1階述語論理に対する ϵ 計算

高橋 優太

名古屋大学・日本学術振興会

数学基礎論 SS2018

1. ϵ 計算の概要
2. 1 階述語論理から ϵ 計算への埋め込み
3. 第一イプシロン定理・エルブランの定理

1. ϵ 計算の概要

2. 1 階述語論理から ϵ 計算への埋め込み

3. 第一イプシロン定理・エルブランの定理

ϵ 計算とは

- ϵ 計算とは,「$F[x]$ をみたすある対象」を表す ϵ 項 $\epsilon x F[x]$ を含む (基本的には量化子なしの) 形式体系.

  A natural number is a real number.

ϵ 計算とは

- ϵ 計算とは,「$F[x]$ をみたすある対象」を表す ϵ 項 $\epsilon x F[x]$ を含む (基本的には量化子なしの) 形式体系.

$$\epsilon x Nat[x] \text{ is a real number.}$$

ϵ 計算とは

- ϵ 計算とは,「$F[x]$ をみたすある対象」を表す ϵ 項 $\epsilon x F[x]$ を含む (基本的には量化子なしの) 形式体系.

$$\epsilon x Nat[x] \text{ is a real number.}$$

- ϵ 項の表現力のゆえに，さまざまな体系を ϵ 計算へ埋め込むことができる．本講義で扱うのは,
1 階述語論理 PC を埋め込むことができる体系 EC_ϵ，および,
1 階ペアノ算術を埋め込むことができる体系 PA_ϵ.
- ϵ 計算は，D・ヒルベルトにより，数学の基礎付けのために導入される．ヒルベルトは，ϵ 計算がもつ性質を用いることで，算術および解析学の無矛盾性を証明しようとした.

3コマの予定

- 1コマ目 (本コマ) : 1階述語論理に対する ϵ 計算.
  エルブランの定理を ϵ 計算を用いて証明する.

3コマの予定

- 1コマ目 (本コマ) : 1階述語論理に対する ϵ 計算.
  エルブランの定理を ϵ 計算を用いて証明する.
- 2コマ目 : アッカーマンによる1階算術の無矛盾性証明.
  1階ペアノ算術の無矛盾性を, アッカーマンによる ϵ 代入法 (ϵ-substitution method) を用いて示す.

3コマの予定

- 1コマ目 (本コマ) : 1 階述語論理に対する ϵ 計算.
  エルブランの定理を ϵ 計算を用いて証明する.
- 2コマ目 : アッカーマンによる 1 階算術の無矛盾性証明.
  1 階ペアノ算術の無矛盾性を, アッカーマンによる ϵ 代入法 (ϵ-substitution method) を用いて示す.
- 3コマ目 : カット消去による ϵ 代入法の停止性証明.
  アッカーマンによる無矛盾性証明における主要部分である, ϵ 代入法の停止性証明を, ミンツにより導入された
  カット消去法により与える.

参考文献

- Avigad, J. and Zach, R., "The Epsilon Calculus", The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Summer 2016 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = <https://plato.stanford.edu/archives/sum2016/entries/epsilon-calculus/>.
  バランスのとれたサーベイ記事．文献情報も豊富．
- Moser, G. and Zach, R., "The Epsilon Calculus and Herbrand Complexity", *Studia Logica* **82**, 133–155 (2006).
  エルブランの定理を ϵ 計算を用いて証明している．
  本スライドを作成する際に参考にした．
- Zach, R., "The practice of finitism: Epsilon calculus and consistency proofs in Hilbert's program", *Synthese* **137**, 211–259 (2003).
  ヒルベルトの有限主義を ϵ 計算の観点から分析する歴史研究．

ϵ 項の意味

- 次の三つの文を考えてみよう：「x は学生である」を $P[x]$ と，「x は証明論が好きだ」を $Q[x]$ とおく．
  1. どの学生も証明論が好きだ．
  2. 無作為に選ばれたある学生は証明論が好きだ．
  3. 証明論が好きな学生がいる．

ϵ 項の意味

- 次の三つの文を考えてみよう：「x は学生である」を $P[x]$ と，「x は証明論が好きだ」を $Q[x]$ とおく．
  1. どの学生も証明論が好きだ． $\forall x(P[x] \to Q[x])$
  2. 無作為に選ばれたある学生は証明論が好きだ．？
  3. 証明論が好きな学生がいる． $\exists x(P[x] \wedge Q[x])$

ϵ 項の意味

- 次の三つの文を考えてみよう：「x は学生である」を $P[x]$ と，「x は証明論が好きだ」を $Q[x]$ とおく．
  1. どの学生も証明論が好きだ． $\forall x(P[x] \to Q[x])$
  2. 無作為に選ばれたある学生は証明論が好きだ． $Q[\epsilon x P[x]]$
  3. 証明論が好きな学生がいる． $\exists x(P[x] \land Q[x])$

ϵ 項の意味

- 次の三つの文を考えてみよう：「x は学生である」を $P[x]$ と，「x は証明論が好きだ」を $Q[x]$ とおく．
  1. どの学生も証明論が好きだ．$\forall x(P[x] \to Q[x])$
  2. 無作為に選ばれたある学生は証明論が好きだ．$Q[\epsilon x P[x]]$
  3. 証明論が好きな学生がいる．$\exists x(P[x] \land Q[x])$
- $P[x]$ をみたすものが存在しないときは，$\epsilon x P[x]$ は勝手な対象を指すとする．

