- $(\forall x A(x, \vec{y}))^* \equiv \forall x A^*(x, \vec{y})$;
- $(\Box A(\vec{x}))^* \equiv \mathrm{Pr}_T(\ulcorner A^*(\dot{\vec{x}}) \urcorner)$.

$\ulcorner A^*(\dot{\vec{x}}) \urcorner$ は $\vec{a} \mapsto \ulcorner A^*(\vec{a}) \urcorner$ を満たす原始帰納的関数.

$(\Box A(\vec{x}))^*$ は $\Box A(\vec{x})$ と等しい自由変数をもつ.

定義

A を述語様相文とする．

- A は T-valid $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ $\forall *$: T-interpretation, $T \vdash A^*$;
- A は T-true $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ $\forall *$: T-interpretation, $\mathbb{N} \models A^*$.

Arithmetical soundness theorem

任意の述語様相文 A に対して，

QGL $\vdash A \Rightarrow A$ は T-valid．

問題 2

任意の述語様相文 A に対して，

A は T-valid $\Rightarrow$ QGL $\vdash A$

が成り立つか？

1. Propositional provability logic
2. 述語様相体系 QGL と Kripke model
3. **Montagna の結果**
4. Interpretations
5. 更なる結果と問題

定理 (Montagna, 1984)

QGL **は Kripke frame complete でない．**

問題 1

QGL **は Kripke frame complete か？**$\cdots$✕

定理 (Montagna, 1984)

$\exists A$: **述語様相文 s.t.**

A **は** PA-valid **かつ** QGL $\nvdash A$ **かつ** ZF-valid **でない．**

問題 2 (for PA)

任意の述語様相文 A **に対して，**

A **は PA-valid** $\Rightarrow$ **QGL** $\vdash A$

が成り立つか？$\cdots$✕

- PA-valid な sentences をすべて枚挙するには QGL では公理が足りない．
- どれだけ公理を加えればいいのか？
- そもそも枚挙する効果的手続きは存在するのか？

問題 2'

集合 $\{A : A$ は T-valid$\}$ は r.e. か？

問題 2''

集合 $\{A : A$ は T-true$\}$ は r.e. か？

1. Propositional provability logic
2. 述語様相体系 QGL と Kripke model
3. Montagna の結果
4. **Interpretations**
5. 更なる結果と問題

定理 (Artemov,1985)

T を sound な PA の r.e. 拡大理論とする．このとき，$\{\ulcorner A \urcorner : A$ は T-true$\}$ は算術的でない．

定理 (Vardanyan,1985)

T を sound な PA の r.e. 拡大理論とする．このとき，$\{\ulcorner A \urcorner : A$ は T-valid$\}$ は Π^0_2-complete．

問題 2'

集合 $\{A : A$ は T-valid$\}$ は r.e. か？…×

問題 2''

集合 $\{A : A$ は T-true$\}$ は r.e. か？…×

算術の言語は $E(x,y)$，$A(x,y,z)$，$M(x,y,z)$ のみからなるとする．ただしこれらは，$\mathbb{N}$ において $x = y, x + y = z, x \times y = z$ と解釈される．

定理 (Artemov,1985)

T を sound な PA の r.e. 拡大理論とする．このとき，$\{\ulcorner A \urcorner : A$ は T-true$\}$ は算術的でない．

証明には次の事実を用いる．

Tennenbaum **の定理 (からの帰結)**

$\exists\beta$: **算術の文** s.t.

- $\mathbb{N} \models \beta$
- $\forall M \models \beta(M$ の domain は ω，M で E, A, M が再帰的 $\Rightarrow M \equiv \mathbb{N})$．

$$C :\equiv \forall x \forall y(\Box E(x,y) \vee \Box\neg E(x,y))$$
$$\wedge \forall x \forall y \forall z(\Box A(x,y,z) \vee \Box\neg A(x,y,z))$$
$$\wedge \forall x \forall y \forall z(\Box M(x,y,z) \vee \Box\neg M(x,y,z)).$$

C のアイディア

$\mathbb{N} \models C^*$ とすると，

- $\mathbb{N} \models \forall x \forall y(\mathrm{Pr}_T(\ulcorner E^*(\dot{x},\dot{y})\urcorner) \vee \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \neg E^*(\dot{x},\dot{y})\urcorner))$.
- $\forall m \forall n \in \omega$, $T \vdash E^*(\bar{m},\bar{n})$ or $T \vdash \neg E^*(\bar{m},\bar{n})$.
- T: sound かつ r.e. ならば，E^*, A^*, M^* は ω 上で再帰的．

