アッカーマンによる無矛盾性証明

高橋 優太

名古屋大学・日本学術振興会

数学基礎論 SS2018

3コマの予定

- 1コマ目：
  1階述語論理に対する ϵ 計算.
  エルブランの定理を ϵ 計算を用いて証明する.
- 2コマ目 (本コマ)：
  アッカーマンによる1階算術の無矛盾性証明.
  1階ペアノ算術の無矛盾性を，アッカーマンによる ϵ 代入法 (ϵ-substitution method) を用いて示す.

3コマの予定

- 1コマ目：
  1階述語論理に対する ϵ 計算.
  エルブランの定理を ϵ 計算を用いて証明する.
- 2コマ目 (本コマ)：
  アッカーマンによる1階算術の無矛盾性証明.
  1階ペアノ算術の無矛盾性を，アッカーマンによる ϵ 代入法 (ϵ-substitution method) を用いて示す.
- 3コマ目：
  カット消去による ϵ 代入法の停止性証明.
  アッカーマンによる無矛盾性証明における主要部分である，ϵ 代入法の停止性証明を，ミンツにより導入されたカット消去法により与える.

参考文献

- 本スライドを作成する際には以下を参考にした.

- Arai, T., “Epsilon substitution method for theories of jump hierarchies”, *Arch. Math. Logic* **41**, 123–153 (2002).
- Arai, T., “Exact bounds on epsilon processes.” *Arch. Math. Logic* **50**, 445–458 (2011).
- Mints, G., Tupailo, S. and Buchholz, W., “Epsilon substitution method for elementary analysis”, *Arch. Math. Logic* **35**, 103–130 (1996).

1. 体系 PA_ϵ

2. ϵ 代入法の定式化

3. ϵ 代入法の停止性証明

アッカーマンの無矛盾性証明：アウトライン

無矛盾性証明のアウトライン

PA_ϵ に属する有限個の閉主要論理式 $Cr_1, \ldots, Cr_N$ が与えられたとする．$Cr_1, \ldots, Cr_N$ の中に現れるすべての ϵ 項に数項を割り当てる関数で，しかもどの $Cr_1, \ldots, Cr_N$ も正しい量化子なし閉論理式にするものの存在を，ε_0 までの順序数表記の整礎性に訴えて示す．

アッカーマンの無矛盾性証明：アウトライン

無矛盾性証明のアウトライン

PA_ϵ に属する有限個の閉主要論理式 $Cr_1, \ldots, Cr_N$ が与えられたとする．$Cr_1, \ldots, Cr_N$ の中に現れるすべての ϵ 項に数項を割り当てる関数で，しかもどの $Cr_1, \ldots, Cr_N$ も正しい量化子なし閉論理式にするものの存在を，ε_0 までの順序数表記の整礎性に訴えて示す．

仮に $\mathsf{PA} \vdash 0 = 1$ とすると，埋め込み補題より PA_ϵ における $0 = 1$ の証明 π が存在する．自由変項に 0 を適宜代入して，π の中には閉論理式のみが現れるようにする．すると，π に現れる主要論理式が正しいことが上の事実より示せる．

アッカーマンの無矛盾性証明：アウトライン

無矛盾性証明のアウトライン

PA_ϵ に属する有限個の閉主要論理式 $Cr_1, \ldots, Cr_N$ が与えられたとする．$Cr_1, \ldots, Cr_N$ の中に現れるすべての ϵ 項に数項を割り当てる関数で，しかもどの $Cr_1, \ldots, Cr_N$ も正しい量化子なし閉論理式にするものの存在を，ε_0 までの順序数表記の整礎性に訴えて示す．

仮に $\mathsf{PA} \vdash 0 = 1$ とすると，埋め込み補題より PA_ϵ における $0 = 1$ の証明 π が存在する．自由変項に 0 を適宜代入して，π の中には閉論理式のみが現れるようにする．すると，π に現れる主要論理式が正しいことが上の事実より示せる．

π に現れる PA 由来の公理については，その正しさは原始再帰的な計算により示せる．よって，前件肯定を介して $0 = 1$ が正しいことになり，不合理．

アッカーマンの無矛盾性証明：アウトライン

- アッカーマンによる ϵ 代入法：PA_ϵ における ϵ 項の解釈 (すなわち数項) を定める手法である ϵ 代入を扱う.

アッカーマンの無矛盾性証明：アウトライン

- アッカーマンによる ϵ 代入法：PA_ϵ における ϵ 項の解釈 (すなわち数項) を定める手法である ϵ 代入を扱う.
- ϵ 代入は，正準的な (canonical) ϵ 項 (閉 ϵ 項を真部分として含まない閉 ϵ 項) に数項を割り当てる関数である.
  - $\epsilon x(x = \epsilon y(y = y))$ といった非正準的な ϵ 項の解釈は，その中の正準 ϵ 項へ順に数項を代入していくことで定められる.
  - 正準 ϵ 項のみを ϵ 代入の定義域に含めることにより，ϵ 代入が ϵ 項に割り当てる値は置き換えの順序によらず定まる.
  - 与えられた Cr に現れる正準 ϵ 項の集合はもちろん有限であるから，ϵ 代入の定義域は常に有限集合に制限できる.

アッカーマンの無矛盾性証明：アウトライン

- アッカーマンによる ϵ 代入法：PA_ϵ における ϵ 項の解釈 (すなわち数項) を定める手法である ϵ 代入を扱う.
- ϵ 代入は，正準的な (canonical) ϵ 項 (閉 ϵ 項を真部分として含まない閉 ϵ 項) に数項を割り当てる関数である.
  - $\epsilon x(x = \epsilon y(y = y))$ といった非正準的な ϵ 項の解釈は，その中の正準 ϵ 項へ順に数項を代入していくことで定められる.
  - 正準 ϵ 項のみを ϵ 代入の定義域に含めることにより，ϵ 代入が ϵ 項に割り当てる値は置き換えの順序によらず定まる.
  - 与えられた Cr に現れる正準 ϵ 項の集合はもちろん有限であるから，ϵ 代入の定義域は常に有限集合に制限できる.
- ϵ 代入は，いわば，与えられた PA_ϵ の証明に現れる論理式すべてに $\top$ もしくは $\bot$ を割り当てるための付値.

アッカーマンの無矛盾性証明：アウトライン

- $Cr := \{Cr_1, \ldots, Cr_N\}$ とおく．解となる ϵ 代入を見つける過程はトライアル&エラー．ある ϵ 代入 S を考える．
- 主要論理式 Cr_I：$|F[t] \to F[\epsilon x F]|_S$

アッカーマンの無矛盾性証明：アウトライン

- $Cr := \{Cr_1, \ldots, Cr_N\}$ とおく．解となる ϵ 代入を見つける過程はトライアル&エラー．ある ϵ 代入 S を考える．
- S における Cr_I の解釈：$|F[t] \to F[\epsilon x F]|_S : \top$

アッカーマンの無矛盾性証明：アウトライン

- $Cr := \{Cr_1, \ldots, Cr_N\}$ とおく．解となる ϵ 代入を見つける過程はトライアル&エラー．ある ϵ 代入 S を考える．
- S における Cr_I の解釈：$|F[t] \to F[\epsilon x F]|_S : \perp$

アッカーマンの無矛盾性証明：アウトライン

- $Cr := \{Cr_1, \ldots, Cr_N\}$ とおく．解となる ϵ 代入を見つける過程はトライアル&エラー．ある ϵ 代入 S を考える．
- S における Cr_I の解釈：$|F[t] \to F[\epsilon x F]|_S : \bot$
  - $|F[t]|_S : \top$ かつ $|F[\epsilon x F]|_S : \bot$.
  - $|F[n]|_S$ が真となる n が少なくとも一つ与えられているから (すなわち $|t|_S$)，そのような n の中で最小のもの v をとり，$\epsilon x F$ に v を割り当てるように S を更新する．

アッカーマンの無矛盾性証明：アウトライン

- $Cr := \{Cr_1, \ldots, Cr_N\}$ とおく．解となる ϵ 代入を見つける過程はトライアル&エラー．ある ϵ 代入 S を考える．
- S における Cr_I の解釈：$|F[t] \to F[\epsilon x F]|_S : \bot$
    - $|F[t]|_S : \top$ かつ $|F[\epsilon x F]|_S : \bot$.
    - $|F[n]|_S$ が真となる n が少なくとも一つ与えられているから (すなわち $|t|_S$)，そのような n の中で最小のもの v をとり，$\epsilon x F$ に v を割り当てるように S を更新する．
- S の更新を $H(S)$ とおく．$|F[t] \to F[\epsilon x F]|_{H(S)} : \top$ とは限らない！
    - すべての Cr_I を真とする S を得るための更新過程を設計 (次節)
    - 有限回の更新で必ずそのような S が得られることを証明 (ε_0 までの順序数表記の整礎性を用いる，次々節)

体系 PA_ϵ の言語

$L(\mathsf{PA}_\epsilon)$ の語彙

$L(\mathsf{PA}_\epsilon)$ の語彙は，$L(\mathsf{PC}_\epsilon)$ の語彙に以下を加えたものである.

- 個体定項：0 (ゼロ),
- 1 項関数記号：S (後続者関数),
- 2 項述語記号：$=$ (等号),
- 3 項述語記号：add (加法), $prod$ (乗法).