ϵ 計算の目的

- ϵ 項でもって 1 階量化論理式を表現できる.

$$(\dagger)\ \exists x F[x] \iff F[\epsilon x F[x]], \quad (\dagger)'\ \forall x F[x] \iff F[\epsilon x \neg F[x]].$$

ϵ 計算の目的

- ϵ 項でもって 1 階量化論理式を表現できる.

$$(\dagger)\ \exists x F[x] \iff F[\epsilon x F[x]], \quad (\dagger)'\ \forall x F[x] \iff F[\epsilon x \neg F[x]].$$

- (†)' は，(†) の中の $F[x]$ を $\neg F[x]$ とおくことで得られる.
  (†) における ($\Leftarrow$) は 1 階述語論理における存在汎化に対応.
- (†) における ($\Rightarrow$) に対応するのが,
  主要論理式 (critical formula) と呼ばれる ϵ 計算の公理：

$$F[t] \to F[\epsilon x F[x]],$$

ただし t は任意の項である.

PC$_\epsilon$ および EC$_\epsilon$: 言語の定義

PC$_\epsilon$ の言語 $L(\mathrm{PC}_\epsilon)$ の語彙

- 変項：$x_0, x_1, x_2, \ldots,$
- 関数記号：$f_0, f_1, f_2, \ldots,$
- 述語記号：$\bot, P_0, P_1, P_2, \ldots,$
- 論理記号：$\neg, \wedge, \vee, \to, \forall, \exists,$
- イプシロン演算子：$\epsilon,$
- 補助記号：$(,).$

- $L(\mathrm{EC}_\epsilon)$ の語彙 $:=$ $L(\mathrm{PC}_\epsilon)$ の語彙 $\setminus \{\forall, \exists\},$
- $L(\mathrm{PC})$ の語彙 $:=$ $L(\mathrm{PC}_\epsilon)$ の語彙 $\setminus \{\epsilon\},$
- $L(\mathrm{EC})$ の語彙 $:=$ $L(\mathrm{EC}_\epsilon)$ の語彙 $\setminus \{\epsilon\}.$

PC$_\epsilon$ および EC$_\epsilon$: 言語の定義

定義 (L(PC$_\epsilon$) の項および論理式)

L(PC$_\epsilon$) の項および論理式を以下のように定義する.

1. すべての変項は項である.
2. f_i が n 項関数記号であり，$t_1, \ldots, t_n$ が項であるとき，$f_i t_1 \ldots t_n$ も項である.
3. P_i が n 項述語記号であり，$t_1, \ldots, t_n$ が項であるとき，$P_i t_1 \ldots t_n$ は論理式である.
4. A, B が論理式であるとき，$(\neg A), (A \wedge B), (A \vee B), (A \to B)$ も論理式である.
5. F が論理式であるとき，$(\forall x F), (\exists x F)$ も論理式である.

PC_ϵ および EC_ϵ: 言語の定義

定義 ($L(\mathsf{PC}_\epsilon)$ の項および論理式)

$L(\mathsf{PC}_\epsilon)$ の項および論理式を以下のように定義する.

1. すべての変項は項である.
2. f_i が n 項関数記号であり, $t_1, \dots, t_n$ が項であるとき, $f_i t_1 \dots t_n$ も項である.
3. P_i が n 項述語記号であり, $t_1, \dots, t_n$ が項であるとき, $P_i t_1 \dots t_n$ は論理式である.
4. A, B が論理式であるとき, $(\neg A), (A \wedge B), (A \vee B), (A \rightarrow B)$ も論理式である.
5. F が論理式であるとき, $(\forall x F), (\exists x F)$ も論理式である.
6. F が論理式であるとき, $(\epsilon x F)$ は項である.

PC$_\epsilon$ および EC$_\epsilon$: 言語の定義

- x, y, z：変項，s, t, u：項，A, B, C, D, F：論理式，e：ϵ 項，θ：表現 (すなわち，項もしくは論理式).
- $A[x/t]$ という表記でもって，A における x の自由な現れすべてに t を代入して得られる論理式を表すことにする.
  - ただし，ここでの代入によって新たに変項が束縛されることがないように，代入の前に束縛変項の付け替えを行なう.

PC$_\epsilon$ および EC$_\epsilon$: 言語の定義

- x, y, z：変項，s, t, u：項，A, B, C, D, F：論理式，
  e：ϵ 項，θ：表現 (すなわち，項もしくは論理式).
- $A[x/t]$ という表記でもって，A における x の自由な現れすべてに t を代入して得られる論理式を表すことにする.
  - ただし，ここでの代入によって新たに変項が束縛されることがないように，代入の前に束縛変項の付け替えを行なう.
- どの変項に代入がなされているかが文脈から明らかなとき，$A[x/t]$ を $A[t]$ と略記する．同様の表記を項に対しても用いる.

PC$_\epsilon$ および EC$_\epsilon$: 公理の定義

- PC$_\epsilon$・EC$_\epsilon$ のどちらもヒルベルト・スタイルの証明体系.

定義 (EC$_\epsilon$ の公理)

EC$_\epsilon$ の公理は以下から構成される.

1. $L(\mathsf{EC}_\epsilon)$ に属するトートロジー,
2. $L(\mathsf{EC}_\epsilon)$ に属する主要論理式：

$$F[t] \to F[\epsilon x F].$$

PC_ϵ および EC_ϵ: 公理の定義

定義 (PC_ϵ の公理)

PC_ϵ の公理は以下から構成される.

