カット消去によるϵ代入法の停止性証明

高橋 優太

名古屋大学・日本学術振興会

数学基礎論 SS2018

1. ϵ 代入の再定式化

2. ϵ 代入法の停止性証明：原証明図の構成

3. ϵ 代入法の停止性証明：弱化補題・カット消去補題

3コマの予定

- 1コマ目：
  1階述語論理に対する ϵ 計算.
  エルブランの定理を ϵ 計算を用いて証明する.
- 2コマ目：
  アッカーマンによる1階算術の無矛盾性証明.
  1階ペアノ算術の無矛盾性を，アッカーマンによる ϵ 代入法 (ϵ-substitution method) を用いて示す.
- 3コマ目 (本コマ)：
  カット消去による ϵ 代入法の停止性証明.
  アッカーマンによる無矛盾性証明における主要部分である，ϵ 代入法の停止性証明を，ミンツにより導入された
  カット消去法により与える.

参考文献

- 本スライドを作成する際には以下を参考にした．

- Arai, T., “Epsilon substitution method for theories of jump hierarchies”, *Arch. Math. Logic* **41**, 123–153 (2002).
- Arai, T., “Exact bounds on epsilon processes.” *Arch. Math. Logic* **50**, 445–458 (2011).
- Mints, G., Tupailo, S. and Buchholz, W., “Epsilon substitution method for elementary analysis”, *Arch. Math. Logic* **35**, 103–130 (1996).

ミンツによるカット消去を用いた停止性証明

- 基本アイデア：無限分岐木を用いることで，正準 ϵ 項に対する値割り当てのあらゆる可能性を考慮する．
- e を正準 ϵ 項として，$e \notin \mathrm{dom}(S)$ をみたす ϵ 代入 S が与えられたとき，S を一つの節とした上で次のような枝の分岐を考える：

$$\begin{tikzcd} S \cup \{(e, ?^\circ)\} & S \cup \{(e, 0)\} & \cdots & S \cup \{(e, n)\} \cdots \ (n \in \mathbb{N}) \\ & & S \arrow[ull] \arrow[ul] \arrow[u, phantom] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

- ミンツに倣い，以下ではこのような分岐をカット (cut) と呼ぶ．

ミンツによるカット消去を用いた停止性証明

- ϵ 代入 $\emptyset$ から出発して，先の無限分岐により成長していく木 $\mathcal{T}$ を考える．
    - 成長の過程で現れた $\mathcal{T}$ のある節 $S \cup \{e, ?^\circ\}$ は，H 規則が適用されてしかも $e = e^{S \cup \{e, ?^\circ\}}$ をみたしているかも．
      $\mathcal{T}$ の枝にこのような節が現れたらその枝の成長を止める．

ミンツによるカット消去を用いた停止性証明

- ϵ 代入 $\emptyset$ から出発して，先の無限分岐により成長していく木 $\mathcal{T}$ を考える．
  - 成長の過程で現れた $\mathcal{T}$ のある節 $S \cup \{e, ?^\circ\}$ は，H 規則が適用されてしかも $e = e^{S \cup \{e, ?^\circ\}}$ をみたしているかも．
    $\mathcal{T}$ の枝にこのような節が現れたらその枝の成長を止める．
  - $\mathcal{T}$ の他のある節 S' は計算において不整合であるかもしれない．さらに，また別の節 S'' は解であるかもしれない．このような S', S'' が枝に現れたときも，そこで成長を止める．

ミンツによるカット消去を用いた停止性証明

- ϵ 代入 $\emptyset$ から出発して，先の無限分岐により成長していく木 $\mathcal{T}$ を考える．
  - 成長の過程で現れた $\mathcal{T}$ のある節 $S \cup \{e, ?^\circ\}$ は，H 規則が適用されてしかも $e = e^{S\cup\{e,?^\circ\}}$ をみたしているかも．
    $\mathcal{T}$ の枝にこのような節が現れたらその枝の成長を止める．
  - $\mathcal{T}$ の他のある節 S' は計算において不整合であるかもしれない．さらに，また別の節 S'' は解であるかもしれない．このような S', S'' が枝に現れたときも，そこで成長を止める．
- すると，ϵ 代入 $\emptyset$ を根とする整礎木 $\mathcal{T}_{wf}$ が得られるはず．
- カット消去による代入の停止性証明は，このような $\mathcal{T}_{wf}$ を剪定したり $\mathcal{T}_{wf}$ に接ぎ木したりすることで，
  根 $\emptyset$ から分岐なしで解に到達する木を構成する．
  - ここでの手順では，$\mathcal{T}_{wf}$ からカット (無限分岐) を除去するステップが特に重要．

ミンツによるカット消去を用いた停止性証明

- 整礎木 $\mathcal{T}_{wf}$ からカットを除去する手続きは，$\mathcal{T}_{wf}$ の高さ α に関する超限帰納法により進む.
- PA_ϵ に対する ϵ 代入の範囲では $\mathcal{T}_{wf}$ の高さの上限が ε_0 となるゆえに，ε_0 までの超限帰納法が必要となる.

ミンツによるカット消去を用いた停止性証明

- 整礎木 $\mathcal{T}_{wf}$ からカットを除去する手続きは，$\mathcal{T}_{wf}$ の高さ α に関する超限帰納法により進む.
- PA$_\epsilon$ に対する ϵ 代入の範囲では $\mathcal{T}_{wf}$ の高さの上限が ε_0 となるゆえに，ε_0 までの超限帰納法が必要となる.
- $\mathcal{T}_{wf}$ からカットを除去する手続きを進めるにあたって，$\mathcal{T}_{wf}$ の中で更新されない $(e, ?)$ の現れと更新される $(e, ?)$ の現れとを区別した方が都合がよい.
  - 以下では「$?^\circ$」という記号を導入し，この記号も ϵ 代入の値域に含めて，更新されない $(e, ?)$ の現れを $(e, ?^\circ)$ と表す.