体系 PA_ϵ の言語

$L(\mathsf{PA}_\epsilon)$ の語彙

$L(\mathsf{PA}_\epsilon)$ の語彙は，$L(\mathsf{PC}_\epsilon)$ の語彙に以下を加えたものである．

- 個体定項：0 (ゼロ),
- 1 項関数記号：S (後続者関数),
- 2 項述語記号：$=$ (等号),
- 3 項述語記号：add (加法), $prod$ (乗法).

- 言語 $L(\mathsf{PA})$ の語彙は，$L(\mathsf{PA}_\epsilon)$ から ϵ を除くことで得られる．
- $L(\mathsf{PA}_\epsilon)$ の項・論理式，および，$L(\mathsf{PA})$ の項・論理式は，$L(\mathsf{PC}_\epsilon)$ および $L(\mathsf{PC})$ の場合とそれぞれ同様に定義する．
- $n :\equiv \underbrace{S(\cdots S}_{n\text{ 個}} 0 \cdots)$

体系 PA$_\epsilon$ の公理

定義 (体系 PA の公理)

PA の公理を以下のように定める.

1. $L(\mathrm{PA})$ に属するトートロジー,
2. 量化子に関する公理: $\forall x F \to F[t], \quad F[t] \to \exists x F$,

体系 PA$_\epsilon$ の公理

定義 (体系 PA の公理)

PA の公理を以下のように定める.

1. $L(\mathrm{PA})$ に属するトートロジー,
2. 量化子に関する公理: $\forall x F \to F[t], \quad F[t] \to \exists x F$,
3. 等号に関する公理: $t = t, \quad s = t \to (F[s] \to F[t])$,
4. 後続者関数に関する公理: $St = Ss \to t = s, \quad St \neq 0$,
5. 加法・乗法に関する公理:
$$add(t,0,t), \quad add(t_1,t_2,t_3) \to add(t_1,St_2,St_3),$$
$$prod(t,0,0), \quad prod(t_1,t_2,t_3) \wedge add(t_3,t_1,t_4) \to prod(t_1 St_2, t_4).$$
6. 数学的帰納法の公理: $A[0] \wedge \forall x(A[x] \to A[Sx]) \to \forall x A[x]$.

体系 PA_ϵ の公理

定義 (体系 PA_ϵ の公理)

PA_ϵ の公理を以下のように定める．

1. $L(\mathsf{PA}_\epsilon)$ に属するトートロジー，
2. 等号に関する公理，
3. 後続者関数に関する公理，
4. 加法・乗法に関する公理，

体系 PA$_\epsilon$ の公理

定義 (体系 PA$_\epsilon$ の公理)

PA$_\epsilon$ の公理を以下のように定める．

1. $L(\mathrm{PA}_\epsilon)$ に属するトートロジー,
2. 等号に関する公理,
3. 後続者関数に関する公理,
4. 加法・乗法に関する公理,
5. ϵ 項に関する極小性公理: $\epsilon x F = St \to \neg F[t]$,
6. $L(\mathrm{PA}_\epsilon)$ に属する主要論理式：

$$(\epsilon) \qquad F[t] \to F[\epsilon x F],$$

$$(\mathrm{P}) \qquad u \neq 0 \to u = S(\epsilon x(u = Sx)).$$

PA から PA_ϵ への埋め込み

補題

$L(\mathrm{PA})$ に属するどの表現 θ およびどの項 t についても，
$(\theta[t])^\epsilon = \theta^\epsilon[t^\epsilon]$ が成り立つ．

PA から PA$_\epsilon$ への埋め込み

補題

$L(\mathsf{PA})$ に属するどの表現 θ およびどの項 t についても，$(\theta[t])^\epsilon = \theta^\epsilon[t^\epsilon]$ が成り立つ．

補題 (PA から PA$_\epsilon$ への埋め込み補題)

PA $\vdash A$ であるならば，PA$_\epsilon \vdash A^\epsilon$ である．

証明

PA における A の証明 π の長さに関する帰納法を用いる．以下では，A が数学的帰納法の公理である場合のみを考える．

PA から PA$_\epsilon$ への埋め込み

証明, contd.

いま，$t :\equiv \epsilon x \neg (A^\epsilon[x] \to A^\epsilon[Sx])$ とおくとき，論理式 $A^\epsilon[0] \wedge (A^\epsilon[t] \to A^\epsilon[St]) \to A^\epsilon[\epsilon y \neg A^\epsilon[y]]$ が PA$_\epsilon$ で証明可能であることを示せばよい．以下の推論を PA$_\epsilon$ の中で行なう．

PA から PA$_\epsilon$ への埋め込み

証明, contd.

いま，$t :\equiv \epsilon x \neg (A^\epsilon[x] \to A^\epsilon[Sx])$ とおくとき，論理式 $A^\epsilon[0] \wedge (A^\epsilon[t] \to A^\epsilon[St]) \to A^\epsilon[\epsilon y \neg A^\epsilon[y]]$ が PA$_\epsilon$ で証明可能であることを示せばよい．以下の推論を PA$_\epsilon$ の中で行なう．

$A^\epsilon[0]$ および $A^\epsilon[t] \to A^\epsilon[St]$ が成り立つと仮定する．命題論理より $\epsilon y \neg A^\epsilon[y] = 0 \vee \epsilon y \neg A^\epsilon[y] \neq 0$ が成り立つが，前者が成り立つ場合は等号に関する公理より $A^\epsilon[\epsilon y \neg A^\epsilon[y]]$ が直ちに帰結する．

PA から PA$_\epsilon$ への埋め込み

証明, contd.

いま，$t :\equiv \epsilon x \neg (A^\epsilon[x] \to A^\epsilon[Sx])$ とおくとき，論理式 $A^\epsilon[0] \wedge (A^\epsilon[t] \to A^\epsilon[St]) \to A^\epsilon[\epsilon y \neg A^\epsilon[y]]$ が PA$_\epsilon$ で証明可能であることを示せばよい．以下の推論を PA$_\epsilon$ の中で行なう．

$A^\epsilon[0]$ および $A^\epsilon[t] \to A^\epsilon[St]$ が成り立つと仮定する．命題論理より $\epsilon y \neg A^\epsilon[y] = 0 \vee \epsilon y \neg A^\epsilon[y] \neq 0$ が成り立つが，前者が成り立つ場合は等号に関する公理より $A^\epsilon[\epsilon y \neg A^\epsilon[y]]$ が直ちに帰結する．

$\epsilon y \neg A^\epsilon[y] \neq 0$ が成り立つ場合を考える．主要論理式 (P) より，

(*) $\epsilon y \neg A^\epsilon[y] = S(\epsilon x(\epsilon y \neg A^\epsilon[y] = Sx))$

である．

PA から PA_ϵ への埋め込み

証明, contd.

よって，極小性公理より，$\neg\neg A^\epsilon[\epsilon x(\epsilon y \neg A^\epsilon[y] = Sx)]$ それゆえ

(**) $A^\epsilon[\epsilon x(\epsilon y \neg A^\epsilon[y] = Sx)]$

が成り立つ．

証明, contd.

よって，極小性公理より，$\neg\neg A^\epsilon[\epsilon x(\epsilon y \neg A^\epsilon[y] = Sx)]$ それゆえ

(**) $A^\epsilon[\epsilon x(\epsilon y \neg A^\epsilon[y] = Sx)]$

が成り立つ.

ここで仮に $\neg A^\epsilon[\epsilon y \neg A^\epsilon[y]]$ であるとすると，(*) と (**) より $\neg(A^\epsilon[\epsilon x(\epsilon y \neg A^\epsilon[y] = Sx)] \to A^\epsilon[S(\epsilon x(\epsilon y \neg A^\epsilon[y] = Sx))])$ がいえる.

PA から PA$_\epsilon$ への埋め込み

証明, contd.

