

連続時間区分的アファインシステムのモデル予測制御と 事前計算による高速解法

田崎 勇一*・井村 順一*

Model Predictive Control of Continuous-time Piecewise Affine Systems
and its Precomputation-based Implementation

Yuichi TAZAKI* and Jun-ichi IMURA*

This paper deals with model predictive control of continuous-time piecewise affine (CTPWA) systems. First, the finite-horizon optimal control problem of CTPWA systems is reduced, with certain suboptimality, to the optimization problem of mode sequences and intermediate state sequences. Next, an implementation method based on a precomputation technique is proposed. In the offline phase, this method computes, for every mode sequence, the set of feasible initial states and a lower bound of the cost function associated with it. Then at each sampling time in the online phase, the controller determines the optimal mode sequence and the optimal intermediate state sequence over a prediction horizon, taking advantage of the precomputed information. By effectively distributing the computation over the offline phase and the online phase, real-time control is achieved, striking a good balance between the amount of precomputed data and the online computation time. The effectiveness of the proposed method has been evaluated with a simple example of CTPWA systems by numerical simulations.

Key Words: Model Predictive Control, Continuous-time Piecewise Affine Systems, Precomputation

1. はじめに

ハイブリッドシステムとは、連続なダイナミクスと離散事象が混在するシステムの総称であり、実世界に存在する広範なクラスの制御対象をモデル化することができる。本論文は、ハイブリッドシステムの一つである連続時間区分的アファインシステム（以下 CTPWA システム）のモデル予測制御を考える。モデル予測制御とは、各サンプル時刻において有限時間最適制御問題を解き、得られた制御入力を次のサンプル時刻まで印加する操作を繰り返す制御手法である。モデル予測制御には様々な制御仕様を評価関数や制約条件の形で直接的に記述することができるという利点がある。

近年、ロボットや自動車といった時間変化の急激な制御対象にモデル予測制御を適用することに対する関心が高まってきた。これを実現するには、リアルタイムにおける計算負荷を削減することが必要不可欠な課題である。これに対して、必要な計算の大部分を事前に計算するオフライン手法が有効であると考えられる^{1) 2) 4)}。しかしながら、既存の多くのオフライン手法は、状態変数の次元や予測ホライズンが増大するにつれて事前計算すべきデータ量が膨大になってしまうという共通の問題を抱えている。その代わりに、計算をオフラ

インとオンラインとの間でうまく配分することによって、事前計算データ量と実時間計算量とのバランスが得られるものと期待される。

一方、歩行ロボットのように連続時間上の任意の時点で離散状態（足と地面との接触状態など）が変化する制御対象を離散時間 PWA²⁾あるいはサンプル値 PWA³⁾でモデル化すると、サンプル時刻間のある時点において制御対象の離散状態とモデルの離散状態との間に不一致が生じる可能性があり、これは予測誤差の要因となり得る。このような現象を避けるためには、離散状態（モード）の連続時間上の変化を陽に考慮する必要がある。

これらの背景を踏まえ、本論文では CTPWA システムのモデル予測制御に対してモードの連続時間変化を陽に考慮した制御手法を示し、同時に、事前計算を利用した高速な解法を提案する。本論文の構成を述べる。第 2 節では、CTPWA システムの有限時間最適制御問題を定式化し、この問題がモード系列および中間目標状態列の最適化問題に変形できることを示す。第 3 節では、提案手法で事前計算される情報の定義およびその計算法について述べる。続いて第 4 節では、事前計算情報を有効利用したモデル予測制御のアルゴリズムを提示する。第 5 節では単振り子モデルを区分的線形近似して得られる CTPWA システムに提案手法を適用し、数値シミュレーションによってその有効性を検証する。最後に第 6 節において本論文をまとめるとともに今後の課題について述べる。

* 東京工業大学

* Tokyo Institute of Technology

2. 問題の定式化と解法の流れ

本節では CTPWA システムの有限時間最適制御問題を定式化し、その解法の基本的な戦略を述べる。はじめに、以下の CTPWA システムを考える。

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = A_{I(t)}\boldsymbol{x}(t) + a_{I(t)} + B_{I(t)}\boldsymbol{u}(t) \\ \text{if } \boldsymbol{x}(t) \in S_{I(t)} \end{cases} \quad (1)$$

ここで $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ は連続状態、 $\boldsymbol{u} \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ は連続入力、 $I \in \mathcal{M} (= \{1, 2, \dots, M\})$ はモード (離散状態) である。ただし \mathcal{X}, \mathcal{U} はいずれも有界集合とする。また、 $A_I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 、 $B_I \in \mathbb{R}^{n \times m}$ および $a_I \in \mathbb{R}^n$ はモード I に対応するアフィンシステムの係数である。各モード I に割り当てられた領域は \mathbb{R}^n 上の閉じた超凸多面体

$$S_I = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid C_I \boldsymbol{x} \leq d_I \right\} \quad (2)$$