無限分岐木を用いたϵ代入の再定式化

定義 (シークエント)

シークエント Θ とは，正準 ϵ 項すべての集合から $\mathbb{N} \cup \{?, ?^\circ\}$ への部分関数のことをいう．

- 正準 ϵ 項 e について $e \notin \mathrm{dom}(\Theta)$ が成り立つとき，
$$(e, u), \Theta := \{(e, u)\} \cup \Theta.$$
- どの $e \in \mathrm{dom}(\Theta)$ についても $\mathrm{rk}(e) \leq n$ であるとき，このことを $\Theta \leq n$ と表す．($\Theta \geq n, \quad \Theta < n, \quad \Theta > n$ も同様)

無限分岐木を用いた ϵ 代入の再定式化

定義 (シークエント)

シークエント Θ とは，正準 ϵ 項すべての集合から $\mathbb{N} \cup \{?, ?^\circ\}$ への部分関数のことをいう.

- 正準 ϵ 項 e について $e \notin \mathrm{dom}(\Theta)$ が成り立つとき，

$$(e, u), \Theta := \{(e, u)\} \cup \Theta.$$

- どの $e \in \mathrm{dom}(\Theta)$ についても $\mathrm{rk}(e) \leq n$ であるとき，このことを $\Theta \leq n$ と表す．($\Theta \geq n$, $\quad \Theta < n$, $\quad \Theta > n$ も同様)

定義 (シークエントの確定部分および暫定部分)

Θ を任意のシークエントとする．Θ の確定部分 Θf および暫定部分 Θt を以下のように定義する：

$$\Theta f := \{(e, u) \in \Theta \mid u = ?^\circ\}, \quad \Theta t := \{(e, u) \in \Theta \mid u = ?\}.$$

無限分岐木を用いた ϵ 代入の再定式化

- 閉主要論理式の列 $Cr = Cr_0, Cr_1, \ldots, Cr_N$ をーつ固定.

定義 (証明体系 GPA$_\epsilon$ の公理)

証明体系 GPA$_\epsilon$ の公理を以下のように定める．ただし，e は $e \notin \mathrm{dom}(\Theta)$ をみたす正準 ϵ 項であるとする.

(AxF) Θ が計算において不整合であるとき，

$$\overline{\Theta}\ \text{AxF}.$$

(AxS) Θ が計算において整合的で，決定的で，さらに解であるとき，

$$\overline{\Theta}\ \text{AxS}.$$

(AxH) H 規則が $(e, ?), \Theta$ に適用され，$e = e^{(e,?),\Theta}$ であるとき，

$$\overline{(e, ?^\circ), \Theta}\ \text{AxH}.$$

無限分岐木を用いた ϵ 代入の再定式化

定義 (証明体系 GPA$_\epsilon$ の推論規則)

証明体系 GPA$_\epsilon$ の推論規則を以下のように定める．ただし，e は $e \notin \mathrm{dom}(\Theta)$ をみたす正準 ϵ 項であるとする．

(Cut)

$$\frac{(e, ?^\circ), \Theta \quad (e, 0), \Theta \quad \cdots \quad (e, n), \Theta \quad \cdots \qquad (n \in \mathbb{N})}{\Theta}\ \text{Cut.}$$

(CutFr)

$$\frac{(e, ?), \Theta \quad (e, 0), \Theta \quad \cdots \quad (e, n), \Theta \quad \cdots \qquad (n \in \mathbb{N})}{\Theta}\ \text{CutFr.}$$

無限分岐木を用いた ϵ 代入の再定式化

定義 (証明体系 GPA$_\epsilon$ の推論規則, contd.)

(Fr)

$$\frac{(e,?),\Theta}{\Theta}\ \text{Fr}.$$

(H) H 規則が $(e,?),\Theta$ に適用され， $e = e^{(e,?),\Theta}$, $v = v^{(e,?),\Theta}$ であるとき，

$$\frac{(e,v),\Theta_{\leq \mathrm{rk}(e)}}{(e,?),\Theta}\ \text{H}.$$

(CutFr), (Cut), (Fr), (H) において， e をそれぞれの推論規則の主要項という.

無限分岐木を用いた ϵ 代入の再定式化

定義 (GPA$_\epsilon$ の演繹図および証明図)

証明体系 GPA$_\epsilon$ の演繹図とは，以下のように帰納的に定義される整礎木のことをいう．

- GPA$_\epsilon$ の公理 $\mathcal{I}$

$$\overline{\Theta}\ \mathcal{I}$$

  ただ一つから成る木は GPA$_\epsilon$ の演繹図である．

- Θ が GPA$_\epsilon$ のどの公理の結論にもなっていないとき，

$$\overline{\Theta}\ \mathsf{Ad}$$

  は GPA$_\epsilon$ の演繹図である．

無限分岐木を用いたϵ代入の再定式化

定義 (GPA$_\epsilon$ の演繹図および証明図, contd.)