よって，極小性公理より，$\neg\neg A^\epsilon[\epsilon x(\epsilon y \neg A^\epsilon[y] = Sx)]$ それゆえ

(**) $A^\epsilon[\epsilon x(\epsilon y \neg A^\epsilon[y] = Sx)]$

が成り立つ．

ここで仮に $\neg A^\epsilon[\epsilon y \neg A^\epsilon[y]]$ であるとすると，(*) と (**) より $\neg(A^\epsilon[\epsilon x(\epsilon y \neg A^\epsilon[y] = Sx)] \to A^\epsilon[S(\epsilon x(\epsilon y \neg A^\epsilon[y] = Sx))])$ がいえる．

すると，$s :\equiv \epsilon x(\epsilon y \neg A^\epsilon[y] = Sx)$ とおくと，次の形の主要論理式 (ϵ)

$$\neg(A^\epsilon[s] \to A^\epsilon[Ss]) \to \neg(A^\epsilon[t] \to A^\epsilon[St])$$

より，$\neg(A^\epsilon[t] \to A^\epsilon[St])$ が帰結するが，これは $A^\epsilon[t] \to A^\epsilon[St]$ という仮定に反する． □

ϵ 代入の定義

- 表現 θ が，閉じた ϵ 項の出現をいくつ含むかを表す値である $d(\theta)$ を定義する．

定義

θ を任意の表現とする．$d(\theta)$ を以下のように定義する．

$$d(\theta) := \begin{cases} 0, & \textit{if } \theta \equiv x_i \textit{ or } 0, \\ \sum_{1\le k\le n} d(t_k), & \textit{if } \theta \equiv f_i t_1 \cdots t_n \textit{ or } P_i t_1 \cdots t_n, \\ d(A) + d(B), & \textit{if } \theta \equiv A \land B,\ A \lor B \textit{ or } A \to B, \\ d(A), & \textit{if } \theta \equiv \neg A, \\ d(F[x]) + 1, & \textit{if } \theta \equiv \epsilon x F[x] \textit{ and } \epsilon x F[x] \textit{ closed}, \\ d(F[x]), & \textit{if } \theta \equiv \epsilon x F[x] \textit{ and } \epsilon x F[x] \textit{ not closed}. \end{cases}$$

ϵ 代入の定義

定義 (正準 ϵ 項)

ϵ 項 e が**正準的** *(canonical)* であるのは，e が閉じていてさらに $d(e) = 1$ が成り立つときである．

- 正準 ϵ 項すべての集合を Ca と表す．
- 正準 ϵ 項は，閉じた ϵ 項を真部分項としてもつことはありえない．正準 ϵ 項の最も重要な例は，

$$\epsilon x(n = \epsilon y(x = y))$$

といった，階数の概念に現れる入れ子をもつ閉 ϵ 項である．

ϵ 代入の定義

定義 (ϵ 代入)

ϵ 代入とは，Ca から $\mathbb{N} \cup \{?\}$ への部分関数である．

- $\mathbb{N} \cup \{?\}$ の要素を表す記号として u を用いる．
- ϵ 代入を，Ca の要素と $\mathbb{N} \cup \{?\}$ の要素の順序対 (e, u) の集合として扱う．また，ϵ 代入を表す記号として S を用いる．

ϵ 代入の定義

定義 (ϵ 代入)

ϵ 代入とは，Ca から $\mathbb{N} \cup \{?\}$ への部分関数である．

- $\mathbb{N} \cup \{?\}$ の要素を表す記号として u を用いる．
- ϵ 代入を，Ca の要素と $\mathbb{N} \cup \{?\}$ の要素の順序対 (e, u) の集合として扱う．また，ϵ 代入を表す記号として S を用いる．
- ϵ 代入の値域に属する $?$ は，初期値 0 が割り当てられている正準 ϵ 項を表すための表記上の工夫．
  ($?$ が割り当てられている正準 ϵ 項には初期値が
  割り当てられているとみなされる．)

ϵ 代入による表現の書き換え

定義 (ワンステップ書き換え関係 $\hookrightarrow^1_S$)

S を任意の ϵ 代入とする．表現の間に成り立つ関係 $\hookrightarrow^1_S$ を以下のように定義する．

1. $(e, n) \in S$ であるとき，$e \hookrightarrow^1_S n$.
2. $(e, ?) \in S$ であるとき，$e \hookrightarrow^1_S 0$.

ϵ 代入による表現の書き換え

定義 (ワンステップ書き換え関係 $\hookrightarrow^1_S$)

S を任意の ϵ 代入とする．表現の間に成り立つ関係 $\hookrightarrow^1_S$ を以下のように定義する．

1. $(e, n) \in S$ であるとき，$e \hookrightarrow^1_S n$.
2. $(e, ?) \in S$ であるとき，$e \hookrightarrow^1_S 0$.
3. ある k $(1 \leq k \leq n)$ について $t_k \hookrightarrow^1_S t'_k$ であるとき，
$$f_i t_1 \cdots t_n \hookrightarrow^1_S f_i t_1 \cdots t_{k-1} t'_k t_{k+1} \cdots t_n,$$
$$P_i t_1 \cdots t_n \hookrightarrow^1_S P_i t_1 \cdots t_{k-1} t'_k t_{k+1} \cdots t_n.$$
4. $A \hookrightarrow^1_S A'$ であり $\circ \in \{\wedge, \vee, \to\}$ であるとき，
$$\neg A \hookrightarrow^1_S \neg A', \quad A \circ B \hookrightarrow^1_S A' \circ B, \quad B \circ A \hookrightarrow^1_S B \circ A'.$$
5. $F[x] \hookrightarrow^1_S F'[x]$ であるとき，$\epsilon x F[x] \hookrightarrow^1_S \epsilon x F'[x]$.

ϵ 代入による表現の書き換え

補題

どの表現 θ, θ' についても，もし $\theta \hookrightarrow^1_S \theta'$ であるならば，

1. $d(\theta) > d(\theta')$ であり，かつ
2. $FV(\theta) = FV(\theta')$ である．

証明

関係 $\hookrightarrow^1_S$ に関する帰納法による．□

補題 ($\hookrightarrow^1_S$ の整礎性)

関係 $\hookrightarrow^1_S$ の無限列 $\theta_0 \hookrightarrow^1_S \theta_1 \hookrightarrow^1_S \ldots$ は存在しない．

ϵ 代入による表現の書き換え

定義 (書き換え関係 $\hookrightarrow_S^=$, $\hookrightarrow_S$, $\hookrightarrow_S^\sim$)

- $\theta \hookrightarrow_{S,n} \theta'$ であるのは，ある $\theta_0, \ldots, \theta_n$ が存在して
$$\theta \equiv \theta_0 \hookrightarrow_S^1 \theta_1 \hookrightarrow_S^1 \cdots \hookrightarrow_S^1 \theta_{n-1} \hookrightarrow_S^1 \theta_n \equiv \theta'$$
であるときである．
- ($\hookrightarrow_S$ の反射的閉包) $\theta \hookrightarrow_S^= \theta'$ であるのは，ある $n \in \{0, 1\}$ が存在して $\theta \hookrightarrow_{S,n} \theta'$ であるときである．
- ($\hookrightarrow_S^1$ の反射-推移的閉包) $\theta \hookrightarrow_S \theta'$ であるのは，ある $n \geq 0$ が存在して $\theta \hookrightarrow_{S,n} \theta'$ であるときである．

ϵ代入による表現の書き換え

定義 (書き換え関係 $\hookrightarrow_S^=$, $\hookrightarrow_S$, $\hookrightarrow_S^\sim$)

- $\theta \hookrightarrow_{S,n} \theta'$ であるのは，ある $\theta_0, \ldots, \theta_n$ が存在して
$$\theta \equiv \theta_0 \hookrightarrow_S^1 \theta_1 \hookrightarrow_S^1 \cdots \hookrightarrow_S^1 \theta_{n-1} \hookrightarrow_S^1 \theta_n \equiv \theta'$$
であるときである．
- ($\hookrightarrow_S$ の反射的閉包) $\theta \hookrightarrow_S^= \theta'$ であるのは，ある $n \in \{0, 1\}$ が存在して $\theta \hookrightarrow_{S,n} \theta'$ であるときである．
- ($\hookrightarrow_S^1$ の反射-推移的閉包) $\theta \hookrightarrow_S \theta'$ であるのは，ある $n \geq 0$ が存在して $\theta \hookrightarrow_{S,n} \theta'$ であるときである．
- ($\hookrightarrow_S^1$ の反射-対称-推移的閉包) 関係 $\theta \hookrightarrow_S^\sim \theta'$ を次のように帰納的に定義する．
  1. $\theta \hookrightarrow_S^= \theta'$ であるとき，$\theta \hookrightarrow_S^\sim \theta'$ である．
  2. $\theta \hookrightarrow_S^\sim \theta'$ であるとき，$\theta' \hookrightarrow_S^\sim \theta$ である．
  3. $\theta \hookrightarrow_S^\sim \theta'$ かつ $\theta' \hookrightarrow_S^\sim \theta''$ であるとき，$\theta \hookrightarrow_S^\sim \theta''$ である．

ϵ 代入による表現の書き換え

補題 (チャーチ・ロッサー性, 合流性)

$\theta, \theta_1, \theta_2$ を任意の表現とする.

1. *(合流性)* もし $\theta \hookrightarrow_S \theta_1, \quad \theta \hookrightarrow_S \theta_2$ であるならば, ある表現 θ' が存在して $\theta_1 \hookrightarrow_S \theta', \quad \theta_2 \hookrightarrow_S \theta'$ である.
2. *(チャーチ・ロッサー性)* もし $\theta_1 \hookrightarrow_S^{\sim} \theta_2$ であるならば, ある表現 θ' が存在して $\theta_1 \hookrightarrow_S \theta', \quad \theta_2 \hookrightarrow_S \theta'$ である.

ϵ 代入による表現の書き換え

補題 (チャーチ・ロッサー性，合流性)

$\theta, \theta_1, \theta_2$ を任意の表現とする．

1. (合流性) もし $\theta \hookrightarrow_S \theta_1, \quad \theta \hookrightarrow_S \theta_2$ であるならば，ある表現 θ' が存在して $\theta_1 \hookrightarrow_S \theta', \quad \theta_2 \hookrightarrow_S \theta'$ である．
2. (チャーチ・ロッサー性) もし $\theta_1 \hookrightarrow_S^{\sim} \theta_2$ であるならば，ある表現 θ' が存在して $\theta_1 \hookrightarrow_S \theta', \quad \theta_2 \hookrightarrow_S \theta'$ である．

定義 (正規形)

任意の表現 θ に対して，次をみたすような表現 θ'

$\theta \hookrightarrow_S \theta'$ であり，さらに，$\theta' \hookrightarrow_S^1 \theta''$ となる θ'' が存在しない．

のことを，θ の S 正規形と呼ぶ．

ϵ 代入による表現の書き換え

- $\hookrightarrow_S^1$ の整礎性と $\hookrightarrow_S$ のチャーチ・ロッサー性より次が分かる.