補題

$\forall \varphi$: sentence,

$$\mathbb{N} \models \varphi \iff \forall *,\ \mathbb{N} \models (\beta \wedge C \to \varphi)^*.$$

$\mathbb{N} \models \varphi \Rightarrow \forall *,\ \mathbb{N} \models (\beta \wedge C \rightarrow \varphi)^*$:

$*$ を任意の T-interpretation，$\mathbb{N} \models \varphi \wedge \beta^* \wedge C^*$ とする．

- T: sound かつ r.e. より，E^*, A^*, M^* は ω 上で再帰的．
- ω を domain としてもつ構造 $\mathcal{M}$ を

$$\mathcal{M} \models E(m,n) \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \mathbb{N} \models E^*(m,n)$$
$$\mathcal{M} \models A(k,m,n) \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \mathbb{N} \models A^*(k,m,n)$$
$$\mathcal{M} \models M(k,m,n) \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \mathbb{N} \models M^*(k,m,n)$$

  とする．
- $\forall \psi, \mathcal{M} \models \psi \Leftrightarrow \mathbb{N} \models \psi^*$ なので $\mathcal{M} \models \beta$．
- Tennenbaum の定理より $\mathcal{M} \equiv \mathbb{N}$ なので $\mathcal{M} \models \varphi$．
- $\mathbb{N} \models \varphi^*$．

□

$\mathbb{N} \models \varphi \Leftarrow \forall *, \mathbb{N} \models (\beta \wedge C \to \varphi)^*$:

$\mathbb{N} \models \neg\varphi$ とする.

- $*$ を trivial な interpretation (i.e. E^* は E など) とすると, $\mathbb{N} \models \beta^* \wedge \neg\varphi^*$.
- $\mathbb{N} \models \forall x \forall y (\mathrm{Pr}_T(\ulcorner E(\dot{x}, \dot{y}) \urcorner) \vee \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \neg E(\dot{x}, \dot{y}) \urcorner))$. なので $\mathbb{N} \models C^*$.

$\square$

補題より定理が従う.

証明.

- $\{\ulcorner A \urcorner : A$ は T-true$\}$ から TA $= \{\ulcorner \varphi \urcorner : \mathbb{N} \models \varphi\}$ は計算可能.
- Tarski の定理より TA は算術的でないので, $\{\ulcorner A \urcorner : A$ は T-true$\}$ も算術的でない.

$\square$

定理 (Vardanyan,1985)

T を sound な PA の r.e. 拡大理論とする．このとき，
$\{\ulcorner A \urcorner : A$ は T-valid$\}$ は Π^0_2-complete．

補題

$X \in \mathcal{P}(\omega)$ とする．
X が $\Pi^0_2 \Leftrightarrow$ ある再帰的述語 Q に対して
$X = \{n : \forall i \exists j (j > i \land Q(n, j))\}$．

証明.

- 再帰的述語 R について $X = \{n : \forall k \exists m R(k, m, n)\}$．
- 再帰的述語 Q を，$Q(n, j) \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} j$ は $\forall k < \mathrm{length}(j)$, $(j)_k = \min\{m : R(k, m, n)\}$ を満たす有限列のコード．
- $X = \{n : \forall i \exists j (j > i \land Q(n, j))\}$．

$G(x)$: 新しい述語記号
$D :\equiv \forall z \forall z'(E(z,z') \to (\Box G(z) \leftrightarrow \Box G(z')))$
$H(x,y)$: "x は入力 y で停止する T.M."
を形式化した Σ_1-論理式.

証明

X を Π^0_2 とする.

- 補題より，再帰的述語 Q について
  $X = \{n : \forall i \exists j (j > i \wedge Q(n,j))\}$.
- $\sigma(x,y)$ は T において $Q(x,y)$ を表現する Σ_1-論理式.
- 各 $n \in \omega$ に対し，φ_n を次の文とする:
  $\beta \wedge C \wedge D \to \exists v \exists w (v < w \wedge \sigma(\bar{n}, w) \wedge \forall z (\Box G(z) \leftrightarrow H(v,z)))$
- $X = \{n : \forall *, T \vdash \varphi^*_n\}$ を示せばよい.

$\forall *$, $T \vdash \varphi_n^* \Rightarrow n \in X$:

$\forall *$, $T \vdash \varphi_n^*$ とする.