- 各 $i \in I$ について，d_i は結論 Θ_i をもつ GPA$_\epsilon$ の演繹図であり，

$$\frac{\cdots\ \Theta_i\ \cdots \qquad (i \in I)}{\Theta}\ \mathcal{I}$$

  が GPA$_\epsilon$ の推論規則であるとき，

$$\frac{\cdots\ \begin{array}{c}\vdots\ d_i \\ \Theta_i\end{array}\ \cdots \qquad (i \in I)}{\Theta}\ \mathcal{I}$$

  は GPA$_\epsilon$ の演繹図である．

GPA$_\epsilon$ の演繹図 d が GPA$_\epsilon$ の公理および推論規則のみから構成されるとき，d を GPA$_\epsilon$ の証明図という．

無限分岐木を用いた ϵ 代入の再定式化

定義 (演繹図の高さ，推論規則の階数)

GPA$_\epsilon$ の演繹図に対して以下の定義をする．

1. GPA$_\epsilon$ の演繹図 d の高さ $\mathrm{h}(d)$ を次のように定める：

   $$\mathrm{h}(d) := \sup\{\mathrm{h}(d_i) + 1 \mid d_i \text{ は } d \text{ の } i \text{ 番目の直接部分木である }\}.$$

2. GPA$_\epsilon$ の推論規則 $\mathcal{I}$

   $$\frac{\cdots \quad \Theta_i \quad \cdots \qquad (i \in I)}{\Theta}\ \mathcal{I}$$

   について，$\mathcal{I}$ の主要項の階数を $\mathrm{rk}(\mathcal{I})$ と表す．そして，$\mathrm{rk}(\mathcal{I})$ を$\mathcal{I}$ の階数という．

無限分岐木を用いた ϵ 代入の再定式化

定義 (k-演繹図および k^+-演繹図)

1. X $\in \{$CutFr, Cut, Fr, H$\}$ とし，$\circ \in \{<, \leq, >, \geq, =\}$ とする．
GPA$_\epsilon$ の演繹図 d の中のどの X 規則 $\mathcal{I}$ についても $\mathrm{rk}(\mathcal{I}) \circ k$ が成り立つということを，X$(d) \circ k$ と表す．また，
d の中に X 規則が現れないということを，X$(d) < 0$ と表す．

無限分岐木を用いた ϵ 代入の再定式化

定義 (k-演繹図および k^+-演繹図)

1. X $\in$ {CutFr, Cut, Fr, H} とし，$\circ \in \{<, \leq, >, \geq, =\}$ とする．GPA$_\epsilon$ の演繹図 d の中のどの X 規則 $\mathcal{I}$ についても $\mathrm{rk}(\mathcal{I}) \circ k$ が成り立つということを，X$(d) \circ k$ と表す．また，d の中に X 規則が現れないということを，X$(d) < 0$ と表す．
2. GPA$_\epsilon$ の演繹図 d が k-演繹図であるのは d が次をみたすとき：
$$\mathsf{Cut}(d) < k, \quad \mathsf{CutFr}(d) < 0, \quad \mathsf{Fr}(d) \geq k, \quad \mathsf{H}(d) \geq k.$$
d が証明図であるとき，d は k-証明図と呼ばれる．

無限分岐木を用いた ϵ 代入の再定式化

定義 (k-演繹図および k^+-演繹図)

1. X $\in$ {CutFr, Cut, Fr, H} とし，$\circ \in \{<, \leq, >, \geq, =\}$ とする．GPA$_\epsilon$ の演繹図 d の中のどの X 規則 $\mathcal{I}$ についても $\mathrm{rk}(\mathcal{I}) \circ k$ が成り立つということを，X$(d) \circ k$ と表す．また，d の中に X 規則が現れないということを，X$(d) < 0$ と表す．
2. GPA$_\epsilon$ の演繹図 d が k-演繹図であるのは d が次をみたすとき：
$$\mathsf{Cut}(d) < k, \quad \mathsf{CutFr}(d) < 0, \quad \mathsf{Fr}(d) \geq k, \quad \mathsf{H}(d) \geq k.$$
d が証明図であるとき，d は k-証明図と呼ばれる．
3. GPA$_\epsilon$ の演繹図 d が k^+-演繹図であるのは d が次をみたすとき：
$$\mathsf{Cut}(d) < k, \quad \mathsf{CutFr}(d) = k, \quad \mathsf{Fr}(d) > k, \quad \mathsf{H}(d) \geq k.$$
d が証明図であるとき，d は k^+-証明図と呼ばれる．

原証明図 (original derivation) の構成

- ϵ 代入 $\emptyset$ から出発して，先の無限分岐により成長していく木 $\mathcal{T}$ を考える．
  - 成長の過程で現れた $\mathcal{T}$ のある節 $S \cup \{e, ?^\circ\}$ は，H 規則が適用されてしかも $e \equiv e^{S \cup \{e, ?^\circ\}}$ をみたしているかも．
    $\mathcal{T}$ の枝にこのような節が現れたらその枝の成長を止める．
  - $\mathcal{T}$ の他のある節 S' は計算において不整合であるかもしれない．さらに，また別の節 S'' は解であるかもしれない．このような S', S'' が枝に現れたときも，そこで成長を止める．
- すると，ϵ 代入 $\emptyset$ を根とする整礎木 $\mathcal{T}_{wf}$ が得られるはず．

原証明図 (original derivation) の構成

- ϵ 代入 $\emptyset$ から出発して，先の無限分岐により成長していく木 $\mathcal{T}$ を考える．
  - 成長の過程で現れた $\mathcal{T}$ のある節 $S \cup \{e, ?^\circ\}$ は，H 規則が適用されてしかも $e \equiv e^{S \cup \{e, ?^\circ\}}$ をみたしているかも．
    $\mathcal{T}$ の枝にこのような節が現れたらその枝の成長を止める．
  - $\mathcal{T}$ の他のある節 S' は計算において不整合であるかもしれない．さらに，また別の節 S'' は解であるかもしれない．このような S', S'' が枝に現れたときも，そこで成長を止める．
- すると，ϵ 代入 $\emptyset$ を根とする整礎木 $\mathcal{T}_{wf}$ が得られるはず．
- まずこのような $\mathcal{T}_{wf}$(原証明図と呼ばれる) を構成する．

原証明図の構成のための定義

- 任意の論理式 A および任意の $k \in \mathbb{N}$ に対し,

$$d_k(A) := \begin{cases} 0, & \text{if } \mathrm{rk}(A) < k, \\ d(A), & \text{else.} \end{cases}$$

とおく.

定義 (閉論理式の有限集合 Γ の次数)

S を任意の ϵ 代入とし, Γ を閉じた論理式の任意の有限集合とする.