1. $L(\mathsf{PC}_\epsilon)$ に属するトートロジー,
2. $L(\mathsf{PC}_\epsilon)$ に属する量化子公理：
$$\forall x F \to F[t], \quad F[t] \to \exists x F,$$
3. $L(\mathsf{PC}_\epsilon)$ に属する主要論理式：
$$F[t] \to F[\epsilon x F].$$

PC_ϵ および EC_ϵ: 証明の定義

定義 (EC_ϵ における証明)

論理式の有限列 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ が EC_ϵ における証明であるのは，どの k $(1 \leq k \leq n)$ についても次のいずれかが成り立つときである．

- A_k は EC_ϵ の公理である．
- *(前件肯定)*：ある i, j が存在して

  $$i < k,\ j < k,\ A_i = A_j \to A_k$$

  である．

EC_ϵ の証明で A が最後に現れるものが存在するとき，
A は EC_ϵ において証明可能であるといい，$\mathrm{EC}_\epsilon \vdash A$ と表す．

PC_ϵ および EC_ϵ: 証明の定義

定義 (PC_ϵ における証明)

論理式の有限列 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ が PC_ϵ における証明であるのは，どの k $(1 \leq k \leq n)$ についても次のいずれかが成り立つときである．

- A_k は PC_ϵ の公理である．
- *(前件肯定)*：ある i, j が存在して

$$i < k,\ j < k,\ A_i = A_j \to A_k$$

　である．

PC_ϵ および EC_ϵ: 証明の定義

定義 (PC_ϵ における証明, contd.)

- *(全称汎化)*：ある i が存在して
$$i < k,\ A_i = B \to A[x],\ A_k = B \to \forall x A[x]$$
である *(ただし x は B に自由に現れない)*.
- *(存在汎化)*：ある i が存在して
$$i < k,\ A_i = A[x] \to B,\ A_k = \exists x A[x] \to B$$
であるときである *(ただし x は B に自由に現れない)*.

PC_ϵ の証明で A が最後に現れるものが存在するとき,
A は PC_ϵ において証明可能であるといい，$\mathsf{PC}_\epsilon \vdash A$ と表す.

$L(\mathsf{PC}_\epsilon)$ から $L(\mathsf{EC}_\epsilon)$ への翻訳

定義 ($L(\mathsf{PC}_\epsilon)$ から $L(\mathsf{EC}_\epsilon)$ への翻訳)

$L(\mathsf{PC}_\epsilon)$ の表現 θ の $L(\mathsf{EC}_\epsilon)$ への翻訳 θ^ϵ を以下のように定義する.

1. $x^\epsilon := x$.
2. $(f_i t_1 \dots t_n)^\epsilon := f_i t_1^\epsilon \dots t_n^\epsilon$.
3. $(P_i t_1 \dots t_n)^\epsilon := P_i t_1^\epsilon \dots t_n^\epsilon$.
4. $(A \circ B)^\epsilon := A^\epsilon \circ B^\epsilon$, ただし $\circ \in \{\wedge, \vee, \to\}$.
5. $(\neg A)^\epsilon := \neg A^\epsilon$.

$L(\mathsf{PC}_\epsilon)$ から $L(\mathsf{EC}_\epsilon)$ への翻訳

定義 ($L(\mathsf{PC}_\epsilon)$ から $L(\mathsf{EC}_\epsilon)$ への翻訳)

$L(\mathsf{PC}_\epsilon)$ の表現 θ の $L(\mathsf{EC}_\epsilon)$ への翻訳 θ^ϵ を以下のように定義する.

1. $x^\epsilon := x$.
2. $(f_i t_1 \ldots t_n)^\epsilon := f_i t_1^\epsilon \ldots t_n^\epsilon$.
3. $(P_i t_1 \ldots t_n)^\epsilon := P_i t_1^\epsilon \ldots t_n^\epsilon$.
4. $(A \circ B)^\epsilon := A^\epsilon \circ B^\epsilon$, ただし $\circ \in \{\wedge, \vee, \to\}$.
5. $(\neg A)^\epsilon := \neg A^\epsilon$.
6. $(\forall x F)^\epsilon := F^\epsilon[x/\epsilon x \neg(F^\epsilon)]$.
7. $(\exists x F)^\epsilon := F^\epsilon[x/\epsilon x(F^\epsilon)]$.
8. $(\epsilon x F)^\epsilon := \epsilon x(F^\epsilon)$.

$L(\mathsf{PC}_\epsilon)$ から $L(\mathsf{EC}_\epsilon)$ への翻訳

- P を 2 項述語記号と，A を $\exists x \forall y Pxy$ とおくと，

$$A^\epsilon = P(\epsilon x Px(\epsilon y \neg Pxy))(\epsilon y \neg P(\epsilon x Px(\epsilon y \neg Pxy))y).$$

$L(\mathrm{PC}_\epsilon)$ から $L(\mathrm{EC}_\epsilon)$ への翻訳

- P を 2 項述語記号と，A を $\exists x \forall y Pxy$ とおくと，

$$A^\epsilon = P(\epsilon x Px(\epsilon y \neg Pxy))(\epsilon y \neg P(\epsilon x Px(\epsilon y \neg Pxy))y).$$

1. $\epsilon y \neg Pxy$ は，与えられた x に対し，Pxy が成り立たない y としてイプシロン記号 ϵ が選んでくる対象である．
   $t[x] :\equiv \epsilon y \neg Pxy.$