- $*_i$ は, E, A, M をそのまま, $(G(z))^* \equiv E(z, \bar{i})$ とする.
- 各 i について $T \vdash \varphi_n^{*_i}$.
- T: sound, $\mathbb{N} \models \beta^{*_i} \wedge C^{*_i} \wedge D^{*_i}$,
  $\mathbb{N} \models \mathrm{Pr}_T(\ulcorner E(\dot{z}, \bar{i}) \urcorner) \leftrightarrow E(z, \bar{i})$ より,
  $\mathbb{N} \models \exists v \exists w (v < w \wedge \sigma(\bar{n}, w) \wedge \forall z (E(z, \bar{i}) \leftrightarrow H(v, z)))$.
- このような v を v_i とかけば, v_i は入力 i のみで停止する T.M. なので $i \neq j \Rightarrow v_i \neq v_j$.
- $\mathbb{N} \models \exists w (v_i < w \wedge \sigma(\bar{n}, w))$ を満たす v_i が無限個存在するので $n \in X$.

$\square$

$$\beta \wedge C \wedge D \rightarrow \exists v \exists w (v < w \wedge \sigma(\bar{n}, w) \wedge \forall z (\Box G(z) \leftrightarrow H(v, z)))$$

$\forall *,\ T \vdash \varphi^*_n \Leftarrow n \in X$:

$n \in X$，$*$ を任意の T-interpretation とする．

- $M \models T$ を domain が ω で $M \models \beta^* \wedge C^* \wedge D^*$ とする．
- Tennenbaum の定理による議論を形式化して
  $\forall \psi,\ T \vdash \beta^* \wedge C^* \to (\psi \leftrightarrow \psi^*)$．
- $\exists a \in \omega$ s.t. $M \models \forall z(\mathrm{Pr}_T(\ulcorner G^*(\dot{z}) \urcorner) \leftrightarrow H^*(\bar{a}, z))$．
- $\mathbb{N} \models \exists w(\bar{a} < w \wedge \sigma(\bar{n}, w))$ より
  $M \models \exists w(\bar{a} < w \wedge \sigma(\bar{n}, w))$．
- $M \models \exists w(\bar{a} <^* w \wedge \sigma^*(\bar{n}, w))$．
- $M \models \exists v \exists w(v < w \wedge \sigma_n(w) \wedge \forall z(\Box G(z) \leftrightarrow H(v, z)))^*$．

$\square$

1. Propositional provability logic
2. 述語様相体系 QGL と Kripke model
3. Montagna の結果
4. Interpretations
5. **更なる結果と問題**

定理 (G. Boolos, V. McGee，and V. Vardanyan, 1987)

集合 $\{\ulcorner A \urcorner : A$ は T-true $\}$ は集合 TA $= \{\ulcorner \varphi \urcorner : \mathbb{N} \models \varphi\}$ において Π^0_1-complete である．

問題 3

次の２つの主張の関係は？

(ii) A **は任意の** QGL-frame **で valid;**

(iii) A **は** T-**valid．**

定理 (S. Artemov and G. Dzhaparidze, 1990)

A **は** T-**valid** $\Rightarrow$

A **は universe と各 domain がすべて有限である任意の** QGL-frame **で valid．**

Montagna 予想

任意の述語様相文 A に対して
QGL $\vdash A \Leftrightarrow$
$\forall T$: PA の r.e. 拡大理論，A は T-valid．

問題 3'

任意の述語様相文 A に対して
A: 任意の QGL-frame で valid $\Rightarrow$
$\forall T$: PA の r.e. 拡大理論，A は T-valid
が成り立つか？

QGL の Kripke frame incompleteness より，これらは両立しない．

参考文献

- G. Boolos. *The logic of provability*. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- C. Smoryński. *Self-Reference and Modal Logic*. Springer, New York, 1985.
- G. Japaridze and D. de Jongh. *The Logic of Provability*. Handbook of Proof Theory. North holland, 1998.
- Sergri N. Artemov and Lev D. Beklemishev. *Provability logic*. Handbook of Philosophical Logic. Springer, 2005.
- F. Montagna. *The predicate modal logic of provability*. Notre Dame Journal of Formal Logic, 25, 179–189, 1984.
- Sergri N. Artemov. *Nonarithmeticity of the truth predicate logics of provability*. Doklady Akademii nauk SSSR, 284, 270–271, 1985.