1. $\rho_S(\Gamma) := \max(\{\mathrm{rk}(|A|_S) \mid A \in \Gamma,\ d(|A|_S) > 0\} \cup \{0\})$.
2. Γ のすべての要素を重複なく $A_1, \ldots, A_n$ と並べるとき,
   $\#_S(\Gamma, k) := d_k(|A_1|_S)\# \cdots \# d_k(|A_n|_S)$.
3. $\nu_S(\Gamma) := \omega \cdot \rho_S(\Gamma) + \#_S(\Gamma, \rho_S(\Gamma))$.

原証明図の構成のための補題

補題 (次数還元補題)

S を任意の ϵ 代入と，Γ を閉論理式の任意の有限集合とし，

- e を，$e \equiv \epsilon x F[x]$ であり以下をみたす正準 ϵ 項とする：
  $e \notin \mathrm{dom}(S)$ であり，かつ，$\mathrm{rk}(|A_0|_S) = \rho_S(\Gamma)$ となるある $A_0 \in \Gamma$ が存在し，e は論理式 $|A_0|_S$ の部分項である．
- u を $\mathbb{N} \cup \{?\}$ の任意の要素とし，

$$S' := S \cup \{(e, u)\}, \quad \Gamma' := \begin{cases} \Gamma, & \textit{if } u = ?, \\ \Gamma \cup \{F[\![u]\!]\}, & \textit{else}. \end{cases}$$

このとき，

$$\rho_{S'}(\Gamma') \le \rho_S(\Gamma), \quad \nu_{S'}(\Gamma') < \nu_S(\Gamma)$$

が成り立つ．

原証明図の構成のための補題

- 次数還元補題より以下の補題が得られる.

補題 (演繹図構成補題)

Θ を任意のシークエント, Γ を閉じた論理式の任意の有限集合とする. このとき, Θ の演繹図で以下をみたすもの d が存在する.

- d のどの始式 Σ も次をみたす : $\Theta \subseteq \Sigma$ であり, さらにどの $A \in \mathcal{F}(\Sigma) \cup \Gamma$ も Σ-計算可能である.
- d の中の推論規則はみな, $\rho_\Theta(\mathcal{F}(\Theta) \cup \Gamma)$ と等しいかそれよりも小さい階数をもつ Cut である.
- $\mathrm{h}(d) \leq \nu_\Theta(\mathcal{F}(\Theta) \cup \Gamma)$.

原証明図の構成

補題 (原証明図構成補題)

$\emptyset$ に対する GPA_ϵ の証明図で，以下をみたすもの d が存在する：

- ある $k \in \mathbb{N}$ が存在し，d は $(k+1)$-証明図である．
- d は公理と (Cut) のみを含む．
- $\mathrm{h}(d) < \omega^2$.

証明

まず，シークエント $\emptyset$ と集合 $\{Cr_0, \ldots, Cr_N\}$ に対して演繹図構成補題を適用し，$\emptyset$ の演繹図で以下の (a)–(c) をみたすもの $d_\emptyset$ を得る．

原証明図の構成

証明, contd.

(a) Σ を $d_\emptyset$ の始式とすると，どの $A \in \mathcal{F}(\Sigma) \cup \{Cr_0, \dots, Cr_N\}$ も Σ-計算可能である．

(b) $d_\emptyset$ の中の推論規則はみな，$\rho_\emptyset(\{Cr_0, \dots, Cr_N\})$ 以下の階数をもつ (Cut) である．$k := \rho_\emptyset(\{Cr_0, \dots, Cr_N\})$ とおく．

(c) $\mathrm{h}(d_\emptyset) \leq \nu_\emptyset(\{Cr_0, \dots, Cr_N\}) < \omega^2$.

原証明図の構成

証明, contd.

(a) Σ を $d_\emptyset$ の始式とすると，どの $A \in \mathcal{F}(\Sigma) \cup \{Cr_0, \ldots, Cr_N\}$ も Σ-計算可能である．

(b) $d_\emptyset$ の中の推論規則はみな，$\rho_\emptyset(\{Cr_0, \ldots, Cr_N\})$ 以下の階数をもつ (Cut) である．$k := \rho_\emptyset(\{Cr_0, \ldots, Cr_N\})$ とおく．

(c) $\mathrm{h}(d_\emptyset) \leq \nu_\emptyset(\{Cr_0, \ldots, Cr_N\}) < \omega^2$.

ここで，$d_\emptyset$ の始式で公理でないもの Θ をとると，Θ は少なくとも計算において整合的であることが分かる．また，(a) より Θ は決定的であるから，Θ は健全でさらに解でないことが分かる．いま $e := e^\Theta$ とすると，Θ が健全であることと (b) より $(e, ?^\circ) \in \Theta$.

原証明図の構成

証明, contd.

(a) Σ を $d_\emptyset$ の始式とすると，どの $A \in \mathcal{F}(\Sigma) \cup \{Cr_0, \ldots, Cr_N\}$ も Σ-計算可能である．

(b) $d_\emptyset$ の中の推論規則はみな，$\rho_\emptyset(\{Cr_0, \ldots, Cr_N\})$ 以下の階数をもつ (Cut) である．$k := \rho_\emptyset(\{Cr_0, \ldots, Cr_N\})$ とおく．

(c) $\mathrm{h}(d_\emptyset) \leq \nu_\emptyset(\{Cr_0, \ldots, Cr_N\}) < \omega^2$.

ここで，$d_\emptyset$ の始式で公理でないもの Θ をとると，Θ は少なくとも計算において整合的であることが分かる．また，(a) より Θ は決定的であるから，Θ は健全でさらに解でないことが分かる．いま $e := e^\Theta$ とすると，Θ が健全であることと (b) より $(e, ?^\circ) \in \Theta$.