補題 (正規形の存在の一意性)

どの表現 θ およびどの ϵ 代入 S についても, θ の S 正規形は一意的に存在する.

- 表現 θ の S 正規形を $|\theta|_S$ と表すことにする.

ϵ 代入による表現の書き換え

- $\hookrightarrow^1_S$ の整礎性と $\hookrightarrow_S$ のチャーチ・ロッサー性より次が分かる.

補題 (正規形の存在の一意性)

どの表現 θ およびどの ϵ 代入 S についても，θ の S 正規形は一意的に存在する.

- 表現 θ の S 正規形を $|\theta|_S$ と表すことにする.
- $|A|_S$ が閉じていて $d(|A|_S) = 0$ であるとき,
  $|A|_S$ が真な論理式であるかどうかは原始再帰的に決定できる.
  - $|A|_S$ が $d(|A|_S) = 0$ をみたす真な閉論理式であるとき,
    このことを $A \hookrightarrow_S \top$ と表す.
  - $|A|_S$ が $d(|A|_S) = 0$ をみたす偽な閉論理式であることは,
    $A \hookrightarrow_S \perp$ と表す.

表現の階数

定義 (表現 θ の階数)

θ を任意の表現とし，$\mathrm{rk}_\sigma(\theta)$ を以下のように定義する．

1. $\sigma \notin FV(\theta) \cup \{*\}$ であるとき．$\mathrm{rk}_\sigma(\theta) := 0$.
2. $\sigma \in FV(\theta) \cup \{*\}$ であるとき．

$$\mathrm{rk}_\sigma(\theta) := \begin{cases} 0, & \textit{if } \theta \equiv x_i \textit{ or } 0, \\ \max\{\mathrm{rk}_\sigma(t_k) \mid 1 \leq k \leq n\}, & \textit{if } \theta \equiv f_i t_1 \dots t_n \\ & \ \textit{or } \theta \equiv P_i t_1 \dots t_n, \\ \max\{\mathrm{rk}_\sigma(A), \mathrm{rk}_\sigma(B)\}, & \textit{if } \theta \equiv A \wedge B, \\ & A \vee B \textit{ or } A \to B, \\ \mathrm{rk}_\sigma(A), & \textit{if } \theta \equiv \neg A, \\ \max\{\mathrm{rk}_\sigma(F[x]), \mathrm{rk}_x(F[x]) + 1\}, & \textit{if } \theta \equiv \epsilon x F[x]. \end{cases}$$

表現の階数

- 以下では，$\mathrm{rk}(\theta) := \mathrm{rk}_*(\theta)$ とおく．

補題 (階数補題)

階数関数 $\mathrm{rk}_\sigma(\theta)$ について以下が成り立つ．

1. どの表現 θ, θ' についても，$\theta \hookrightarrow^1_S \theta'$ であるならば $\mathrm{rk}_\sigma(\theta') \leq \mathrm{rk}_\sigma(\theta)$ である．
2. $\epsilon x F[x]$ が正準 ϵ 項であるとき，どの $n \in \mathbb{N}$ についても $\mathrm{rk}(F[n]) < \mathrm{rk}(\epsilon x F[x])$ である．
3. θ を任意の表現とする．θ' を θ の部分表現とすると，$\mathrm{rk}(\theta') \leq \mathrm{rk}(\theta)$ が成り立つ．

ϵ 代入がもつ便利な性質

- 任意の自然数 $k \in \mathbb{N}$ について，$S_{\leq k}$ を次のように定める．

$$S_{\leq k} := \{(e, n) \in S \mid \mathrm{rk}(e) \leq k\}.$$

同様にして，$S_{\geq k}, S_{<k}, S_{>k}$ も定義する．

補題 (切り捨て補題)

S, S' を任意の ϵ 代入とする．もし $S_{\leq r} = S'_{\leq r}$ であるならば，$\mathrm{rk}(\theta) \leq r$ となるすべての表現 θ について，$|\theta|_S = |\theta|_{S'}$ である．

ϵ 代入の更新過程の設計

- 以下では，閉じた主要論理式から構成される任意の有限列

$$Cr = Cr_0, Cr_1, \ldots, Cr_N$$

を固定する．各 Cr_I は (ϵ) タイプもしくは (P) タイプ.

ϵ 代入の更新過程の設計

- 以下では，閉じた主要論理式から構成される任意の有限列
$$Cr = Cr_0, Cr_1, \dots, Cr_N$$
を固定する．各 Cr_I は (ϵ) タイプもしくは (P) タイプ.
- $r^* := \max\{\mathrm{rk}(e) \mid e$ は Cr の中に現れる $\}$ とおけば，
階数補題により，Cr に対する ϵ 代入の更新においては
階数が r^* 以下の ϵ 項のみを考えればよいことになる.
- さらに，Cr を解釈するのに必要な ϵ 項の数は有限.
よって，定義域が，階数 r^* 以下の ϵ 項の有限集合である
ϵ 代入のみを考えれば十分.

ϵ 代入の更新過程の設計

- 以下では，閉じた主要論理式から構成される任意の有限列

$$Cr = Cr_0, Cr_1, \dots, Cr_N$$

  を固定する．各 Cr_I は (ϵ) タイプもしくは (P) タイプ．
- $r^* := \max\{\mathrm{rk}(e) \mid e$ は Cr の中に現れる $\}$ とおけば，階数補題により，Cr に対する ϵ 代入の更新においては階数が r^* 以下の ϵ 項のみを考えればよいことになる．
- さらに，Cr を解釈するのに必要な ϵ 項の数は有限．よって，定義域が，階数 r^* 以下の ϵ 項の有限集合である ϵ 代入のみを考えれば十分．
- 次の表記法を採用する：
  - $F[\![x/0]\!] := F[x/0]$,
  - $F[\![x/n+1]\!] := F[x/n+1] \wedge \neg F[x/n] \wedge \cdots \wedge \neg F[x/0]$.

ϵ 代入の更新過程の設計

- $\mathcal{F}(S) := \{F[\![x/n]\!] \mid (\epsilon x F, u) \in S,\ u \neq ?\}$.
- $\overline{S} := S \cup \{(e, ?) \mid e$ は正準的であり，　$e \notin \mathrm{dom}(S)\}$.

ϵ 代入の更新過程の設計

- $\mathcal{F}(S) := \{F[\![x/n]\!] \mid (\epsilon x F, u) \in S,\ u \neq ?\}$.
- $\overline{S} := S \cup \{(e, ?) \mid e$ は正準的であり， $e \notin \mathrm{dom}(S)\}$.
- S が計算において不整合であるのは，ある $A \in \mathcal{F}(S)$ が存在し $A \hookrightarrow_S \perp$ が成り立つときである．
  このような $A \in \mathcal{F}(S)$ が存在しないとき，
  S は計算において整合的であるという．
  どの $A \in \mathcal{F}(S)$ についても $A \hookrightarrow_S \top$ が成り立つとき，
  S は健全であるという．

ϵ 代入の更新過程の設計

- θ が S-計算可能であるのは $d(|\theta|_S) = 0$ が成り立つときである.
- S が閉論理式の有限集合 Γ を計算するのは,
  どの $A \in \Gamma$ も S-計算可能なときである.
- S が決定的であるのは，S が $\mathcal{F}(S)$ を計算し，かつどの
  I $(0 \leq I \leq N)$ についても Cr_I は S-計算可能なときである.
- S が Cr の解であるのは，どの I $(0 \leq I \leq N)$ についても
  $Cr_I \hookrightarrow_S \top$ が成り立つときである.

ϵ 代入の更新過程の設計

- θ が S-計算可能であるのは $d(|\theta|_S) = 0$ が成り立つときである.
- S が閉論理式の有限集合 Γ を計算するのは,
  どの $A \in \Gamma$ も S-計算可能なときである.
- S が決定的であるのは，S が $\mathcal{F}(S)$ を計算し，かつどの
  I $(0 \leq I \leq N)$ についても Cr_I は S-計算可能なときである.
- S が Cr の解であるのは，どの I $(0 \leq I \leq N)$ についても
  $Cr_I \hookrightarrow_S \top$ が成り立つときである.

定義 (H 規則の適用可能性)

S を任意の ϵ 代入とする．H 規則が S に適用されるのは,

1. S は決定的かつ計算において整合的で，さらに解でなく,
2. Cr の中に現れる (ϵ) タイプのすべての主要論理式 $F[t] \to F[\epsilon x F]$ について，S は集合 $\{F[m] \mid m < |t|_S\}$ を計算するときである.