として表わせるものとする。ベクトルに関する不等式 $\boldsymbol{x} \leq \mathbf{0}$ は各成分について $x_i \leq 0$ が成り立つことを意味する。ここで $\bigcup_I S_I = \mathcal{X}$ とする。また、任意の二つのモード I と J について $\text{int}S_I \cap \text{int}S_J = \emptyset$ であり、 $S_I \cap S_J$ は $S_I(S_J)$ の境界に含まれると仮定する。ただし $\text{int}S$ は S の内部を表わす。システムの well-posedness⁵⁾ は仮定せず、制御系設計において解の一意性を保証する。加えて、各モードについて組 (A_I, B_I) の可制御性を仮定する。上のシステムに対するモデル予測制御器を構成するために、次の有限時間最適制御問題を考える。

[問題 1] 初期時刻 t_s 、初期状態 $\boldsymbol{x}_s \in \mathcal{X}$ 、 $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 、 $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 、 $Q_f \in \mathbb{R}^{n \times n}$ および $T > 0$ が与えられたとき、システム (1) に対して

$$J(\boldsymbol{u}) = \int_{t_s}^{t_s+T} \boldsymbol{x}(\tau)' Q \boldsymbol{x}(\tau) + \boldsymbol{u}(\tau)' R \boldsymbol{u}(\tau) d\tau + \boldsymbol{x}(t_s+T)' Q_f \boldsymbol{x}(t_s+T) \quad (3)$$

を最小化する制御入力 \boldsymbol{u} を求めよ。

ここで $Q \geq 0$ 、 $Q_f \geq 0$ 、 $R > 0$ は対称行列である。問題 1 の解を与える最適制御入力を $\boldsymbol{u}^*(t; t_s, \boldsymbol{x}_s, T)$ とおくと、モデル予測制御器はこれを用いて次のように構成できる。

$$\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{u}^*(t; t_k, \boldsymbol{x}(t_k), T) \quad t \in [t_k, t_{k+1}) \quad (4)$$

ここで $t_k = t_0 + kh$ (t_0 は制御開始時刻) で、 $h > 0$ は制御入力の更新周期である。

さて、CTPWA システムの制御問題の難しさは、与えられた入力信号に対する状態軌道が解析的に求まらない点にある。実際、ある初期状態 $\boldsymbol{x}(0)$ と初期モード I 、入力信号 \boldsymbol{u} に対して、状態が切り替え平面 $c' \boldsymbol{x} = 0$ 上に到達する時刻を得るには

$$c' \left\{ e^{At} \boldsymbol{x}(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B \boldsymbol{u}(\tau) d\tau \right\} = 0$$

(c は切り替え平面の法線ベクトル) を t について解く必要が

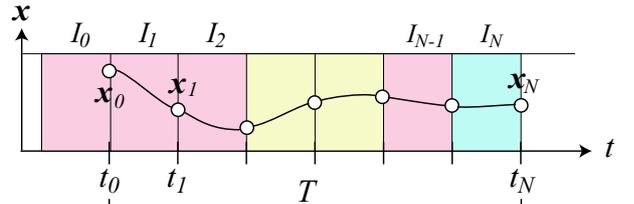


Fig. 1 Relations among $t_{0:N}$, $I_{0:N}$, and $\boldsymbol{x}_{0:N}$.

あるが、上式は t に関する行列指数関数を含むため容易には解けない。この難しさを解決するための本研究の基本的な方針は、入力信号を決定変数とする代わりに、モードが切り替わる時刻と状態の組を考え、その系列を決定変数とすることである。このアイデアはサンプル値 PWA システムの有限時間最適制御問題の既存手法³⁾に根ざしているが、CTPWA システムにおいては、i) 指定した時刻間におけるモードの不変性を拘束条件として扱う必要がある点、ii) 切り替えの前後における解の一意性を保証する必要がある点において追加的な考慮が必要である。

Fig. 1 に示すように、決定変数として予測時間軸上の点列 $t_{0:N} = \{t_0, t_1, \dots, t_N\}$ 、モード系列 $I_{0:N} = \{I_0, I_1, \dots, I_N\}$ 、中間目標状態列 $\boldsymbol{x}_{0:N} = \{\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_N\}$ を導入し、同時に以下の拘束条件を課す。

$$I(t) = I_k \quad \forall t \in [t_{k-1}, t_k) \quad \forall k = 1, 2, \dots, N \quad (5)$$

$$\boldsymbol{x}(t_k) = \boldsymbol{x}_k \quad \forall k = 0, 1, \dots, N \quad (6)$$

ただし $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}_s$ 、 $t_0 = t_s$ 、 $t_N - t_0 = T$ とし、 N を予測ステップ数と呼ぶ。また I_0 の意味については後述する。さらに、時刻 $[t_{k-1}, t_k]$ 間の状態軌道は、以下の固定端問題の解を用いる。

[問題 2] システム $\dot{\boldsymbol{x}} = A_{I_k} \boldsymbol{x} + a_{I_k} + B_{I_k} \boldsymbol{u}$ に対して、 $\boldsymbol{x}(t_{k-1}) = \boldsymbol{x}_{k-1}$ 、 $\boldsymbol{x}(t_k) = \boldsymbol{x}_k$ を満たしつつ評価関数

$$\hat{J}(\boldsymbol{u}) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \boldsymbol{x}(\tau)' Q \boldsymbol{x}(\tau) + \boldsymbol{u}(\tau)' R \boldsymbol{u}(\tau) d\tau \quad (7)$$

