Berry の逆理に基づく Boolos の不完全性定理の証明について

倉橋 太志　　酒井 拓史　　菊池 誠

神戸大 工

2010 年 3 月 24 日　日本数学会 2010 年度年会

算術	**Boolos(1989)** $\Rightarrow$	**Kikuchi and Tanaka (1994),** **Kikuchi (1994)**

論理式 φ が自然数 n を名指す

- Boolos (1989)

$$\mathbb{N} \models \varphi(\bar{n}) \land \forall x \forall y(\varphi(x) \land \varphi(y) \to x = y)$$

- Kikuchi and Tanaka (1994)

$$\mathcal{M} \models \varphi(\bar{n}) \land \forall x \forall y(\varphi(x) \land \varphi(y) \to x = y)$$

- Kikuchi (1994)

$$\mathbf{PA} \vdash \varphi(\bar{n}) \land \forall x \forall y(\varphi(x) \land \varphi(y) \to x = y)$$

情報	Chaitin (1974)
集合論	Vopěnka (1966)

得た結果

1. **Boolos** に基づく第一不完全性定理は対角線論法を用いても証明でき，
   第二不完全性定理はモデル論的手法を用いずに証明できる．
2. **Kikuchi** の証明は，論理式をプログラム，証明を計算過程と考えると **Chaitin** の証明の特別な場合となる．
3. **Vopěnka** の証明を算術に書き換えることができ，そのときの名指すことの定義は **Kikuchi and Tanaka** のものとなる．

Vopěnka の証明について

定義

$\mathcal{M} \models \mathbf{ZF}$ とする.

φ が $\mathcal{M}$ 上で n を名指す

$\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \mathcal{M} \models \varphi(\bar{n}) \wedge \forall x \forall y (\varphi(x) \wedge \varphi(y) \to x = y)$.

定義

$\mathcal{M}, \mathcal{N} \models \mathbf{ZF}$ とする.

$$\mathcal{N} \triangleleft \mathcal{M} \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \mathcal{N} \in \mathcal{M} \ \& \ \mathcal{M} \models \text{“}\mathcal{N} \models \mathbf{ZF}\text{”}.$$

$\mathbf{ZF} \vdash \mathbf{Con(ZF)}$ と仮定.

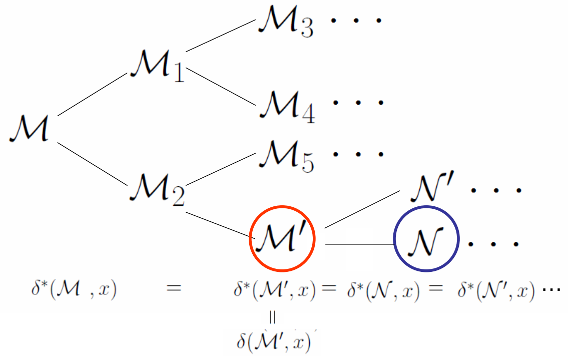
事実 (完全性定理)

$\forall \mathcal{M} \models \mathbf{ZF}\ \exists \mathcal{N} \models \mathbf{ZF}$ s.t. $\mathcal{N} \triangleleft \mathcal{M}$.

定義

$\mathcal{M} \models \mathbf{ZF}$ とする.

- $\delta(\mathcal{M}, x) := \mathcal{M}$ において長さ x 以下の論理式で名指せない最小の自然数;
- $\delta^*(\mathcal{M}, x) := \max\{\delta(\mathcal{N}, x) \mid \mathcal{N} \triangleleft \mathcal{M}\}$.



- $\mathcal{M} :=\ \delta^*(\mathcal{M}, x)$ が最小となる $\mathcal{M} \models$ **ZF**.
- $\mathcal{M}' :=\ \delta^*(\mathcal{M}, x) = \delta(\mathcal{M}', x)$ となる $\mathcal{M}' \triangleleft \mathcal{M}$.
- $\exists \mathcal{N} \triangleleft \mathcal{M}'$ **s.t.**
  $\delta^*(\mathcal{N}, x)(= \delta(\mathcal{M}', x))$ が $\mathcal{M}'$ で定義可能.
- 矛盾.

この議論を算術に書き換える.

定義

$\mathcal{M} \models \mathsf{PA}$ とする.

φ が $\mathcal{M}$ 上で n を名指す

$\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \mathcal{M} \models \varphi(\bar{n}) \land \forall x \forall y (\varphi(x) \land \varphi(y) \to x = y)$.

方針

- 算術のモデル間に $\lhd$ を定める.
- δ^* を表す論理式を構成する.

定義

$\mathcal{M}, \mathcal{N} \models \mathbf{PA}$ とする.

$\mathcal{N} \lhd \mathcal{M}$

$\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ $\mathcal{N}$ は $\mathcal{M}$ 上でパラメータを含む Σ_2-論理式で定義可能.

$\mathbf{PA} \vdash \mathrm{Con}(\mathbf{PA})$ と仮定.

事実 (算術化された完全性定理)

$\forall \mathcal{M} \models \mathbf{PA}\ \exists \mathcal{N} \models \mathbf{PA}$ s.t. $\mathcal{N} \lhd \mathcal{M}$.

$\delta(\mathcal{M}, x), \delta^*(\mathcal{M}, x)$ を Vopěnka と同様に定義.

結果

- $\Phi(x, a)$: Σ_2-論理式 によって $\mathcal{N} \lhd \mathcal{M}$
$\Longrightarrow$ $\mathsf{Sat}_{\Sigma_2}(\ulcorner\Phi(x, y)\urcorner, \langle x, a\rangle)$ によって $\mathcal{N} \lhd \mathcal{M}$.
- $\exists\mathcal{M} \models$ PA s.t.
$\mathsf{Sat}_{\Sigma_2}(x, y)$ を用いると $\mathcal{M}$ 上で $\delta^*(\mathcal{M}, x)(= \delta(\mathcal{M}.x))$ が定義可能.
- Vopěnka の証明と同様に矛盾.

参考文献

- **G. Boolos,** *A new proof of the Gödel incompleteness theorem*, **Notes Am. Math. Soc. 36 (1989), 388-390.**
- **G. Chaitin,** *Information-theoretic Limitations of Formal Systems*, **IEEE Trans. Information Theory IT-20 (1974), 10–15.**
- **M. Kikuchi,** *A note on Boolos' proof of the incompleteness theorem*, **Math. Logic Quart. 40 (1994), no. 4, 528–532.**
- **M. Kikuchi; K. Tanaka,** *On Formalization of Model-Theoretic Proofs of Gödel's Theorems*, **Notre Dame J. Formal Logic Volume 35, Number 3 (1994), 403-412.**
- **P. Vopěnka,** *A new proof of the Gödel's result on non-provability of consistency*, **Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 14 (1966), 111–116.**