次に，Θ と，以下の集合 Γ_Θ に対して演繹図構成補題を適用する：
$\Gamma_\Theta := \{F[m] \mid F[t] \to F[\epsilon x F[x]] \in Cr,\ m < |t|_\Theta\}$.

原証明図の構成

証明, contd.

$\mathcal{F}(\Theta) \cup \Gamma_\Theta \leq k$ がいえるから，いま得られた Θ の演繹図 d_Θ の中の推論規則もすべて，k 以下の階数をもつ (Cut) である.

原証明図の構成

証明, contd.

$\mathcal{F}(\Theta) \cup \Gamma_\Theta \leq k$ がいえるから，いま得られた Θ の演繹図 d_Θ の中の推論規則もすべて，k 以下の階数をもつ (Cut) である．

d_Θ の始式の中でも，計算において整合的であるもの Θ' を考える．すると，先と同様の議論により Θ' は決定的かつ健全であることが分かる．よって，Θ' が解であるときは，Θ は (AxS) により導出されている．Θ' が解でないときは，Θ' は (AxH) により導出されていることがいえる．なぜなら，$\Theta \subseteq \Theta'$ より

$$\Gamma_\Theta = \{F[m] \mid F[t] \to F[\epsilon x F[x]] \in Cr,\ m < |t|_{\Theta'}\}$$

が成り立ち，Γ_Θ のどの要素も Θ'-計算可能なので，結局 Θ' には H 規則が適用されるからである．以上により，Θ に対する $(k+1)$-証明図で，しかも推論規則としては (Cut) のみを含む d_Θ が得られた．

原証明図の構成

証明, contd.

Θ は任意であったから，公理になっていない $d_\emptyset$ のどの始式 Θ に対しても，推論規則としては (Cut) のみを含む $(k+1)$-証明図を与えることができる．このことにより，$\emptyset$ に対する $(k+1)$-証明図で，推論規則としては (Cut) のみを含むもの d が得られる．

原証明図の構成

証明, contd.

Θ は任意であったから，公理になっていない $d_\emptyset$ のどの始式 Θ に対しても，推論規則としては (Cut) のみを含む $(k+1)$-証明図を与えることができる．このことにより，$\emptyset$ に対する $(k+1)$-証明図で，推論規則としては (Cut) のみを含むもの d が得られる．

あとは $\mathrm{h}(d) < \omega^2$ を示せばよい．公理になっていない $d_\emptyset$ のどの始式 Θ に対しても，$\mathcal{F}(\Theta) \cup \Gamma_\Theta \leq k$ が成り立つから，集合

$$\{\mathrm{h}(d_\Theta) \mid \Theta \text{ は } d_\emptyset \text{ の始式であり，公理ではない}\}$$

の上限は ω^2 よりも小さくなる．このことと (c) より $\mathrm{h}(d) < \omega^2$ がいえる．□

カット消去プロセス

- 原証明図構成補題により得られる $\emptyset$ の $(k+1)$-証明図を d とおく．d のカット消去プロセスは以下である．

(1) まず，d がもつ階数 k の Cut の中でも最も上にあるもの $\mathcal{I}$ を一つ考える．特に，前提 $(e, ?^\circ), \Theta$ が依存している公理 AxH の中でも $(e, ?^\circ)$ が主要項であるものに注意する．

$$
\dfrac{
\begin{array}{c}
\dfrac{}{(e, ?^\circ), \Theta'}\,\mathsf{AxH} \quad \cdots \quad \dfrac{}{(e, ?^\circ), \Theta''}\,\mathsf{AxH} \\
\vdots \\
(e, ?^\circ), \Theta
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\vdots\, d_0 \\
(e, 0), \Theta
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
\vdots\, d_1 \\
(e, 1), \Theta
\end{array}
\quad \cdots
}{
\begin{array}{c}
\Theta \\
\vdots \\
\emptyset
\end{array}
}\,\mathcal{I}
$$

カット消去プロセス

(2) $\mathcal{I}$ を CutFr で置き換える．すると，前提 $(e, ?^\circ), \Theta$ が依存している公理 AxH の中でも $(e, ?^\circ)$ が主要項であるものは GPA_ϵ の公理でなくなる．

$$
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{}{(e,?),\Theta'}\ \mathsf{Ad}\quad \cdots \quad \dfrac{}{(e,?),\Theta''}\ \mathsf{Ad}}{(e,?),\Theta}\ \vdots
\qquad
\begin{matrix}\vdots\ d_0 \\ (e,0),\Theta\end{matrix}
\quad
\begin{matrix}\vdots\ d_1 \\ (e,1),\Theta\end{matrix}
\quad \cdots
}{\Theta}\ \mathsf{CutFr}
$$

$$
\begin{matrix}\Theta \\ \vdots \\ \emptyset\end{matrix}
$$

(3) Ad の形をした始式のそれぞれを H で導き，このHの前提に対する演繹図を分岐なし弱化補題により構成する．

$$
\dfrac{\dfrac{}{(e,n),\Theta'_{\le k},\Theta}\,\mathsf{Ad}}{}
\qquad\qquad
\dfrac{\dfrac{}{(e,n'),\Theta''_{\le k},\Theta}\,\mathsf{Ad}}{}
$$

$$
\begin{array}{ccc}
\vdots & & \vdots \\
\dfrac{(e,n),\Theta'_{\le k}}{(e,?),\Theta'}\,\mathsf{H} & \cdots & \dfrac{(e,n'),\Theta''_{\le k}}{(e,?),\Theta''}\,\mathsf{H}
\end{array}
$$

$$
\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\(e,?),\Theta\end{array}\qquad\qquad \begin{array}{c}\vdots\, d_0\\(e,0),\Theta\end{array}\quad \begin{array}{c}\vdots\, d_1\\(e,1),\Theta\end{array}\ \cdots}{\Theta}\,\mathsf{CutFr}
$$