を最小化する制御入力 \boldsymbol{u} を求めよ。

問題 2 の解は、以下のように t 、 \boldsymbol{x}_{k-1} および \boldsymbol{x}_k の関数として陽に書き表せることが知られている。

$$\begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{x}}_{I_k}^*(t, \boldsymbol{x}_{k-1}, \boldsymbol{x}_k) \\ \hat{\boldsymbol{u}}_{I_k}^*(t, \boldsymbol{x}_{k-1}, \boldsymbol{x}_k) \end{bmatrix} = Z_{I_k}(t) \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_{k-1} \\ \boldsymbol{x}_k \end{bmatrix} + \zeta_{I_k}(t) \quad (8)$$

$$\left(Z_{I_k}(t) = \begin{bmatrix} Z_{I_k}^{11}(t) & Z_{I_k}^{12}(t) \\ Z_{I_k}^{21}(t) & Z_{I_k}^{22}(t) \end{bmatrix}, \zeta_{I_k}(t) = \begin{bmatrix} \zeta_{I_k}^1(t) \\ \zeta_{I_k}^2(t) \end{bmatrix} \right)$$

$$\begin{aligned} & \hat{J}_{I_k}^*(\boldsymbol{x}_{k-1}, \boldsymbol{x}_k) \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_{k-1} \\ \boldsymbol{x}_k \end{bmatrix}' M_{I_k} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_{k-1} \\ \boldsymbol{x}_k \end{bmatrix} + \mu_{I_k}' \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_{k-1} \\ \boldsymbol{x}_k \end{bmatrix} + m_{I_k} \quad (9) \end{aligned}$$

$\hat{\boldsymbol{u}}_{I_k}^*$ は最適制御入力、 $\hat{\boldsymbol{x}}_{I_k}^*$ は最適状態軌道、 $\hat{J}_{I_k}^*$ は評価関数の最小値である。詳細は付録 A を参照されたい。

式(8)を制御入力とすることで制約条件(6)は満たされる。一方、条件(5)は不等式制約であるばかりでなく解の一意性をも考慮する必要がある、より複雑である。まず、問題を取り扱やすくするために $t_k = t_s + kh$ ($hN = T$) とする。このようにモード遷移を等間隔の時刻上に限定することは本来不必要であるため、得られる解は準最適解となる。一方、ここでは MPC の更新周期とモード遷移周期とを同じ値 ($= h$) とするが、これは説明の簡略化のためであり、両者が異なる値の場合でも以下と同様の議論が成り立つ。

次に、式(5)に対する十分条件として以下の条件を設ける。

$$\begin{cases} C_{I_k} \mathbf{x}(t_{k-1}) < d_{I_k} & (I_{k-1} = I_k) \\ C_{I_{k-1}} \mathbf{x}(t_{k-1}) \leq d_{I_{k-1}} \wedge C_{I_k} \mathbf{x}(t_{k-1}) \leq d_{I_k} \wedge \\ C_{I_{k-1}, I_k} (A_{I_{k-1}} \mathbf{x}(t_{k-1}) + a_{I_{k-1}} + B_{I_{k-1}} \mathbf{u}(t_{k-1})) < \mathbf{0} \wedge \\ C_{I_{k-1}, I_k} (A_{I_k} \mathbf{x}(t_{k-1}) + a_{I_k} + B_{I_k} \mathbf{u}(t_{k-1})) < \mathbf{0} & (I_{k-1} \neq I_k) \end{cases} \quad (10)$$

$$C_{I_k} \mathbf{x}(t) < d_{I_k} \quad \forall t \in (t_{k-1}, t_k) \quad (11)$$

式(10)は、時刻 t_{k-1} においてモードの切り替わりが生じるならば $\mathbf{x}(t_{k-1})$ はモード境界上に存在し、かつ解の一意性を以て保証するために、状態の一次の時間微分が切り替わり前後のモードについて領域 S_{I_k} の内部へ向くことを表す。ここで C_{I_{k-1}, I_k} はモード I_{k-1} と I_k の切り替え平面の法線ベクトル(モード I_{k-1} の領域内部へ向く)である。切り替え平面上において解が一意に存在するための必要十分条件は⁵⁾で述べられているように辞書式不等式で記述されるが、ここでは制御の観点からは一次の時間微分までを考慮すれば十分であると考え。また、中間時刻においては状態がモード領域の内部に留まるように拘束する(式(11))。結局、 I_0 とは初期状態が切り替え平面上にある場合を考慮するために導入された変数だと言える。簡単のために、3つ以上のモードが境界を共有する点上に初期状態がある場合は考慮せず、またこのような点上に中間目標状態を配置しないこととする。