$L(\mathrm{PC}_\epsilon)$ から $L(\mathrm{EC}_\epsilon)$ への翻訳

- P を 2 項述語記号と，A を $\exists x \forall y Pxy$ とおくと，

$$A^\epsilon = P(\epsilon x Px(\epsilon y \neg Pxy))(\epsilon y \neg P(\epsilon x Px(\epsilon y \neg Pxy))y).$$

1. $\epsilon y \neg Pxy$ は，与えられた x に対し，Pxy が成り立たない y としてイプシロン記号 ϵ が選んでくる対象である．$t[x] :\equiv \epsilon y \neg Pxy$.
2. すると，$\epsilon x Px(\epsilon y \neg Pxy)(\equiv \epsilon x Pxt[x])$ は，$t[x]$ による反例構成が失敗する証拠として，すなわち $Pxt[x]$ をみたす x として ϵ が選んでくる対象である．$c :\equiv \epsilon x Px(\epsilon y \neg Pxy)$.

$L(\mathrm{PC}_\epsilon)$ から $L(\mathrm{EC}_\epsilon)$ への翻訳

- P を 2 項述語記号と，A を $\exists x \forall y Pxy$ とおくと，

$$A^\epsilon = P(\epsilon x Px(\epsilon y \neg Pxy))(\epsilon y \neg P(\epsilon x Px(\epsilon y \neg Pxy))y).$$

1. $\epsilon y \neg Pxy$ は，与えられた x に対し，Pxy が成り立たない y としてイプシロン記号 ϵ が選んでくる対象である．$t[x] :\equiv \epsilon y \neg Pxy$.
2. すると，$\epsilon x Px(\epsilon y \neg Pxy)(\equiv \epsilon x Pxt[x])$ は，$t[x]$ による反例構成が失敗する証拠として，すなわち $Pxt[x]$ をみたす x として ϵ が選んでくる対象である．$c :\equiv \epsilon x Px(\epsilon y \neg Pxy)$.
3. 以上をまとめると，A^ϵ は

$$Pc(t[c])$$

と略記できる．つまり，$\exists x \forall y Pxy$ の翻訳 $(\exists x \forall y Pxy)^\epsilon$ は，c が $t[x]$ による反例構成が失敗する証拠であると述べる．

PC_ϵ を EC_ϵ に埋め込む

補題

$L(\mathsf{PC}_\epsilon)$ のどの表現 θ および $L(\mathsf{PC}_\epsilon)$ のどの項 t についても，
$(\theta[t])^\epsilon = \theta^\epsilon[t^\epsilon]$ が成り立つ．

証明

表現 θ の長さに関する帰納法による． $\square$

PC_ϵ を EC_ϵ に埋め込む

補題

$L(\mathsf{PC}_\epsilon)$ のどの表現 θ および $L(\mathsf{PC}_\epsilon)$ のどの項 t についても，
$(\theta[t])^\epsilon = \theta^\epsilon[t^\epsilon]$ が成り立つ．

証明

表現 θ の長さに関する帰納法による． □

補題 (PC_ϵ から EC_ϵ への埋め込み補題)

$\mathsf{PC}_\epsilon \vdash A$ であるならば，$\mathsf{EC}_\epsilon \vdash A^\epsilon$ である．

証明

PC_ϵ の証明 π の長さに関する帰納法を用いる．

PC$_\epsilon$ を EC$_\epsilon$ に埋め込む

証明, contd.

(Basis) π が PC$_\epsilon$ のある公理 A ひとつだけからなる場合.

(1) A が $L(\mathrm{PC}_\epsilon)$ に属するトートロジーであるとき.

(2) A が $L(\mathrm{PC}_\epsilon)$ に属する主要論理式であるとき.

(3) A が量化子公理

$$\forall x F \to F[t], \quad F[t] \to \exists x F$$

のいずれかであるときは，先の補題より，A^ϵ は

$$F^\epsilon[\epsilon x \neg F^\epsilon] \to F^\epsilon[t^\epsilon], \quad F^\epsilon[t^\epsilon] \to F^\epsilon[\epsilon x F^\epsilon]$$

のいずれかになっている.

PC_ϵ を EC_ϵ に埋め込む

証明, contd.

(Induction Step) $\pi = A_1, \ldots, A_{n+1}$ とおく.

(1) A_{n+1} が PC_ϵ の公理であるとき.

(2) ある i, j が存在して

$$i < n+1,\ j < n+1,\ A_i = A_j \to A_{n+1}$$

であるとき．帰納法の仮定より，EC_ϵ における A_i^ϵ の証明 $\pi_i = B_1, \ldots, B_k, A_i^\epsilon$ および A_j^ϵ の証明 $\pi_j = C_1, \ldots, C_l, A_j^\epsilon$ が存在する．$A_j^\epsilon = A_i^\epsilon \to A_{n+1}^\epsilon$ であるから，論理式の有限列

$$B_1, \ldots, B_k, A_i^\epsilon, C_1, \ldots, C_l, A_j^\epsilon, A_{n+1}^\epsilon$$

は EC_ϵ における A_{n+1}^ϵ の証明になっている.

PC_ϵ を EC_ϵ に埋め込む

証明, contd.