$$
\begin{array}{c}\vdots\\ \emptyset\end{array}
$$

カット消去プロセス

(4) $\mathcal{I}$ に置き換わった CutFr の前提に接ぎ木弱化補題を適用して，新しく現れた Ad タイプの始式に対する証明図を構成する．階数 k の Cut を一つ除去しつつ，再び $\emptyset$ の証明図を構成できたことに注意しよう．

$$
\dfrac{
\begin{array}{c}
\dfrac{
\begin{array}{c}
\vdots\; d^*_n \\
(e,n),\Theta'_{\le k},\Theta \\
\vdots \\
(e,n),\Theta'_{\le k}
\end{array}
}{(e,?),\Theta'}\;\mathsf{H}
\qquad \cdots \qquad
\dfrac{
\begin{array}{c}
\vdots\; d^*_{n'} \\
(e,n'),\Theta''_{\le k},\Theta \\
\vdots \\
(e,n'),\Theta''_{\le k}
\end{array}
}{(e,?),\Theta''}\;\mathsf{H} \\
\vdots \\
(e,?),\Theta
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\vdots\; d_0 \\
(e,0),\Theta
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
\vdots\; d_1 \\
(e,1),\Theta
\end{array}
\quad \cdots
}{
\begin{array}{c}
\Theta \\
\vdots \\
\emptyset
\end{array}
}\;\mathsf{CutFr}
$$

カット消去プロセス

- 以上の手順 (1)–(4) までを行なうのが，ワンステップ還元補題である．
- この手順を，階数 k をもつ Cut に対し上から適用していけば，これらの Cut をすべて除去することができ，$\emptyset$ の $(k+1)$-証明図から $\emptyset$ の k^+-証明図が得られる (カット消去補題)．
  - ここでの帰納的論証において，ε_0 までの超限帰納法が用いられる．
- 次に，得られた k^+-証明図に手順 5 を適用し，$\emptyset$ の k-証明図を得る．あとは，$k=0$ となるまで同様の手順を繰り返せばよい．

(5) Cut に置き換わったすべての CutFr を Fr で置き換えて，木の剪定をする．

$$
\begin{array}{ccc}
\begin{array}{c}
\vdots\, d^*_{n} \\
(e,n), \Theta'_{\leq k}, \Theta \\
\vdots \\
\dfrac{(e,n), \Theta'_{\leq k}}{(e,?), \Theta'}\ \mathsf{H}
\end{array}
& \cdots &
\begin{array}{c}
\vdots\, d^*_{n'} \\
(e,n'), \Theta''_{\leq k}, \Theta \\
\vdots \\
\dfrac{(e,n'), \Theta''_{\leq k}}{(e,?), \Theta''}\ \mathsf{H}
\end{array}
\\
& \vdots & \\
& \dfrac{(e,?), \Theta}{\Theta}\ \mathsf{Fr} & \\
& \vdots & \\
& \emptyset &
\end{array}
$$

弱化 (weakening) 補題

定義

Θ, Σ を任意のシークエントとする．$\Theta \cup \Sigma$ が部分関数となるとき，$\Theta \cup \Sigma$ を $\Theta * \Sigma$ と表し $\Theta * \Sigma$ は定義されているという．

補題 (接ぎ木弱化補題)

d を Θ に対する k^+-証明図とする．さらに，Σ を以下をみたす健全なシークエントとする：

- $\Sigma \leq k$,
- $\Theta * \Sigma$ は定義されている,
- $(\Sigma f)_{\geq k} \subseteq \Theta$ および $\Sigma t \geq k$ が成り立つ．

このとき，$\Theta * \Sigma$ に対する k^+-証明図 $d * \Sigma$ が存在し，$\mathrm{h}(d * \Sigma) \leq \mathrm{h}(d)$ をみたす．

弱化 (weakening) 補題

定義

d を GPA$_\epsilon$ の任意の演繹図とし，その終式を Θ とおく．

1. d の中の**経路**とは，d の終式から出発して，推論規則の前提の一つを上へ順に辿っていくことで得られるシークエントの列 $(\Theta, \Theta_1, \ldots, \Theta_n)$ のことである．ただし，Θ_n は d の始式でなくともよい．
2. $(\Theta_0, \ldots, \Theta_n)$ が Θ_n に対する **k-経路**であるのは以下のとき：ある k-演繹図 d が存在し， d の終式は $\emptyset$ であり，かつ，$(\Theta_0, \ldots, \Theta_n)$ は d の中の経路である．

弱化 (weakening) 補題

補題 (分岐なし弱化補題)

$(\Theta_0, \ldots, \Theta_n)$ を Θ_n に対する $(k+1)$-経路とし，$\Theta := \Theta_n$ とおく．
Σ を $\Sigma \leq k$ および $\Theta_{\leq k} \subseteq \Sigma$ をみたす健全なシークエントとする．
このとき $\Theta * \Sigma$ は定義され，以下をみたす演繹図 d が存在する：

- d の中で推論規則が適用されているならば，それは k より大きな階数をもつ Fr・H 規則のいずれかである．
- d は始式 $\Theta * \Sigma$ から終式 Σ への演繹図である．

ワンステップ還元補題の証明

補題 (H 規則補題)

S を任意の ϵ 代入とする．もし H 規則が S に適用されるならば，$H(S)$ は健全である．

補題 (剪定補題)

シークエント Θ に対する GPA$_\epsilon$ のどの k^+-証明図 d も，以下をみたす k-証明図 d' に変形できる．

- d' の終式は Θ である．
- $\mathrm{h}(d') \leq \mathrm{h}(d)$.

ワンステップ還元補題の証明

補題 (暫定・確定部分補題)

Θ を任意のシークエントとする.