上のような不等式制約を直接問題2に課すと、式(8)のような形で最適解が解析的に得られるという利点が失われてしまう。その代わりに、中間目標状態列の設計において式(10)(11)を考慮する。式(10)に式(8)を代入して \mathbf{x}_{k-1} 、 \mathbf{x}_k に関する以下のような線形不等式を得る。

$$\begin{cases} C_{I_k} \mathbf{x}_{k-1} \leq d_{I_k} - \epsilon \mathbf{1} & (I_{k-1} = I_k) \\ C_{I_{k-1}} \mathbf{x}_{k-1} \leq d_{I_{k-1}} \wedge C_{I_k} \mathbf{x}_{k-1} \leq d_{I_k} \wedge \\ C_{I_{k-1}, I_k} [A_I \ B_I] Z_{I_k}(t_{k-1}) \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k-1} \\ \mathbf{x}_k \end{bmatrix} \\ \leq -C_{I_{k-1}, I_k} ([A_I \ B_I] \zeta_{I_k}(t_{k-1}) + a_I) - \epsilon \mathbf{1} & \\ \forall I = I_{k-1}, I_k & (I_{k-1} \neq I_k) \end{cases} \quad (12)$$

ただし、 $\epsilon > 0$ は厳密な不等号を数値的に扱うために導入する微小な値、 $\mathbf{1}$ は要素が全て1のベクトルである。式(11)にも同様に式(8)を代入すると、 $[\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{x}_k]$ に関する時変の線形不等式となる。ここで、区間 $[t_{k-1}, t_k]$ 上の時刻列 $t_i = t_{k-1} + (h/N_d)i$ ($i = 0, 1, \dots, N_d$) を考え、この各点において離散化することにより時不変の線形不等式に近似する。

$$C_{I_k} [Z_{I_k}^{11}(t_i) \ Z_{I_k}^{12}(t_i)] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k-1} \\ \mathbf{x}_k \end{bmatrix} \leq d_{I_k} - C_{I_k} \zeta_{I_k}^1(t_i) - \epsilon \mathbf{1} \quad \forall i = 1, 2, \dots, N_d - 1 \quad (13)$$

本来 ϵ と N_d の関係はシステムのダイナミクスをも考慮しつつ慎重に決定すべきであるが、ここでは簡単のために両者とも与えられているものとする。より厳密に扱うには⁶⁾の方法が有効であると思われる。

以上の手続きにより、条件(10)(11)は $[\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{x}_k]$ に関する線形不等式

$$\bar{C}_{I_{k-1}, I_k} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k-1} \\ \mathbf{x}_k \end{bmatrix} \leq \bar{d}_{I_{k-1}, I_k} \quad (k = 1, 2, \dots, N) \quad (14)$$

にまとめられる。

上述の設計方針により、問題1は以下のようなモード系列と中間目標状態列に関する最適化問題に変形される。

[問題3] 初期状態 \mathbf{x}_s および予測ステップ数 $N > 0$ は与えられているとする。このときシステム(1)に対して、制約条件

$$\bar{C}_{I_{k-1}, I_k} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k-1} \\ \mathbf{x}_k \end{bmatrix} \leq \bar{d}_{I_{k-1}, I_k} \quad (k = 1, 2, \dots, N) \quad (15)$$

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_s \quad (16)$$

を満たしつつ、評価関数

$$\begin{aligned} J(I_{0:N}, \mathbf{x}_{0:N}) &= \sum_{k=1}^N \left[\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k-1} \\ \mathbf{x}_k \end{bmatrix}' M_{I_k} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k-1} \\ \mathbf{x}_k \end{bmatrix} + \mu_{I_k}' \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k-1} \\ \mathbf{x}_k \end{bmatrix} + m_{I_k} \right] \\ &+ \mathbf{x}_N' Q_f \mathbf{x}_N \end{aligned} \quad (17)$$

を最小化するモード系列 $I_{0:N}$ および中間目標状態列 $\mathbf{x}_{0:N}$ を求めよ。

問題3は、モード系列の最適化と、与えられたモード系列に対する中間目標状態列の最適化という二段構造を持つ。特に、子問題である中間目標状態列の最適化は二次計画問題である。そこで問題3に対してモード系列 $I_{0:N}$ を固定して得られる二次計画問題を $QP(\mathbf{x}_s, I_{0:N})$ と表記し、その最適解が与える評価値を $J^*(\mathbf{x}_s, I_{0:N})$ と置く。また、 $QP(\mathbf{x}_s, I_{0:N})$ から制約条件(16)を取り除いた問題を $\bar{Q}P(I_{0:N})$ とし、対応する最小評価値を $\bar{J}^*(I_{0:N})$ とする。

さて、問題3は付録Bに示す手続きにより混合整数二次計画(MIQP)問題に帰着することが可能であるので、得られ

る MIQP 問題を⁹⁾などの商用ソルバーによって数値的に解くことができる。しかしながら、この方法では比較的小規模なシステムに対しても大きな計算時間を要し、更新周期 h よりも十分に短い時間で毎ステップの計算を完了することは難しい。そこで、本論文では各モード系列に対応する実行可能初期値集合（次節で定義する）および評価値の下界を事前計算し、リアルタイムにおけるモード系列の探索を効率化する手法を提案する。