ϵ 代入の更新過程の設計

定義 (ϵ 代入 S の更新 $H(S)$)

任意の ϵ 代入 S をとり，$\overline{S}$ に対して H 規則が適用されるとする．このとき，S の更新 $H(S)$ を次のように定義する．

(1) 各 $Cr_I \equiv F_0 \to F[\epsilon x F]$ について，$\epsilon x|F|_{\overline{S}}$ を e_I^S と，$\mathrm{rk}(\epsilon x|F|_{\overline{S}})$ を r_I^S と表す．

(2) $Cr_I \hookrightarrow_{\overline{S}} \perp$ となるような I の中でも次をみたす I^* をとる：

どの J $(0 \leq J \leq N)$ についても，もし $Cr_J \hookrightarrow_{\overline{S}} \perp$ ならば，$r_{I^*}^S < r_J^S$ であるかもしくは $r_{I^*}^S = r_J^S$ かつ $I^* < J$ である．

Cr_{I^*} を $F_0^* \to F^*[\epsilon x F^*]$ とおき，以下のように定義する．

$$Cr(S) := Cr_{I^*}, \qquad e^S := e_{I^*}^S, \qquad r^S := \mathrm{rk}(e^S).$$

ϵ 代入の更新過程の設計

定義 (ϵ 代入 S の更新 $H(S)$, contd.)

(3) 次のようにおく：

$$v^S := \begin{cases} |s|_{\overline{S}} - 1, & Cr_{I^*} \text{ が } (P) \text{ のとき}, \\ \min\{n \le |t|_{\overline{S}} \mid |F^*|_{\overline{S}}[\![n]\!] \hookrightarrow_{\overline{S}} \top\}, & Cr^{I^*} \text{ が } (\epsilon) \text{ のとき}. \end{cases}$$

(4) $H(S) := (S \setminus \{e^S, ?\})_{\le r^S} \cup \{(e^S, v^S)\}$.

ϵ 代入の更新過程の設計

定義 (ϵ 代入 S の更新 $H(S)$, contd.)

(3) 次のようにおく：

$$v^S := \begin{cases} |s|_{\overline{S}} - 1, & Cr_{I^*} \text{ が (P) のとき}, \\ \min\{n \le |t|_{\overline{S}} \mid |F^*|_{\overline{S}}[\![n]\!] \hookrightarrow_{\overline{S}} \top\}, & Cr^{I^*} \text{ が } (\epsilon) \text{ のとき}. \end{cases}$$

(4) $H(S) := (S \setminus \{e^S, ?\})_{\le r^S} \cup \{(e^S, v^S)\}$.

- $Cr_{I^*} \hookrightarrow_{\overline{S}} \perp$ より，v^S は意図通り定義される.
- どの n についても $(e^S, n) \notin S$ と前提してよいのは，$\overline{S}$ が健全であるから.
- $H(S)$ の定義において，$\mathrm{rk}(e) > r^S$ となる正準 ϵ 項 e に割り当てる値を初期値 0 に戻すのは，そうしないと $\overline{H(S)}$ が健全であるとは限らなくなるから.

ϵ 代入の更新過程の設計

補題

任意の ϵ 代入 S，任意の表現 θ および任意の項 t について，$\theta[t] \hookrightarrow_S |\theta|_S[|t|_S]$ である．

補題

S を任意の ϵ 代入とする．さらに，$\overline{S}$ が計算において整合的であり，かつ解でないとする．このとき以下が成り立つ：

(1) $(e^S, ?) \in \overline{S}$.

(2) $e^S \hookrightarrow_{\overline{S}} 0 \neq v^S = |e^S|_{H(S)}$.

(3) $\overline{H(S)}$ は計算において整合的である．

(4) $\overline{H(S)}$ が解でないならば，H 規則が $\overline{H(S)}$ に適用される．

ϵ 代入の更新過程の設計

定義 (H 過程)

Cr に対する H 過程 $S^0, S^1, \ldots$ を次のように定義する．

1. $S^0 := \emptyset$.
2. $\overline{S^n}$ が Cr の解でないとき．$S^{n+1} := H(S^n)$.
3. $\overline{S^n}$ が Cr の解であるとき．$S^{n+1} := \emptyset$.

- この定義がうまくいっていることは以下より分かる．
  先の補題より，
  - もし S^n が定義されているならば，$\overline{S^n}$ は計算において整合的である．
  - さらに，$\overline{S^n}$ が解でないならば，H 規則が $\overline{S^n}$ に適用される．

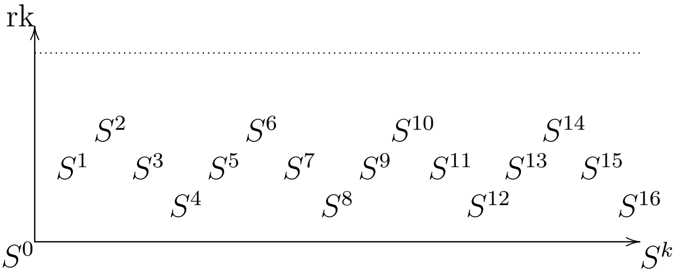
1. 体系 PA_ϵ

2. ϵ 代入法の定式化

3. ϵ 代入法の停止性証明

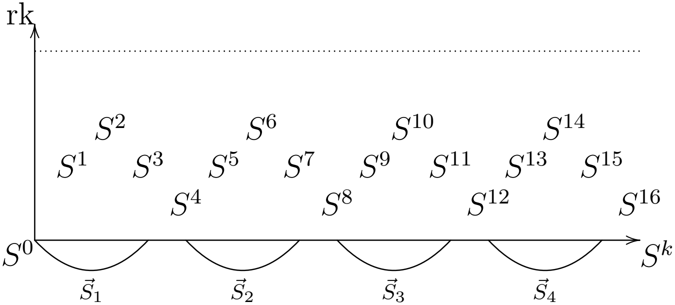
停止性証明のアイデア

- $\mathrm{rk}(S) := \max(\{\mathrm{rk}(e) \mid (e,u) \in S,\ u \neq ?\} \cup \{0\})$ とおく.



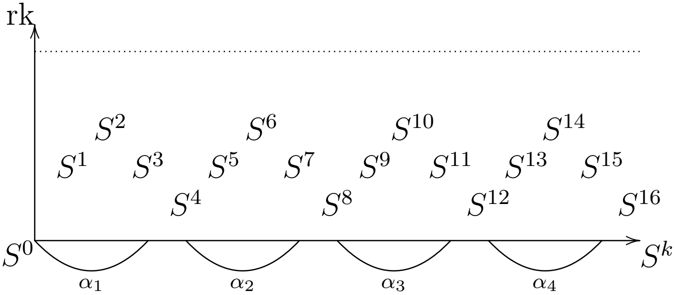
停止性証明のアイデア

- $\mathrm{rk}(S) := \max(\{\mathrm{rk}(e) \mid (e,u) \in S,\ u \neq ?\} \cup \{0\})$ とおく.



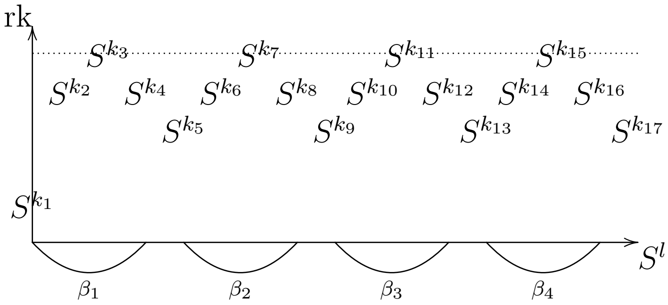
停止性証明のアイデア

- $\mathrm{rk}(S) := \max(\{\mathrm{rk}(e) \mid (e,u) \in S,\ u \neq ?\} \cup \{0\})$ とおく.



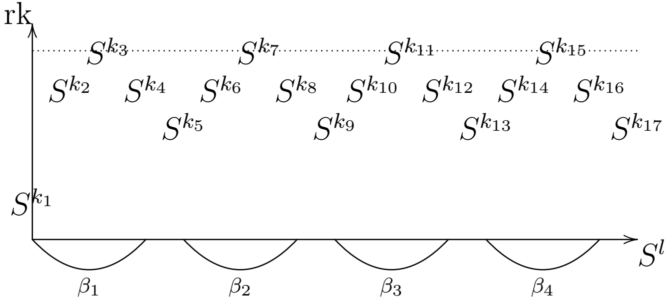
停止性証明のアイデア

- $\mathrm{rk}(S) := \max(\{\mathrm{rk}(e) \mid (e,u) \in S,\ u \neq ?\} \cup \{0\})$ とおく.



停止性証明のアイデア

- $\mathrm{rk}(S) := \max(\{\mathrm{rk}(e) \mid (e, u) \in S,\ u \neq ?\} \cup \{0\})$ とおく.



- インデックス補題：ϵ 代入の階数の減らない連続した有限列 $S^k, S^{k+1}, \ldots, S^{k+l}$ について，$\mathrm{ind}(S^k) > \cdots > \mathrm{ind}(S^{k+l})$.
- 辞書式順序補題：上のような $\vec{S}_i, \vec{S}_j$ $(i < j)$ について，ある辞書式順序 $\succ$ において $\vec{S}_i \succ \vec{S}_j$.