(3) ある i が存在して

$$i < n+1,\ A_i = B \to A[x],\ A_{n+1} = B \to \forall x A[x]$$

であるとき．帰納法の仮定より，EC_ϵ における $B^\epsilon \to A^\epsilon[x]$ の証明 π_i が存在する．あとは，π_i の中に現れる x をすべて $\epsilon x \neg A^\epsilon[x]$ で置き換えれば，EC_ϵ における $A^\epsilon_{n+1} = B^\epsilon \to A^\epsilon[\epsilon x \neg A^\epsilon[x]]$ の証明が得られる．

(4) ある i が存在して

$$i < n+1,\ A_i = A[x] \to B,\ A_{n+1} = \exists x A[x] \to B$$

であるとき．(3) と同様である．□

本日の残りの目標

第一イプシロン定理

A を $L(\mathrm{EC})$ 論理式とする．もし $\mathrm{PC}_\epsilon \vdash A$ であるならば $\mathrm{EC} \vdash A$ である．

- $L(\mathrm{EC})$ 論理式 A に対する PC_ϵ での証明から，超限的要素 (すなわち ϵ 項) を除去できるということ．

本日の残りの目標

第一イプシロン定理

A を $L(\mathsf{EC})$ 論理式とする．もし $\mathsf{PC}_\epsilon \vdash A$ であるならば $\mathsf{EC} \vdash A$ である．

- $L(\mathsf{EC})$ 論理式 A に対する PC_ϵ での証明から，超限的要素 (すなわち ϵ 項) を除去できるということ．

拡張第一イプシロン定理

$A[x_1, \dots, x_n]$ を $L(\mathsf{EC})$ 論理式とする．また，$s_1, \dots, s_n$ を $L(\mathsf{EC}_\epsilon)$ の項とし，$\mathsf{EC}_\epsilon \vdash A[s_1, \dots, s_n]$ であるとする．このとき，ϵ 項を含まない項 t_i^j $(1 \le i \le n,\ 1 \le j \le k)$ が存在して，

$$\mathsf{EC} \vdash A[t_1^1, \dots, t_n^1] \vee \cdots \vee A[t_1^k, \dots, t_n^k]$$

である．

本日の残りの目標

エルブランの定理

$B \equiv \exists x_1 \ldots \exists x_n A$ を $L(\mathsf{PC})$ 論理式とする，ただし A は量化子なし論理式である．もし $\mathsf{PC}_\epsilon \vdash B$ であるならば，ϵ 項を含まない項 t_i^j $(1 \le i \le n,\ 1 \le j \le k)$ が存在して，

$$\mathsf{EC} \vdash A[t_1^1, \ldots, t_n^1] \vee \cdots \vee A[t_1^k, \ldots, t_n^k]$$

である．

- PC_ϵ から EC_ϵ への埋め込み補題と拡張第一イプシロン定理より帰結する．
- PC_ϵ で証明可能な $B (\equiv \exists x_1 \ldots \exists x_n A)$ と，B に対する PC_ϵ での証明 π に対し，有限的意味を与える．EC にも分かるように B および π を翻訳する．

ϵ 項がもつ二種類の複雑さ

- まず，$L(\mathsf{EC}_\epsilon)$ に属する ϵ 項の階数 (rank) および次数 (degree) を定義する．
- ϵ 項に割り当てられるこれら二つの値は，それぞれ，ϵ 項に関するある種類の入れ子の深さを表す．

ϵ 項がもつ二種類の複雑さ

- まず，$L(\mathrm{EC}_\epsilon)$ に属する ϵ 項の階数 (rank) および次数 (degree) を定義する．
- ϵ 項に割り当てられるこれら二つの値は，それぞれ，ϵ 項に関するある種類の入れ子の深さを表す．
- 次数および階数は，証明の中の ϵ 項を置き換える操作を定式化するのに役立つ．
  - 以下では EC_ϵ における証明の中の ϵ 項を他の項で置き換える操作を行なうが，この操作を無制限に行なうと，もとは証明であった論理式の列が証明でなくなってしまう．
  - このことを避けるためには置き換え操作を慎重に設計する必要があるが，次数および階数はこの設計の際に役立つ．

ϵ 項の複雑さ：階数

- 次のような意味での ϵ 項の入れ子を考えてみよう．

  ある ϵ 項 $\epsilon x A$ の中に他の ϵ 項 e_1 が現れていて，かつ，$\epsilon x A$ における束縛変項 x が e_1 の中に現れている．

ϵ 項の複雑さ：階数

- 次のような意味での ϵ 項の入れ子を考えてみよう．

  ある ϵ 項 $\epsilon x A$ の中に他の ϵ 項 e_1 が現れていて，かつ，$\epsilon x A$ における束縛変項 x が e_1 の中に現れている．

- P_1 を 1 項述語記号，P_2 を 2 項述語記号とし，ϵ 項 e と e' を

$$e :\equiv \epsilon x P_2 x(\epsilon y P_1 y), \quad e' :\equiv \epsilon x P_1(\epsilon y P_2 y x)$$

とおくと，e はこの意味での入れ子はもたない一方で，
e' はこの意味での入れ子をもつ．

$$\epsilon x \qquad P_1 \qquad (\qquad \epsilon y \quad P_2 \quad y \quad x \qquad)$$

このことを束縛変項の**交差**と呼ぶことにしよう．

ϵ 項の複雑さ：階数

- こうした入れ子は以下のようにして任意に深くなりうる：
入れ子をもつ ϵ 項 e_1 自身が，
e_1 を真部分項として含む他の ϵ 項 e_2 に入れ子を生じさせ，
さらに e_2 が他の ϵ 項 e_3 に入れ子を生じさせ，...