3. 事前計算情報

本節では、事前計算情報（前もって計算して制御器のメモリに格納しておく情報）の計算法について述べる。まず、モード系列 $I_{0:N}$ に対応する $\bar{Q}P(I_{0:N})$ の実行可能領域を以下のように表記する。

$$\mathcal{F}(I_{0:N}) := \left\{ \mathbf{x}_{0:N} \in \mathcal{X}^{N+1} \mid \bar{C}_{I_{k-1}, I_k} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k-1} \\ \mathbf{x}_k \end{bmatrix} \leq \bar{d}_{I_{k-1}, I_k} \right. \\ \left. \forall k = 1, 2, \dots, N \right\} \quad (18)$$

また、 $\mathcal{F}(I_{0:N})$ を与える線形不等式の係数行列および係数ベクトルをまとめたものをそれぞれ $H(I_{0:N}), K(I_{0:N})$ とおく。すなわち $\mathcal{F}(I_{0:N}) = \{\mathbf{x}_{0:N} \in \mathcal{X}^{N+1} \mid H(I_{0:N})[\mathbf{x}'_0 \mathbf{x}'_1 \dots \mathbf{x}'_N] \leq K(I_{0:N})\}$ である。次に、 $\mathcal{F}(I_{0:N})$ を \mathbf{x}_0 の空間へ射影したものを以下のように定義する。

$$\mathcal{E}(I_{0:N}) := \pi^0(\mathcal{F}(I_{0:N})) \\ = \left\{ \mathbf{x}_0 \in \mathcal{X} \mid \exists \mathbf{x}_{1:N} \in \mathcal{X}^N \text{ s.t. } \{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_{1:N}\} \in \mathcal{F}(I_{0:N}) \right\} \quad (19)$$

初期状態 \mathbf{x}_s が $\mathcal{E}(I_{0:N})$ に含まれるならば、 $QP(\mathbf{x}_s, I_{0:N})$ は実行可能解を持つ（言い換えると、制約条件 (15)(16) を満たす中間目標状態列が存在する）ことが容易に示せる。この意味で、 $\mathcal{E}(I_{0:N})$ をモード系列 $I_{0:N}$ の実行可能初期値集合と呼ぶこととする。 $\mathcal{F}(I_{0:N})$ は $\mathfrak{R}^{(N+1)n}$ 上の超凸多面体であるので、その射影である $\mathcal{E}(I_{0:N})$ は \mathfrak{R}^n 上の超凸多面体である。したがって、その線形不等式表現の係数行列および係数ベクトルを $H^0(I_{0:N}), K^0(I_{0:N})$ として

$$\mathcal{E}(I_{0:N}) = \{\mathbf{x}_0 \in \mathcal{X} \mid H^0(I_{0:N})\mathbf{x}_0 \leq K^0(I_{0:N})\} \quad (20)$$

と表現できる。ゆえに $H^0(I_{0:N})$ と $K^0(I_{0:N})$ が得られれば、初期状態 \mathbf{x}_s の $I_{0:N}$ に関する実行可能性は単に $H^0(I_{0:N})\mathbf{x}_s \leq K^0(I_{0:N})$ を評価することによって判定可能となる。

多くの場合、全ての N ステップモード系列の中で、ある特定の初期状態 \mathbf{x}_s に対して実行可能なものは全体のごく一部である。しかし、 $QP(\mathbf{x}_s, I_{0:N})$ が実行可能解を持つか否かの検証、すなわち実行可能性問題は、二次計画問題それ自体と同等の計算量を要する。これに対し各モード系列の実行可能初期値集合を事前に計算しておけば実際に二次計画問題を解くことなく実行不可能なモード系列を迅速に除外することができる。

もう一つの事前計算情報は二次計画問題 $\bar{Q}P(I_{0:N})$ の評価値である。定義から明らかなように、任意の初期状態 \mathbf{x}_s について $J^*(\mathbf{x}_s, I_{0:N}) \geq \bar{J}^*(I_{0:N})$ が成り立つので、 $\bar{J}^*(I_{0:N})$ が暫定最小評価値よりも大きければ $QP(\mathbf{x}_s, I_{0:N})$ を解くまでもなく $I_{0:N}$ は最適解ではないことが分かる。このようにして実行時に解くべき二次計画問題の数をさらに削減できる。

4. 事前計算を利用したモデル予測制御のアルゴリズム

前節で述べた事前計算情報を利用したモデル予測制御アルゴリズムを示す。

[アルゴリズム]

- 0: $t \leftarrow t_0, \mathbf{x}(t_0) \leftarrow \mathbf{x}_0$.
- 1: $\Theta \leftarrow \emptyset$.
- 2: for each $I_{0:N} \in \mathcal{M}^{N+1}$
- 3: if $H^0(I_{0:N})\mathbf{x}(t) \leq K^0(I_{0:N})$ then add $I_{0:N}$ into Θ .
- 4: end
- 5: Sort Θ in ascending order by using $\bar{J}^*(I_{0:N})$ as a comparison key.
- 6: $J^* \leftarrow \infty$.
- 7: for each $I_{0:N} \in \Theta$
- 8: if $\bar{J}^*(I_{0:N}) < J^*$ then
- 9: solve $QP(\mathbf{x}(t), I_{0:N})$, then denote the obtained minimum cost by J .
- 10: if $J < J^*$ then $J^* \leftarrow J$.
- 11: end
- 12: end
- 13: Denote by $I_{0:N}^*$ and $\mathbf{x}_{0:N}^*$ the mode sequence and the intermediate state sequence that give the optimal cost J^* . Generate continuous time input $\hat{\mathbf{u}}_{I_1^*}^*(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}_1^*)$ by (8) and apply it to the plant during the sampling time interval $[t, t+h)$.
- 14: $t \leftarrow t+h$.
- 15: Go to Step 1.