ϵ 代入のインデックス

- まず，インデックス補題を示す．

ϵ 代入のインデックス

- まず，インデックス補題を示す．
- 以下では，Cr に対する H 過程に属している ϵ 代入のみ扱う．

定義 (S は T よりも前進している)

S, T を任意の ϵ 代入とする．$S \sqsubseteq_A T$ であるのは，どの $(e, u) \in T$ についても，もし $u \neq ?$ であるならば $(e, u) \in S$ であるときである．

- 以下では，閉論理式の任意の有限集合 Φ の中に現れる閉じた ϵ 項すべての集合を Φ_ϵ とおき，Φ_ϵ の濃度を N_Φ とおく．また，Φ_ϵ の各要素を次が成り立つように $e_1, e_2, \ldots$ と並べる：

  e_j が e_i の真部分項であるならば，$j > i$ である．

ϵ 代入のインデックス

定義 (ϵ 代入のインデックス)

S を任意の ϵ 代入とし，Φ を閉論理式の任意の有限集合とする．

(1) 各 $e_i \in \Phi_\epsilon$ について，$\varphi(e_i; S)$ を次のように定義する：

$$\varphi(e_i; S) := \begin{cases} 1, & e_i \hookrightarrow_{\overline{S}} 0 \text{ であるとき}, \\ 0, & \text{そうでないとき}. \end{cases}$$

(2)

$$\mathrm{ord}_\Phi(S) := \sum \{2^i \cdot \varphi(e_i; S) \mid 0 \leq i \leq N_\Phi\}.$$

ϵ 代入のインデックス

定義 (ϵ 代入のインデックス, contd.)

(3) $\overline{S}$ が解でないとする．$\Gamma(S)$ を以下のように定義する．

- $Cr(S)$ が (P) タイプの主要論理式であるとき：$\Gamma(S) := \emptyset$,
- $Cr(S)$ が (ϵ) タイプの主要論理式

$$F[t] \to F[\epsilon x F[x]]$$

であるとき：$\Gamma(S) := \{|F|_{\overline{S}}[n] \mid 0 \leq n \leq |t|_{\overline{S}}\}$.

(4)

$$\deg(S) := \begin{cases} \mathrm{ord}_{\Gamma(S)}(S), & \overline{S} \text{ が解でないとき}, \\ 0, & \text{そうでないとき}. \end{cases}$$

(5)

$$\mathrm{ind}(S) := \omega \cdot \mathrm{ord}_{Cr}(S) + \deg(S).$$

インデックス補題の証明

補題

Φ を閉論理式の任意の有限集合とする．また，S, T を任意の ϵ 代入とし，$S \sqsubseteq_A T$ であると仮定する．このとき，$\mathrm{ord}_\Phi(S) < \mathrm{ord}_\Phi(T)$ であるか，どの $e \in \Phi_\epsilon$ についても $|e|_{\overline{S}} = |e|_{\overline{T}}$ かつ $\mathrm{ord}_\Phi(S) = \mathrm{ord}_\Phi(T)$ であるかのいずれかである．

インデックス補題の証明

補題

Φ を閉論理式の任意の有限集合とする．また，S, T を任意の ϵ 代入とし，$S \sqsubseteq_A T$ であると仮定する．このとき，もし $\mathrm{ord}_\Phi(S) = \mathrm{ord}_\Phi(T)$ であるならば以下が成り立つ：

1. Φ の中に現れるどの表現 θ についても，$|e|_{\overline{S}} = |e|_{\overline{T}}$ である．
2. $\Phi = Cr$ で $\overline{T}$ が解でないときは，
   - $\overline{S}$ も解でない．
   - どの $I(0 \leq I \leq N)$ についても，$e_I^S = e_I^T, r_I^S = r_I^T$ である．
   - $Cr(S) = Cr(T)$, $e^S = e^T$, $\Gamma(S) = \Gamma(T)$ である．
   - もし $Cr(S)$ が *(P)* タイプの主要論理式であるならば $v^S = v^T$ である．

インデックス補題の証明

補題 (インデックス補題)

S, T を任意の ϵ 代入として，$S \sqsubseteq_A T$ であると仮定する．また，$\overline{T}$ は解でないとする．このとき以下のいずれか一方が成り立つ．

1. $\mathrm{ind}(S) < \mathrm{ind}(T)$ である．
2. $\overline{S}$ も解でなく，さらに $\mathrm{ind}(S) = \mathrm{ind}(T)$ かつ

$$H(S) \sqsubseteq_A H(T),\ e^S = e^T,\ v^S = v^T,\ \mathrm{rk}(H(S)) = \mathrm{rk}(H(T))$$

   である．

証明

仮定と先の一つ目の補題より，閉論理式の任意の有限集合 Φ について，$\mathrm{ord}_\Phi(S) \leq \mathrm{ord}_\Phi(T)$ がいえる．$\mathrm{ord}_{C_r}(S) < \mathrm{ord}_{C_r}(T)$ であるときは明らかなので，$\mathrm{ord}_{C_r}(S) = \mathrm{ord}_{C_r}(T)$ である場合を考える．

インデックス補題の証明

証明, contd.

二つ目の補題の (2) より，$e^S = e^T$ および $\Gamma(S) = \Gamma(T)$ がいえる.
よって，$\mathrm{ord}_{\Gamma(S)}(S) < \mathrm{ord}_{\Gamma(S)}(T)$ であるときは定義より
$\mathrm{ind}(S) < \mathrm{ind}(T)$ が再び帰結する.

インデックス補題の証明

証明, contd.

二つ目の補題の (2) より，$e^S = e^T$ および $\Gamma(S) = \Gamma(T)$ がいえる．よって，$\mathrm{ord}_{\Gamma(S)}(S) < \mathrm{ord}_{\Gamma(S)}(T)$ であるときは定義より $\mathrm{ind}(S) < \mathrm{ind}(T)$ が再び帰結する．

最後に，$\mathrm{ord}_{\Gamma(S)}(S) = \mathrm{ord}_{\Gamma(S)}(T)$ の場合を考える．$\mathrm{ind}(S) = \mathrm{ind}(T)$ であることは定義よりいえる．また，$e^S = e^T$ であることから $\mathrm{rk}(H(S)) = \mathrm{rk}(H(T))$ であることが分かる．$v^S = v^T$ からは $H(S) \sqsubseteq_A H(T)$ が帰結するので，あとは $v^S = v^T$ を示せばよい．

インデックス補題の証明

証明, contd.

二つ目の補題の (2) より，$e^S = e^T$ および $\Gamma(S) = \Gamma(T)$ がいえる．よって，$\mathrm{ord}_{\Gamma(S)}(S) < \mathrm{ord}_{\Gamma(S)}(T)$ であるときは定義より $\mathrm{ind}(S) < \mathrm{ind}(T)$ が再び帰結する．

最後に，$\mathrm{ord}_{\Gamma(S)}(S) = \mathrm{ord}_{\Gamma(S)}(T)$ の場合を考える．$\mathrm{ind}(S) = \mathrm{ind}(T)$ であることは定義よりいえる．また，$e^S = e^T$ であることから $\mathrm{rk}(H(S)) = \mathrm{rk}(H(T))$ であることが分かる．$v^S = v^T$ からは $H(S) \sqsubseteq_A H(T)$ が帰結するので，あとは $v^S = v^T$ を示せばよい．

二つ目の補題 (2) より $Cr(S) = Cr(T)$ であり，さらに $Cr(S)$ が (ϵ) タイプの主要論理式 $F[t] \to F[\epsilon x F[x]]$ である場合のみを考えればよい．$\mathrm{ord}_{\Gamma(S)}(S) = \mathrm{ord}_{\Gamma(S)}(T)$ という仮定と二つ目の補題 (1) より $|F|_{\overline{S}}[x] = |F|_{\overline{T}}[x]$ および $|t|_{\overline{S}} = |t|_{\overline{T}}$ がいえる．よって，$v^S = v^T$. $\square$

切片

- $\mathrm{rk}(Cr) := \max\{\mathrm{rk}(Cr_I) \mid 1 \leq I \leq N\}, \quad \Lambda := \mathrm{rk}(Cr) + 1.$
- ϵ 代入の任意の有限列 $\vec{S} = S_0, \ldots, S_n$ に対して，$\mathrm{rk}(\vec{S})$ を次のように定義する．

$$\mathrm{rk}(\vec{S}) := \min(\{\mathrm{rk}(S_i) \mid 0 < i \leq n\} \cup \{\Lambda\}).$$

- 自然数 k が自然数 l より小さいとき，H 過程の k 番目の ϵ 代入 S^k から $l-1$ 番目の ϵ 代入 S^{l-1} までの列 $S^k, S^{k+1}, \ldots, S^{l-1}$ を $\vec{S}^{k,l}$ と表す．

切片

- $\mathrm{rk}(Cr) := \max\{\mathrm{rk}(Cr_I) \mid 1 \leq I \leq N\}, \quad \Lambda := \mathrm{rk}(Cr) + 1.$
- ϵ 代入の任意の有限列 $\vec{S} = S_0, \ldots, S_n$ に対して，$\mathrm{rk}(\vec{S})$ を次のように定義する．

$$\mathrm{rk}(\vec{S}) := \min(\{\mathrm{rk}(S_i) \mid 0 < i \leq n\} \cup \{\Lambda\}).$$