1. Θ が $\emptyset$ に対するある $(k+1)$-演繹図の中に現れるとき, $\Theta t > k$ および $\Theta f \leq k$ が成り立つ.
2. Θ が Σ に対するある k^+-演繹図の中に現れるとき, 以下が成り立つ：
   1. $\Sigma_{\leq k} \setminus \Sigma t \subseteq \Theta$,
   2. $(\Theta f)_{\geq k} \subseteq \Sigma$,
   3. もし $\Sigma t \geq k$ であるならば $\Theta t \geq k$ である.

ワンステップ還元補題の証明

補題 (ワンステップ還元補題)

d を以下をみたす証明図とする：

- d は Θ に対する証明図であり，d の最後の推論規則は階数 k をもつ Cut である．
- d の直接部分木はみな k^+-証明図である．
- d の終式 Θ に対する $(k+1)$-経路が存在する．

このとき，Θ の k^+-証明図 d' が存在し，$\mathrm{h}(d') \leq \mathrm{h}(d) + \omega + \mathrm{h}(d)$.

証明

d の直接部分木がみな k^+-証明図であることから，d の中に現れる階数 k の Cut は d の最後の推論規則 $\mathcal{I}$ のみである．この Cut を除去することによって，求める k^+-証明図 d' を得ることを考える．$\mathcal{I}$ の主要項を e とおくと，$\mathrm{rk}(e) = k$ である．

ワンステップ還元補題の証明

証明, contd.

最初に，$\mathcal{I}$ を CutFr で置き換える．この置き換えにより d が証明図でなくなるとすれば，AxH で導かれている d の始式 $(e, ?^\circ), \Theta'$ が $(e, ?), \Theta'$ になってしまうときである．このような任意の始式 $(e, ?), \Theta'$ を考えてこれを H で導くことにすると，始式は $\Sigma := (e, n), \Theta'_{\leq k}$ となる．$\Sigma \leq k$ で，さらに H 規則補題より Σ は健全であることに注意しよう．

ワンステップ還元補題の証明

証明, contd.

最初に，$\mathcal{I}$ を CutFr で置き換える．この置き換えにより d が証明図でなくなるとすれば，AxH で導かれている d の始式 $(e, ?^{\circ}), \Theta'$ が $(e, ?), \Theta'$ になってしまうときである．このような任意の始式 $(e, ?), \Theta'$ を考えてこれを H で導くことにすると，始式は $\Sigma := (e, n), \Theta'_{\leq k}$ となる．$\Sigma \leq k$ で，さらに H 規則補題より Σ は健全であることに注意しよう．

暫定・確定部分補題 (1) より $\Theta t > k$ であるから $\Theta_{\leq k} = \Theta_{\leq k} \setminus \Theta t$ であり，さらに同補題 (2).(a) より $\Theta_{\leq k} \setminus \Theta t \subseteq \Sigma$ である．よって $\Theta_{\leq k} \subseteq \Sigma$ がいえる．ここから分岐なし弱化補題より，$\Theta * \Sigma$ は定義される．また，$\Theta * \Sigma$ から Σ への演繹図で，しかも k より大きな階数をもつ Fr・H のみから構成されるもの d_1 が存在する．$\mathrm{h}(d_1) < \omega$ が成り立つことにも注意する．

ワンステップ還元補題の証明

証明, contd.

最後に，$\Theta * \Sigma$ の k^+-証明図を構成する．終式 $\Sigma' := (e, n), \Theta$ をもつ，d の直接部分木 d_n をとる．すると，$\Theta * \Sigma$ が定義され $(e, n) \in \Sigma$ であることより，$\Sigma' * \Sigma = \Theta * \Sigma$ である．よって，d_n と Σ に対して接ぎ木弱化補題が適用できれば，$\Sigma' * \Sigma (= \Theta * \Sigma)$ に対する k^+-証明図が得られ，求める k^+-証明図 d' を構成できる．

ワンステップ還元補題の証明

証明, contd.

最後に，$\Theta * \Sigma$ の k^+-証明図を構成する．終式 $\Sigma' := (e, n), \Theta$ をもつ，d の直接部分木 d_n をとる．すると，$\Theta * \Sigma$ が定義され $(e, n) \in \Sigma$ であることより，$\Sigma' * \Sigma = \Theta * \Sigma$ である．よって，d_n と Σ に対して接ぎ木弱化補題が適用できれば，$\Sigma' * \Sigma (= \Theta * \Sigma)$ に対する k^+-証明図が得られ，求める k^+-証明図 d' を構成できる．

そのため，あとは $(\Sigma f)_{\geq k} \subseteq \Sigma'$ であることと $\Sigma t \geq k$ であることを示せばよい．終式 $(e, ?^\circ), \Theta$ をもつ，d の直接部分木 $d_{?^\circ}$ をとる．暫定・確定部分補題 (2).(b) より，$((e, ?^\circ), \Theta') f_{\geq k} \subseteq (e, ?^\circ), \Theta$. ここから $(\Sigma f)_{\geq k} \subseteq \Sigma'$ がいえる．

ワンステップ還元補題の証明

証明, contd.