$$\underbrace{\epsilon x_1 P_2 x_3 (\overbrace{\epsilon x_2 P_2 x_1 (\epsilon y P_2 x_2 y)}^{e_1})}_{e_2},$$

ϵ 項の複雑さ：階数

- こうした入れ子は以下のようにして任意に深くなりうる：
入れ子をもつ ϵ 項 e_1 自身が，
e_1 を真部分項として含む他の ϵ 項 e_2 に入れ子を生じさせ，
さらに e_2 が他の ϵ 項 e_3 に入れ子を生じさせ，...

$$\underbrace{\epsilon x_1 P_2 x_3 (\overbrace{\epsilon x_2 P_2 x_1 (\epsilon y P_2 x_2 y)}^{e_1})}_{e_2},$$

$$\overbrace{\epsilon x_3 P_1 (\underbrace{\epsilon x_1 P_2 x_3 (\overbrace{\epsilon x_2 P_2 x_1 (\epsilon y P_2 x_2 y)}^{e_1})}_{e_2})}^{e_3}, \ldots$$

ϵ 項の複雑さ：階数

- こうした入れ子は以下のようにして任意に深くなりうる：
入れ子をもつ ϵ 項 e_1 自身が，
e_1 を真部分項として含む他の ϵ 項 e_2 に入れ子を生じさせ，
さらに e_2 が他の ϵ 項 e_3 に入れ子を生じさせ，．．．

$$\underbrace{\epsilon x_1 P_2 x_3 (\overbrace{\epsilon x_2 P_2 x_1 (\epsilon y P_2 x_2 y)}^{e_1})}_{e_2},$$

$$\overbrace{\epsilon x_3 P_1 (\underbrace{\epsilon x_1 P_2 x_3 (\overbrace{\epsilon x_2 P_2 x_1 (\epsilon y P_2 x_2 y)}^{e_1})}_{e_2})}^{e_3}, \ldots$$

- (1 コマ目は)ϵ 項 e の階数は，e の中の一番外側の
イプシロン記号により束縛される変項がどのくらい深く，
いまの意味での入れ子を引き起こしているかを表す．

ϵ 項の複雑さ：次数

- ϵ 項の次数は，束縛変項の交差を含んでいない入れ子の深さを表す.

$$e :\equiv \epsilon x P_2 x(\epsilon y P_1 y), \quad e' :\equiv \epsilon x P_1(\epsilon y P_2 y x)$$

とおくとき，e' の入れ子は束縛変項の交差を含んでいるため，この入れ子は e' の次数を求めるときには考慮されない.
考慮されるのは，e がもつような入れ子である.

- 二つ目の意味での入れ子も任意に深くなることがありうる.

階数と次数の定義

定義 (次数)

t, s を $L(\mathrm{EC}_\epsilon)$ の任意の項と，$\epsilon x F$ を $L(\mathrm{EC}_\epsilon)$ の任意の ϵ 項と，A を $L(\mathrm{EC}_\epsilon)$ の任意の論理式とする．

(1) t が $\epsilon x F$ に従属しているのは，t は $\epsilon x F$ の真部分項であり，かつ，$\epsilon x F$ における束縛変項 x が t の中に現れるときである．

(2) t が $\epsilon x F$ の中で余っているのは，t は $\epsilon x F$ の真部分項であるが $\epsilon x F$ に従属していないときである．

階数と次数の定義

定義 (次数, contd.)

(3) ϵ 項 $\epsilon x F$ の次数 $\deg(\epsilon x F)$ を以下のように定義する.

- $\epsilon x F$ のどの真部分 ϵ 項も, $\epsilon x F$ のある部分 ϵ 項に従属しているとき : $\deg(\epsilon x F) := 1$.
- そうでないとき : $\epsilon x F$ のどの部分 ϵ 項にも従属していない $\epsilon x F$ の真部分 ϵ 項の中でも, 部分項関係に関して極大なものを $e_1, \ldots, e_n$ とおく.

$$\deg(\epsilon x F) := \max\{\deg(e_k) \mid 1 \leq k \leq n\} + 1.$$

- $\epsilon x F$ が真部分 ϵ 項を含まない場合は (3) の一つ目の条項にあてはまるため, $\deg(\epsilon x F) = 1$ となることに注意しよう.

階数と次数の定義

定義 (階数)

θ を $L(\mathrm{EC}_\epsilon)$ の任意の表現とし，e を $L(\mathrm{EC}_\epsilon)$ の任意の ϵ 項とする．任意の変項 x について，$\mathrm{rk}_x(\theta)$ を以下のように定義する．

- $x \notin FV(\theta)$ であるとき．$\mathrm{rk}_x(\theta) := 0$.
- $x \in FV(\theta)$ であるとき．

$$\mathrm{rk}_x(\theta) := \begin{cases} 0, & \theta \text{ が変項であるとき．} \\ \max\{\mathrm{rk}_x(t_k) \mid 1 \leq k \leq n\}, & \theta = f_i t_1 \ldots t_n \text{ であるとき．} \\ \max\{\mathrm{rk}_x(t_k) \mid 1 \leq k \leq n\}, & \theta = P_i t_1 \ldots t_n \text{ であるとき．} \\ \max\{\mathrm{rk}_x(A), \mathrm{rk}_x(B)\}, & \theta \text{ が } A \wedge B, A \vee B, A \to B \\ & \text{のどれかであるとき．} \\ \mathrm{rk}_x(A), & \theta = \neg A \text{ であるとき．} \\ \max\{\mathrm{rk}_x(F), \mathrm{rk}_y(F) + 1\}, & \theta = \epsilon y F \text{ であるとき．} \end{cases}$$