- 自然数 k が自然数 l より小さいとき，H 過程の k 番目の ϵ 代入 S^k から $l-1$ 番目の ϵ 代入 S^{l-1} までの列 $S^k, S^{k+1}, \ldots, S^{l-1}$ を $\vec{S}^{k,l}$ と表す．

定義 (切片)

有限列 $\vec{S}^{k,l}$ が切片 *(section)* であるのは，$\mathrm{rk}(S^k) < \mathrm{rk}(\vec{S}^{k,l})$ が成り立つときである．

切片間の辞書式順序

定義 (切片間の辞書式順序)

$\vec{S}^{m,n}$, $\vec{S}^{k,l}$ を任意の切片とする．$\vec{S}^{m,n} \prec \vec{S}^{k,l}$ が成り立つのは，以下の条件がすべてみたされるときである．

1. $S^m \sqsubseteq_A S^k$,
2. 次のいずれかが成り立つ：
   - $l_0 := n - m < l_1 := l - k$ であり，$\overline{S^{n-1}}$ は解でなく，すべての $i < l_0$ について $\mathrm{ind}(S^{m+i}) = \mathrm{ind}(S^{k+i})$ である．
   - ある $i < \min\{l_0, l_1\}$ が存在し，$\mathrm{ind}(S^{m+i}) < \mathrm{ind}(S^{k+i})$ であり，またすべての $j < i$ について $\mathrm{ind}(S^{m+j}) = \mathrm{ind}(S^{k+j})$ である．

辞書式順序補題の証明

補題 (辞書式順序補題)

$\vec{S}^{m,n}$, $\vec{S}^{k,l}$ を，H 過程のある切片で以下をみたすものとする.

$$S^{n-1} \text{ は解でなく，} n = k, \quad \mathrm{rk}(S^m) \leq \mathrm{rk}(S^k) < \mathrm{rk}(\vec{S}^{m,n}).$$

このとき，次が成り立つ.

1. $S^k \sqsubseteq_A S^m$,
2. $\vec{S}^{k,l} \prec \vec{S}^{m,n}$.

証明

1. 任意の $(e, u) \in S^m$ をとり，$u \neq ?$ であるとする．S^{n-1} が解でないという仮定と $\mathrm{rk}(S^m) \leq \mathrm{rk}(S^k) < \mathrm{rk}(\vec{S}^{m,n})$ という仮定より，$(e, u) \in S^k$ がいえる.

辞書式順序補題の証明

証明, contd.

2. 上の証明より $S^k \sqsubseteq_A S^m$ が分かっているから，
$l_0 := n - m > l_1 := l - k$ であるとき，すなわち，$\vec{S}^{k,l}$ の方が短い列であるときは，インデックス補題を有限回適用することで $\vec{S}^{k,l} \prec \vec{S}^{m,n}$ がいえる．

辞書式順序補題の証明

証明, contd.

2. 上の証明より $S^k \sqsubseteq_A S^m$ が分かっているから，
$l_0 := n - m > l_1 := l - k$ であるとき，すなわち，$\vec{S}^{k,l}$ の方が短い列であるときは，インデックス補題を有限回適用することで $\vec{S}^{k,l} \prec \vec{S}^{m,n}$ がいえる．

$l_0 \leq l_1$ である場合を考えよう．ある $i < l_0$ が存在して，$\mathrm{ind}(S^{k+i}) < \mathrm{ind}(S^{m+i})$ であり，そしてどの $j < i$ についても $\mathrm{ind}(S^{k+j}) = \mathrm{ind}(S^{m+j})$ となることを示せばよい．そのためには，再びインデックス補題より，

(*) どの $i < l_0$ についても $\mathrm{ind}(S^{k+i}) = \mathrm{ind}(S^{m+i})$ である

場合が起こりえないことを示せば十分である．

辞書式順序補題の証明

証明, contd.

仮に (*) が成り立つとしよう．すると，特に

$$\mathrm{ind}(S^{k+l_0-1}) = \mathrm{ind}(S^{m+l_0-1}) = \mathrm{ind}(S^{n-1})$$

が成り立つ．よって，インデックス補題より，

$$e^{S^{k+l_0-1}} = e^{S^{n-1}}, \quad v^{S^{k+l_0-1}} = v^{S^{n-1}}$$

である．

辞書式順序補題の証明

証明, contd.

仮に (*) が成り立つとしよう．すると，特に

$$\mathrm{ind}(S^{k+l_0-1}) = \mathrm{ind}(S^{m+l_0-1}) = \mathrm{ind}(S^{n-1})$$

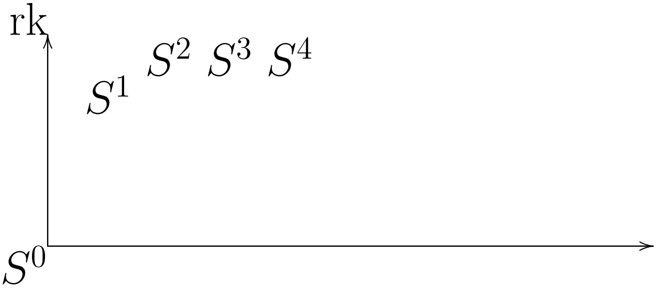
が成り立つ．よって，インデックス補題より，

$$e^{S^{k+l_0-1}} = e^{S^{n-1}}, \quad v^{S^{k+l_0-1}} = v^{S^{n-1}}$$

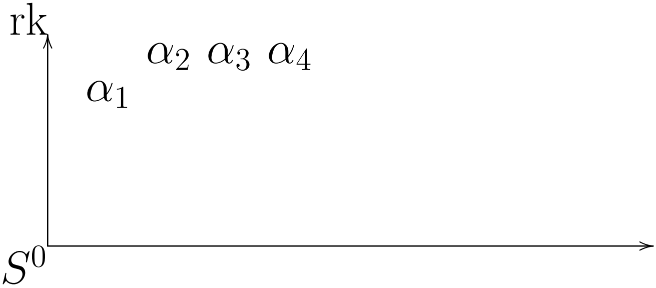
である．

一方で，$S^n = S^k$ であるから，$(e^{S^{n-1}}, v^{S^{n-1}}) \in S^k$ である．よって，$\mathrm{rk}(S^k) < \mathrm{rk}(\vec{S}^{k,l})$ より，$(e^{S^{n-1}}, v^{S^{n-1}}) \in S^{k+l_0-1}$ でもある．したがって，$(e^{S^{k+l_0-1}}, v^{S^{k+l_0-1}}) \in S^{k+l_0-1}$ となるが，このことは H 過程の性質に反する．$\square$

切片に対する順序数割り当てのアイデア

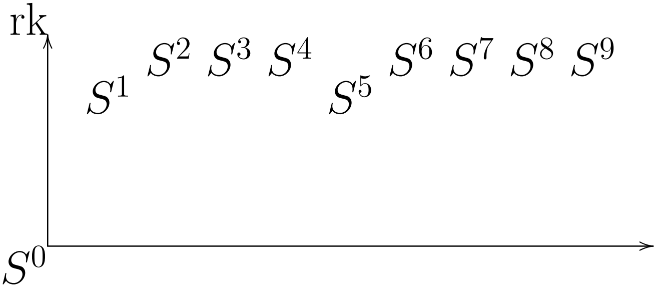


切片に対する順序数割り当てのアイデア

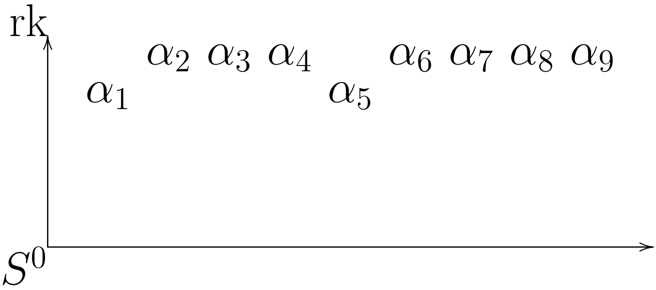


- インデックス補題より，$\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \alpha_4$.

切片に対する順序数割り当てのアイデア

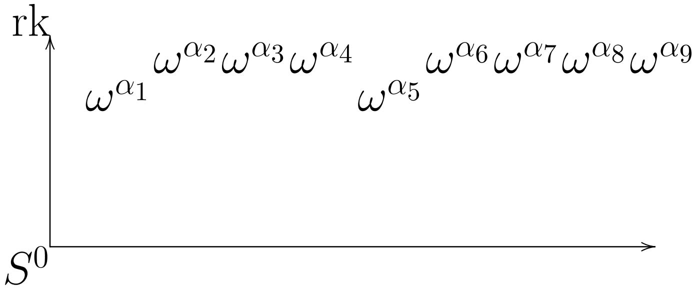


切片に対する順序数割り当てのアイデア



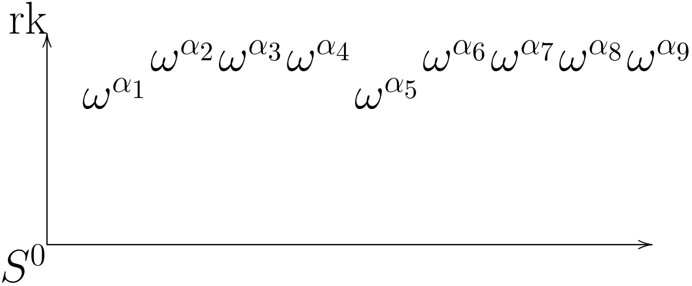
- インデックス補題より，
  $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \alpha_4, \quad \alpha_5 > \alpha_6 > \alpha_7 > \alpha_8 > \alpha_9$.
- 辞書式順序補題より，ある i $(1 \leq i \leq 4)$ が存在して
  $\alpha_i > \alpha_{i+4}$, $\alpha_j = \alpha_{j+4}$ for $j < i$.