最後に，$\Theta * \Sigma$ の k^+-証明図を構成する．終式 $\Sigma' := (e, n), \Theta$ をもつ，d の直接部分木 d_n をとる．すると，$\Theta * \Sigma$ が定義され $(e, n) \in \Sigma$ であることより，$\Sigma' * \Sigma = \Theta * \Sigma$ である．よって，d_n と Σ に対して接ぎ木弱化補題が適用できれば，$\Sigma' * \Sigma (= \Theta * \Sigma)$ に対する k^+-証明図が得られ，求める k^+-証明図 d' を構成できる．

そのため，あとは $(\Sigma f)_{\geq k} \subseteq \Sigma'$ であることと $\Sigma t \geq k$ であることを示せばよい．終式 $(e, ?^\circ), \Theta$ をもつ，d の直接部分木 $d_{?^\circ}$ をとる．暫定・確定部分補題 (2).(b) より，$((e, ?^\circ), \Theta')f_{\geq k} \subseteq (e, ?^\circ), \Theta$. ここから $(\Sigma f)_{\geq k} \subseteq \Sigma'$ がいえる．また，暫定・確定部分補題 (2).(c) より，もし $((e, ?^\circ), \Theta)t \geq k$ であるならば $((e, ?^\circ), \Theta')t \geq k$ であることが分かる．同補題 (1) より，この前件は成り立つから，結局 $\Sigma t \geq k$ がいえる．□

カット消去補題の証明

補題 (カット消去補題)

d が Θ の $(k+1)$-証明図で，Θ に対する $(k+1)$-経路が存在するとき，Θ の k^+-証明図 d' が存在して，$\mathrm{h}(d') \leq \omega^{\mathrm{h}(d)+1}$ が成り立つ．

証明

$\mathrm{h}(d)$ に関する帰納法を用いる．$\mathrm{h}(d) = 0$ のときに補題が成り立つことは明らかなので，$\mathrm{h}(d) > 0$ とする．d のどの直接部分木 d_u $(u \in I)$ についても，d_u は $(k+1)$-証明図であり，d_u の終式に対する $(k+1)$-経路が存在する．よって，帰納法の仮定より，d_u の終式に対する k^+-証明図 d'_u が存在し，$\mathrm{h}(d'_u) \leq \omega^{\mathrm{h}(d_u)+1}$.

カット消去補題の証明

証明, contd.

各 d'_u に対し $\mathcal{I}$ を適用すれば，Θ に対する k^+-証明図 d_0 が得られ，

$$\mathrm{h}(d_0) = \sup\{\mathrm{h}(d'_u) \mid u \in I\} \leq \omega^{\mathrm{h}(d)} + 1$$

が成り立つ．
d の最後の推論規則 $\mathcal{I}$ が階数 k の Cut ではないときは，求めている k^+-証明図として d_0 をとればよい．

カット消去補題の証明

証明, contd.

各 d'_u に対し $\mathcal{I}$ を適用すれば，Θ に対する k^+-証明図 d_0 が得られ，

$$\mathrm{h}(d_0) = \sup\{\mathrm{h}(d'_u) \mid u \in I\} \leq \omega^{\mathrm{h}(d)} + 1$$

が成り立つ．

d の最後の推論規則 $\mathcal{I}$ が階数 k の Cut ではないときは，求めている k^+-証明図として d_0 をとればよい．

$\mathcal{I}$ が階数 k の Cut であるときを考える．このとき，d_0 は Θ に対する $(k+1)$-証明図となっている．
するとワンステップ還元補題より，Θ の k^+-証明図 d' が存在し，

$$\mathrm{h}(d') \leq \mathrm{h}(d_0) + \omega + \mathrm{h}(d_0) \leq \omega^{\mathrm{h}(d)+1}$$

がいえる．$\square$

H 過程の停止性

補題

終式 $\emptyset$ をもつ 0-証明図 d が存在し，$\mathrm{h}(d) < \varepsilon_0$ が成り立つ.

証明

原証明図構成補題より，ある $k < \mathbb{N}$ について，$\emptyset$ に対する $(k+1)$-証明図 d が存在し，$\mathrm{h}(d) < \omega^2$ が成り立つ．この d に対してカット消去補題を適用すると，$\emptyset$ の k^+-証明図 d_0 が存在し，
$\mathrm{h}(d_0) \leq \omega^{\mathrm{h}(d)+1}$ となることが分かる．d_0 の中の CutFr をすべて Fr で置き換えれば (剪定補題)，$\mathrm{h}(d_0') \leq \mathrm{h}(d_0)$ をみたし終式 $\emptyset$ をもつ k-証明図 d_0' が得られる．この d_0' に対し再びカット消去補題を適用する.

H 過程の停止性

補題

終式 $\emptyset$ をもつ 0-証明図 d が存在し，$\mathrm{h}(d) < \varepsilon_0$ が成り立つ．

証明

原証明図構成補題より，ある $k < \mathbb{N}$ について，$\emptyset$ に対する $(k+1)$-証明図 d が存在し，$\mathrm{h}(d) < \omega^2$ が成り立つ．この d に対してカット消去補題を適用すると，$\emptyset$ の k^+-証明図 d_0 が存在し，$\mathrm{h}(d_0) \leq \omega^{\mathrm{h}(d)+1}$ となることが分かる．d_0 の中の CutFr をすべて Fr で置き換えれば (剪定補題)，$\mathrm{h}(d_0') \leq \mathrm{h}(d_0)$ をみたし終式 $\emptyset$ をもつ k-証明図 d_0' が得られる．この d_0' に対し再びカット消去補題を適用する．

以上の議論を有限回繰り返せば，$\emptyset$ に対する 0-証明図 d^* で $\mathrm{h}(d^*) < \varepsilon_0$ をみたすものが得られる．□

H 過程の停止性

補題

d を終式 $\emptyset$ をもつ任意の 0-証明図とする．このとき，d の中のどのシークエント Θ も健全で，さらに，(AxS)・(Fr)・(H) のいずれかにより導出されている．

証明

定義より，0-証明図は分岐しないことに注意しよう．d の任意のシークエント Θ を考え，終式から Θ までの長さ n に関する帰納法を用いればよい．□

H 過程の停止性

補題

d を終式 $\emptyset$ をもつ任意の 0-証明図とする．このとき，d の中のどのシークエント Θ も健全で，さらに，(AxS)・(Fr)・(H) のいずれかにより導出されている．

証明

定義より，0-証明図は分岐しないことに注意しよう．d の任意のシークエント Θ を考え，終式から Θ までの長さ n に関する帰納法を用いればよい．$\square$

定理 (H 過程の停止性)

Cr に対する H 過程は停止する．