階数と次数の定義

定義 (階数, contd.)

e の階数 $\mathrm{rk}_\epsilon(e)$ を次のように定義する：e が $\epsilon x F$ という形をしているとき,

$$\mathrm{rk}_\epsilon(e) := \mathrm{rk}_x(F) + 1.$$

階数と次数の定義

定義 (階数, contd.)

e の階数 $\mathrm{rk}_\epsilon(e)$ を次のように定義する：e が $\epsilon x F$ という形をしているとき，

$$\mathrm{rk}_\epsilon(e) := \mathrm{rk}_x(F) + 1.$$

注意

階数を上のように定義したのは便宜上のことにすぎない．実際に，

$$\mathrm{rk}'(e) := \max(\{\mathrm{rk}'(e_1) \mid e_1 \text{ は } e \text{ に従属している }\} \cup \{0\}) + 1$$

と定義すると，

$$\mathrm{rk}_\epsilon(e) = \mathrm{rk}'(e)$$

が成り立つ．

階数補題

補題 (階数補題)

(1) $L(\mathrm{EC}_\epsilon)$ のどの表現 $\theta[y]$，どの変項 x およびどの $L(\mathrm{EC}_\epsilon)$ 項 t についても，もし $x \notin FV(t)$ であるならば，
$\mathrm{rk}_x(\theta[y]) = \mathrm{rk}_x(\theta[t])$ である．

(2) $L(\mathrm{EC}_\epsilon)$ のどの ϵ 項 $\epsilon x A[x, y]$ およびどの $L(\mathrm{EC}_\epsilon)$ 項 t についても，$\mathrm{rk}_\epsilon(\epsilon x A[x, y]) = \mathrm{rk}_\epsilon(\epsilon x A[x, t])$ が成り立つ．

証明

項の代入に関する規約より $x \notin FV(t)$ であることと，1. が成り立つことから以下がいえる．

$$\mathrm{rk}_\epsilon(\epsilon x A[x, y]) = \mathrm{rk}_x(A[x, y]) + 1 = \mathrm{rk}_x(A[x, t]) + 1 = \mathrm{rk}_\epsilon(\epsilon x A[x, t]). \ \square$$

本日の残りの目標

第一イプシロン定理

A を $L(\mathsf{EC})$ 論理式とする．もし $\mathsf{PC}_\epsilon \vdash A$ であるならば $\mathsf{EC} \vdash A$ である．

本日の残りの目標

第一イプシロン定理

A を $L(\mathsf{EC})$ 論理式とする．もし $\mathsf{PC}_\epsilon \vdash A$ であるならば $\mathsf{EC} \vdash A$ である．

拡張第一イプシロン定理

$A[x_1, \ldots, x_n]$ を $L(\mathsf{EC})$ 論理式とする．また，$s_1, \ldots, s_n$ を $L(\mathsf{EC}_\epsilon)$ の項とし，$\mathsf{EC}_\epsilon \vdash A[s_1, \ldots, s_n]$ であるとする．このとき，ϵ 項を含まない項 t_i^j $(1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq k)$ が存在して，

$$\mathsf{EC} \vdash A[t_1^1, \ldots, t_n^1] \vee \cdots \vee A[t_1^k, \ldots, t_n^k]$$

である．

本日の残りの目標

第一イプシロン定理

A を $L(\mathsf{EC})$ 論理式とする．もし $\mathsf{PC}_\epsilon \vdash A$ であるならば $\mathsf{EC} \vdash A$ である．

拡張第一イプシロン定理

$A[x_1, \ldots, x_n]$ を $L(\mathsf{EC})$ 論理式とする．また，$s_1, \ldots, s_n$ を $L(\mathsf{EC}_\epsilon)$ の項とし，$\mathsf{EC}_\epsilon \vdash A[s_1, \ldots, s_n]$ であるとする．このとき，ϵ 項を含まない項 t_i^j $(1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq k)$ が存在して，

$$\mathsf{EC} \vdash A[t_1^1, \ldots, t_n^1] \lor \cdots \lor A[t_1^k, \ldots, t_n^k]$$

である．

- EC_ϵ の証明から ϵ 項を除去して，EC の証明を得たい．

第一イプシロン定理の証明のアイデア

- 任意の $L(\mathrm{EC})$ 論理式 A をとり，$\mathrm{PC}_\epsilon \vdash A$ であるとする．
  埋め込み補題より，$\mathrm{EC}_\epsilon \vdash A$ である．
- ここで得られた EC_ϵ における A の証明 π からすべての主要論理式を除去して，EC における A の証明を得たい．

第一イプシロン定理の証明のアイデア

- 任意の $L(\mathrm{EC})$ 論理式 A をとり，$\mathrm{PC}_\epsilon \vdash A$ であるとする．埋め込み補題より，$\mathrm{EC}_\epsilon \vdash A$ である．
- ここで得られた EC_ϵ における A の証明 π からすべての主要論理式を除去して，EC における A の証明を得たい．
- 簡単のために，π が含む主要論理式は以下がすべてとする：

$$\Gamma := \{F[t_1] \to F[\epsilon x F], \ldots, F[t_n] \to F[\epsilon x F]\}.$$