上のアルゴリズムでは、はじめに $\mathbf{x}(t)$ について実行可能なモード系列を列挙する（第 1~4 行）。次に、列挙されたモード系列を順に評価していき、最適なものを得る（第 5~12 行）。ここで、評価する順序を評価値の下界に関して昇順とし、かつ評価値の下界が暫定最小評価値よりも大きい場合は二次計画問題の計算を省略する。最後に、得られた最適モード系列と最適中間目標状態列の 1 番目の要素を用いて連続時間制御入力を生成し、次の更新時刻まで制御対象に印加する（第 13 行）。

5. 数値例

本手法を簡単な CTPWA システムへ適用した数値例を示す。取り扱う制御対象は、単振り子の動力学モデルを区分的線形近似して得た CTPWA システムである。元となる単振り子の状態方程式は次式で与えられる。

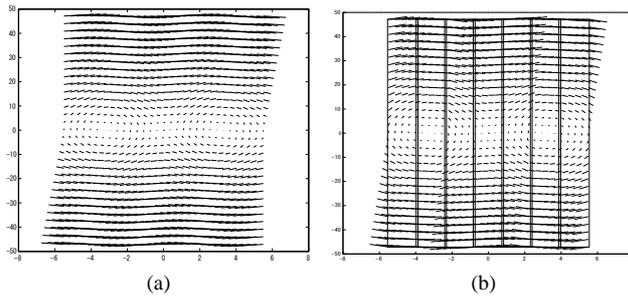


Fig. 2 Phase map of (a) the original pendulum system and (b) the piecewise linearized system

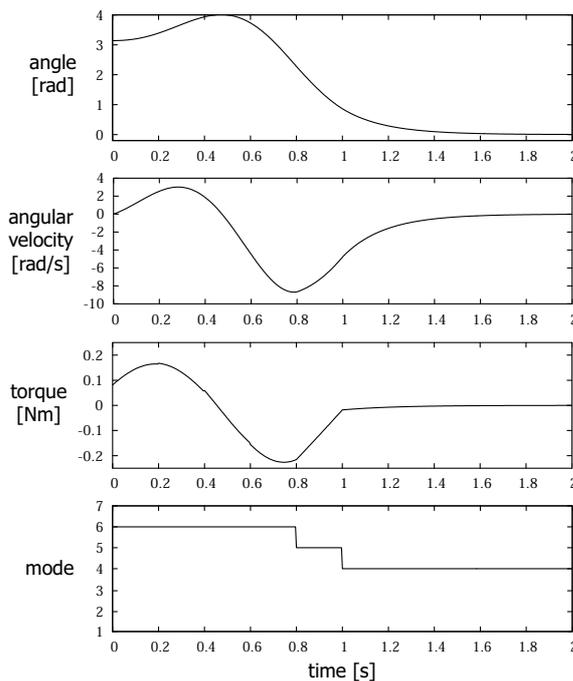


Fig. 3 Trajectory of q , \dot{q} , u , and I

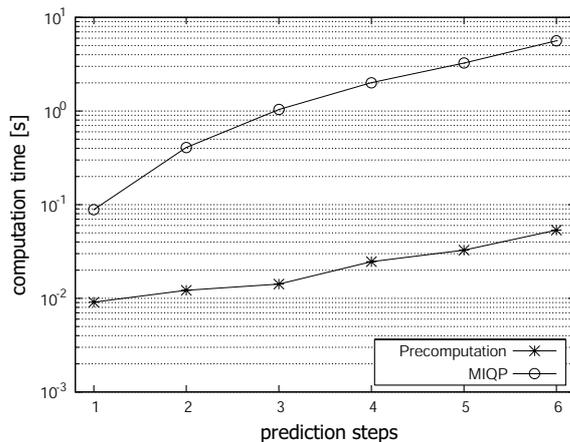


Fig. 4 Comparison of computation time

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{q}(t) \\ \frac{g}{l} \sin q(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{bmatrix} u(t) \quad \left(\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{bmatrix} \right) \quad (21)$$

ここで q [rad] は振り子の角度, \dot{q} [rad/s] は振り子の角速度, u [Nm] は振り子の支点に加えられるトルクである. また, $m = 0.1$ [kg] は振り子先端の質点の質量, $l = 0.3$ [m] は振り子の長さ, $g = 9.8$ [m/s²] は重力加速度である. このシステムに対して, $\mathcal{X} = \{(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^2 \mid q \in [-(7/4)\pi, (7/4)\pi] \wedge \dot{q} \in [-15\pi, 15\pi]\}$, $\mathcal{U} = \{u \in \mathbb{R}^1 \mid u \in [-0.8mgl, 0.8mgl]\}$ とする. 次に, \mathcal{X} を q 軸に沿って 7 等分し, それぞれの区画の中心で式 (21) の右辺をテイラー展開し, 2 次以上の項を無視することで以下の次不変のアフィンシステムを割り当てる.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} \cos \bar{q} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{g}{l} (\sin \bar{q} - \bar{q} \cos \bar{q}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{bmatrix} u(t) \quad (22)$$

ここで \bar{q} は各区画の中心における q の値を表す. 元の単振り子システムおよび以上のようにして得た CTPWA システムのベクトル場を Fig. 2 に示す.