切片に対する順序数割り当てのアイデア



- インデックス補題より，
  $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \alpha_4, \quad \alpha_5 > \alpha_6 > \alpha_7 > \alpha_8 > \alpha_9.$
- 辞書式順序補題より，ある i $(1 \leq i \leq 4)$ が存在して
  $\alpha_i > \alpha_{i+4}$, $\alpha_j = \alpha_{j+4}$ for $j < i$. よって，
  $\omega^{\alpha_1} + \omega^{\alpha_2} + \omega^{\alpha_3} + \omega^{\alpha_4} > \omega^{\alpha_5} + \omega^{\alpha_6} + \omega^{\alpha_7} + \omega^{\alpha_8} + \omega^{\alpha_9}$

切片に対する順序数割り当てのアイデア



$$
\begin{aligned}
\vec{S}^{1,5}\text{ の順序数} &:= \omega^{\omega^{\alpha_1}+\omega^{\alpha_2}+\omega^{\alpha_3}+\omega^{\alpha_4}} \\
&> \omega^{\omega^{\alpha_5}+\omega^{\alpha_6}+\omega^{\alpha_7}+\omega^{\alpha_8}+\omega^{\alpha_9}} \\
&=: \vec{S}^{5,10}\text{ の順序数}
\end{aligned}
$$

切片に対する順序数割り当てのアイデア

- 順序数上の関数の中でも，先の順序数割り当てに必要なのは次の二つの性質をみたすもの $f(\alpha)$：
  1. どの α_1, α_2 についても，
     もし $\alpha_1 < \alpha_2$ ならば $f(\alpha_1) < f(\alpha_2)$.
  2. どの $\alpha, \alpha_1, \alpha_2$ についても，
     もし $\alpha_1 < \alpha$ かつ $\alpha_2 < \alpha$ ならば $f(\alpha_1) + f(\alpha_2) < f(\alpha)$.
- $f(\alpha) := \omega^\alpha$ とおけば，この二つの性質は満たされる．

切片に対する順序数割り当て

定義 (切片の分割)

$\vec{S}^{k,l}$ を任意の切片とする.

- 自然数の有限集合 $\{i \mid \mathrm{rk}(S^i) = \mathrm{rk}(\vec{S}^{k,l}),\ k < i < l\}$ を考え，この集合の要素を小さい順に $k_1, \ldots, k_m$ と並べる．また，$k_0 := k$ および $k_{m+1} := l$ とおく．各 i $(0 \le i \le m)$ に対して，$\vec{S}^{k,l}$ の部分切片 $\vec{S}^{k,l}_i$ を有限列
$$\vec{S}^{k,l}_i := S^{k_i}, S^{k_i+1}, \ldots, S^{k_{i+1}-1}$$
と定義する.
- $\vec{S}^{k,l}$ の分割とは，$\vec{S}^{k,l}$ の部分切片からなる有限列
$$\vec{S}^{k,l}_0 * \cdots * \vec{S}^{k,l}_m$$
のことをいう．ただし，ここで $*$ は有限列の連結を表す.

切片に対する順序数割り当て

- 任意の自然数 n および任意の順序数 $\alpha < \varepsilon_0$ について $\omega_n(\alpha)$ を以下のように定義する.

$$\omega_0(\alpha) := \alpha, \quad \omega_{n+1}(\alpha) := \omega^{\omega_n(\alpha)}.$$

切片に対する順序数割り当て

- 任意の自然数 n および任意の順序数 $\alpha < \varepsilon_0$ について $\omega_n(\alpha)$ を以下のように定義する.

$$\omega_0(\alpha) := \alpha, \quad \omega_{n+1}(\alpha) := \omega^{\omega_n(\alpha)}.$$

定義 (順序数割り当て $\mathrm{o}(\vec{S}^{k,l}; n)$)

$\vec{S}^{k,l}$ を任意の切片とする．このとき，任意の自然数 $n \leq \mathrm{rk}(\vec{S}^{k,l})$ について，$\mathrm{o}(\vec{S}^{k,l}; n)$ を以下のように定義する.

- $l = k + 1$ のとき：$\mathrm{o}(\vec{S}^{k,l}; n) := \omega_{\mathrm{rk}(\vec{S}^{k,l})-n}(\mathrm{ind}(S^k))$.
- $l > k + 1$ のとき：$\vec{S}^{k,l}$ の分割を $\vec{S}^{k,l}_0 * \cdots * \vec{S}^{k,l}_m$ とおき，

$$\mathrm{o}(\vec{S}^{k,l}; n) := \omega_{\mathrm{rk}(\vec{S}^{k,l})-n}\left(\sum_{i=0}^{m} \mathrm{o}(\vec{S}^{k,l}_i; \mathrm{rk}(\vec{S}^{k,l}))\right).$$

停止性証明の主要補題

補題 (主要補題)

$\vec{S}^{m,n}$, $\vec{S}^{k,l}$ を，次のような切片とする：

$$\overline{S^{n-1}} \text{ は解でなく，} n = k,\ \mathrm{rk}(S^m) \leq \mathrm{rk}(S^k) < \mathrm{rk}(\vec{S}^{m,n}).$$

このとき，どの $i \leq \min\{\mathrm{rk}(\vec{S}^{m,n}), \mathrm{rk}(\vec{S}^{k,l})\}$ についても，
$\mathrm{o}(\vec{S}^{k,l}; i) < \mathrm{o}(\vec{S}^{m,n}; i)$ である．

証明のスケッチ

次の部分補題を示すことで，上の補題を証明する．

$\vec{S}^{m,n}$ および $\vec{S}^{k,l}$ を任意の切片とする．もし $\vec{S}^{k,l} \prec \vec{S}^{m,n}$ であるならば，どの $i \leq \min\{\mathrm{rk}(\vec{S}^{m,n}), \mathrm{rk}(\vec{S}^{k,l})\}$ についても，
$\mathrm{o}(\vec{S}^{k,l}; i) < \mathrm{o}(\vec{S}^{m,n}; i)$ が成り立つ．

この部分補題と辞書式順序補題から，いまの補題が帰結する．

停止性証明の主要補題

証明のスケッチ, contd.

$(n-m)+(l-k)$ に関する数学的帰納法を用いて，部分補題を証明する．ここでは以下の **(Key Case)** のみ考える．

(Key Case) $n-m>1$ であり，ある $j<\min\{n-m, l-k\}$ が存在して $\mathrm{ind}(S^{k+j})<\mathrm{ind}(S^{m+j})$ であり，またすべての $p<j$ について $\mathrm{ind}(S^{k+p})=\mathrm{ind}(S^{m+p})$ である場合：ここで，

$$q:=\min\{z \mid m<z<n,\ \mathrm{rk}(S^z)=\mathrm{rk}(\vec{S}^{m,n})\},$$

$$r:=\min(\{z \mid k<z<l,\ \mathrm{rk}(S^z)=\mathrm{rk}(\vec{S}^{k,l})\}\cup\{l-1\})$$

とおく．

停止性証明の主要補題

証明のスケッチ, contd.

$q \leq m+j$ かつ $m+j<r$ である場合を考える．このとき，$\vec{S}^{k,l}_0 \prec \vec{S}^{m,n}$ が成り立つ．さらに，$q \leq m+j<r$ であることと，すべての $p<j$ について $\mathrm{ind}(S^{k+p}) = \mathrm{ind}(S^{m+p})$ であることより，$\mathrm{rk}(\vec{S}^{k,l}) < \mathrm{rk}(\vec{S}^{m,n})$ である．ここから，

$$\begin{aligned} \mathrm{o}(\vec{S}^{m,n}; i) &= \omega_{\mathrm{rk}(\vec{S}^{k,l})-i}(\mathrm{o}(\vec{S}^{m,n}; \mathrm{rk}(\vec{S}^{k,l}))) \\ &> \omega_{\mathrm{rk}(\vec{S}^{k,l})-i}(\sum_{p=0}^{h} \mathrm{o}(\vec{S}^{k,l}_p; \mathrm{rk}(\vec{S}^{k,l}))) \\ &= \mathrm{o}(\vec{S}^{k,l}; i) \end{aligned}$$

がいえる．□

極小性公理の取り扱い

定理 (ϵ 代入法の停止性)

Cr に対する H 過程 $S^0, S^1, \ldots$ は停止する．
すなわち，ある $n \in \mathbb{N}$ が存在して S^n は Cr の解である．

補題

閉じた極小性公理の任意の有限集合を Γ とおき，S を健全で Γ を計算する任意の ϵ 代入とする．このとき，どの $A \in \Gamma$ についても，$A \hookrightarrow_S \top$ である．