上の CTPWA システム (22) に対して, 前節のアルゴリズムによりモデル予測制御を適用した結果を Fig. 3 に示す. 更新周期 h を 0.2[s], 予測ステップ数 N を 6, 初期状態 \mathbf{x}_0 を $[\pi \ 0]'$ とした. Fig. 3 の最上段から下に向かって, $q(t)$, $\dot{q}(t)$, $u(t)$, $I(t)$ の軌跡である. 図から観察されるように, 課せられた入力制約を満たしつつ振り子を振り上げるために, 一度逆方向に振ることによって十分な速度を得ている. なお, 数値シミュレーションでは各ステップにおける計算による遅れは 0 としている.

Fig. 4 は, 有限時間最適制御問題 (第 2 節の問題 3) の所要計算時間を, 提案手法と MIQP による方法とで比較したものである. 一様ランダムにサンプルした初期状態に関する結果の平均値をプロットした. 両手法共に予測ステップ数 N に対してほぼ指数関数的に計算時間が増大しているが, 値で比較すると, $N = 6$ の場合で提案法 53.5[ms] に対して MIQP による方法では 5626[ms] と, 提案法が大幅に下回っている. また, 事前計算情報のデータサイズは $N = 6$ の場合で約 500[KByte] と, 実装上十分に許容可能なサイズであることを述べておく.

本数値実験はすべて Intel Xeon Processor 2GHz, 2GByte メモリを搭載した計算機上の MATLAB7 で行った. また, 実行可能初期値集合の射影計算には Multi-Parametric Toolbox⁸⁾ を用い, 射影アルゴリズムの内部で解かれる LP, 中間目標状態列の最適化のための QP および比較のための MIQP のソルバにはすべて ILOG Cplex9.0⁹⁾ を用いた.

6. おわりに

本論文では連続時間区分的アフィンシステムのモデル予測制御問題がモード系列および中間目標状態列の最適化問題に (準最適性を以って) 帰着されることを示し, これを実時間で解くための事前計算を利用した実装方法を提案した. 必要な計算をオフラインとオンラインに適切に分配することによって, 事前計算情報を許容可能なサイズに抑えつつ, 実時間制御を実現できることが示された.

最後に今後の課題について述べる．理論的見地からは，モードの切り替わり時刻を一定周期に固定するという本来不必要な条件を取り除くべきである．実用上の観点からは，より高次元，多モードのシステムへ適用が望まれる．ある程度以上の規模のシステムに対しては全モード系列に関して実行可能初期値集合を計算することが難しくなるので，この場合は予測ステップ数よりも短い部分系列のみ事前計算し，これを用いてオンライン探索を行うなどの工夫が必要となるであろう．

参考文献

- 1) A. Bemporad, M. Morari, V. Dua and E.N. Pistikopoulos: The Explicit Linear Quadratic Regulator for Constrained Systems, *Automatica*, **38**-1, 3/20 (2002)
- 2) A. Bemporad, F. Borrelli and M. Morari: Piecewise Linear Optimal Controllers for Hybrid Systems, Proc. of the 2000 American Control Conference, 1190/1194 (2000)
- 3) J. Imura: Optimal Control of Sampled-Data Piecewise Affine Systems, *Automatica*, **40**-4, 661/669 (2004)
- 4) 田崎, 井村: 平面 2 足歩行ロボットのグラフ型モデル予測制御, 第 23 回日本ロボット学会学術講演会 (2005)
- 5) J. Imura: Well-posedness analysis of switch-driven hybrid systems, *IEEE Trans. on Automatic Control*, **48**-11, 1926/1935 (2003)
- 6) 藤岡: 拘束のあるサンプル値サーボ系に対するコマンド整形, ハイブリッドシステム研究交流会シンポジウム, 81/86 (2004)
- 7) S. Azuma and J. Imura: A Probabilistic Approach to Controllability/Reachability Analysis of Hybrid Systems, Proc. of the 43rd IEEE Conference on Decision and Control (CDC04), Bahamas, December 14-17, 485/490 (2004)
- 8) Multi-Parametric Toolbox for MATLAB. <http://control.ee.ethz.ch/~mpt/>
- 9) ILOG CPLEX: High-performance software for mathematical programming and optimization. <http://www.ilog.com>
- 10) A. Bemporad, M. Morari: Control of systems integrating logic, dynamics, and constraints, *Automatica*, **35**-3, 407/427 (1999)

《付 録》

A. 問題 2 の解

$$\hat{\mathbf{u}}_{I_k}^*(t, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{x}_k) = -R^{-1}B' \left((I - PW(t - t_{k-1}))e^{\tilde{A}'(t_k - t)}\eta + P \left(e^{\tilde{A}h}\mathbf{x}_{k-1} + \int_0^{t-t_{k-1}} e^{\tilde{A}\tau}d\tau \tilde{\mathbf{a}} \right) + q \right) \quad (\text{A. 1})$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{I_k}^*(t, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{x}_k) = e^{\tilde{A}(t-t_{k-1})}\mathbf{x}_{k-1} + \int_0^{t-t_{k-1}} e^{\tilde{A}\tau}d\tau \tilde{\mathbf{a}} - W(t - t_{k-1})e^{\tilde{A}'(t_k - t)}\eta \quad (\text{A. 2})$$

$$\hat{J}_{I_k}^*(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{x}_k) = \mathbf{x}_{k-1}'P\mathbf{x}_{k-1} - \mathbf{x}_k'P\mathbf{x}_k - 2q'(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}) - rh + \eta'W(h)\eta \quad (\text{A. 3})$$

ここで P はリカッチ方程式 $A'P + PA - PBR^{-1}B'P + Q = O$ の解である．また, $\tilde{A} = A - BR^{-1}B'P$, $q = -(\tilde{A}')^{-1}Pa$, $r = -(2a'q + q'BR^{-1}B'q)$, $\tilde{\mathbf{a}} = a - BR^{-1}B'q$ である．さらに $W(t) = \int_0^t e^{\tilde{A}\tau}BR^{-1}B'e^{\tilde{A}'\tau}d\tau$, $\eta = W(h)^{-1}\{e^{\tilde{A}h}\mathbf{x}_{k-1} + \int_0^h e^{\tilde{A}\tau}d\tau \tilde{\mathbf{a}} - \mathbf{x}_k\}$ である．これらを $\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{x}_k$ についてまとめると式 (8) のように表記できる．

導出の過程は³⁾で述べられている．

B. 混合整数二次計画問題への帰着

問題 3 を混合整数二次計画 (MIQP) 問題へ帰着する方法を述べる．決定変数として新たに $\tilde{z}_k^i, \bar{z}_k^i \in \mathcal{X}$, $\delta_k^i \in \{0, 1\}$ および $\delta_k^{ij} \in \{0, 1\}$ を導入する．ここで δ_k^i は $[t_{k-1}, t_k)$ のモードが i となることを示す変数, δ_k^{ij} は t_k でモードが i から j へ切り替わることを示す変数, $\tilde{z}_k^i, \bar{z}_k^i$ はそれぞれ $\delta_k^i = 1$ である場合の \mathbf{x}_{k-1} と \mathbf{x}_k に対応する変数である．以上の変数を用いて, 問題 3 の制約条件は

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^M \delta_k^i &= 1 \\ \delta_k^i = 0 &\Rightarrow \tilde{z}_k^i = \bar{z}_k^i = \mathbf{0} \\ \delta_k^{ij} = 1 &\Rightarrow \bar{C}_{i,j} \begin{bmatrix} \tilde{z}_k^j \\ \bar{z}_k^j \end{bmatrix} \leq \bar{d}_{i,j} \\ \delta_0^i = 1 &\Rightarrow \tilde{z}_0^i = \mathbf{x}_s \\ \delta_k^{ij} &= \delta_k^i \wedge \delta_{k+1}^j \\ \delta_k^{ij} = 1 &\Rightarrow \tilde{z}_k^i = \bar{z}_{k+1}^j \end{aligned}$$

評価関数は

$$\sum_{k=0}^{N-1} \sum_{i=1}^M \left[\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tilde{z}_k^i \\ \bar{z}_k^i \end{bmatrix}' M_i \begin{bmatrix} \tilde{z}_k^i \\ \bar{z}_k^i \end{bmatrix} + \mu_i' \begin{bmatrix} \tilde{z}_k^i \\ \bar{z}_k^i \end{bmatrix} + m_i (\delta_k^i)^2 \right]$$

と書き直せる．論理式を含む制約条件を¹⁰⁾の方法を用いて混合整数不等式へ変換することにより MIQP 問題に帰着される．

[著 者 紹 介]

田 崎 勇 一 (学生会員)



1980 年 5 月 21 日生．2005 年 3 月東京工業大学大学院情報理工学研究科情報環境学専攻修士課程卒業．同年 4 月同専攻博士課程進学，現在に至る．ハイブリッドシステム論および歩行ロボットの研究に従事．2007 年 4 月より日本学術振興会特別研究員．日本ロボット学会学生会員．

井 村 順 一 (正会員)



1964 年 10 月 11 日生．92 年京都大学大学院工学研究科博士課程中途退学．同年，京都大学工学部助手．96 年広島大学工学部助教授．2001 年東京工業大学大学院情報理工学研究科助教授．2004 年同教授，現在に至る．98 年 5 月トエンテ大学客員研究員．非線形制御，ハイブリッドシステム論などの研究に従事．博士 (工学)．IEEE, システム制御情報学会, 日本ロボット学会, 日本鉄鋼協会などの会員．