第一イプシロン定理の証明のアイデア

- 任意の $L(\mathrm{EC})$ 論理式 A をとり，$\mathrm{PC}_\epsilon \vdash A$ であるとする．埋め込み補題より，$\mathrm{EC}_\epsilon \vdash A$ である．
- ここで得られた EC_ϵ における A の証明 π からすべての主要論理式を除去して，EC における A の証明を得たい．
- 簡単のために，π が含む主要論理式は以下がすべてとする：

$$\Gamma := \{F[t_1] \to F[\epsilon x F], \ldots, F[t_n] \to F[\epsilon x F]\}.$$

- $F[t_1] \lor \cdots \lor F[t_n] \lor (\neg F[t_1] \land \cdots \land \neg F[t_n])$ で場合分け！

第一イプシロン定理の証明のアイデア

$F[t_j]$ が成り立つ場合

主要論理式の集合 Γ の代わりに，Γ に現れる $\epsilon x F$ をすべて t_j で置き換えることで得られる論理式の集合を用いる：

$$\Gamma_j := \{F[t'_1] \to F[t_j], \ldots, F[t'_n] \to F[t_j]\}.$$

$F[t_j]$ が成り立つという仮定のもとでは，Γ_j に属する主要論理式はすべてトートロジーより導ける．あとは π のまねをして A を導く．

第一イプシロン定理の証明のアイデア

$F[t_j]$ が成り立つ場合

主要論理式の集合 Γ の代わりに，Γ に現れる $\epsilon x F$ をすべて t_j で置き換えることで得られる論理式の集合を用いる：

$$\Gamma_j := \{F[t'_1] \to F[t_j], \ldots, F[t'_n] \to F[t_j]\}.$$

$F[t_j]$ が成り立つという仮定のもとでは，Γ_j に属する主要論理式はすべてトートロジーより導ける．あとは π のまねをして A を導く．

$\neg F[t_1] \wedge \cdots \wedge \neg F[t_n]$ が成り立つ場合

この場合，$\Gamma (= \{F[t_1] \to F[\epsilon x F], \ldots, F[t_n] \to F[\epsilon x F]\})$ に属する論理式はすべてトートロジーより導ける．同様に π のまねをして A を導く．

第一イプシロン定理の証明

- 任意の主要論理式 $A :\equiv F[t] \to F[\epsilon x F]$ について，項 t は A に属するという．
- X が有限集合であるとき，X の要素の個数を $\#X$ と表すことにする．

定義

π を EC_ϵ における任意の証明とする．

1. π に現れる主要論理式に属する ϵ 項を，π の主要 ϵ 項と呼ぶ．
2. $\mathrm{rk}(\pi) := \max\{\mathrm{rk}_\epsilon(e) \mid e$ は π の主要 ϵ 項である $\}$.
3. $\deg(\pi, r) :=$ $\max\{\deg(e) \mid \mathrm{rk}_\epsilon(e) = r$ かつ e は π の主要 ϵ 項である $\}$.
4. $\mathrm{or}(\pi, r) := \#\{e \mid \mathrm{rk}_\epsilon(e) = r$ かつ e は π の主要 ϵ 項である $\}$.

第一イプシロン定理の証明

補題 (置き換え補題)

π を EC_ϵ における証明とする．以下をみたす e, e', B', C をとる：

- e を，π の主要 ϵ 項で $\mathrm{rk}_\epsilon(e) = \mathrm{rk}(\pi)$ および $\deg(e) = \deg(\pi, \mathrm{rk}(\pi))$ をみたす任意のものとする．さらに $A[t] \to A[e]$ を，e が属する π の主要論理式の一つとする．
- $B' \equiv B[s] \to B[\epsilon y B]$ を，π の主要論理式の中で $e \not\equiv \epsilon y B$ をみたす任意のものとする．
- C を，B' の中に現れる e を t で置き換えた結果得られる論理式とする．このとき，

1. C は主要論理式である．C に属する ϵ 項を e' とおく．
2. $\mathrm{rk}_\epsilon(\epsilon y B) = \mathrm{rk}(\pi)$ であるとき，e' と $\epsilon y B$ は同一である．
3. $\mathrm{rk}_\epsilon(e') = \mathrm{rk}_\epsilon(\epsilon y B)$.

第一イプシロン定理の証明

証明

B' の中に e が現れないとき，補題が成り立つことは明らか.

(Case 1) $B' = B[s] \to B[\epsilon y B]$ において表示されている s の現れもしくは $\epsilon y B$ の現れの少なくとも一つが e の中にある場合：
このとき C が主要論理式でなくなる可能性があるが，
実際はこのケースはありえない.

第一イプシロン定理の証明

証明

B' の中に e が現れないとき，補題が成り立つことは明らか．

(Case 1) $B' = B[s] \to B[\epsilon y B]$ において表示されている s の現れもしくは $\epsilon y B$ の現れの少なくとも一つが e の中にある場合：
このとき C が主要論理式でなくなる可能性があるが，
実際はこのケースはありえない．仮に，$B' \equiv B[s] \to B[\epsilon y B]$ において表示されている s の現れが e の中にあるとしよう．
すると，e は $e_1[s]$ という形をしていることになり，B' は
$B_1[e_1[s]] \to B_1[e_1[\epsilon y B_1[e_1[y]]]]$ という形をしていることになる．
階数補題より，

$$\mathrm{rk}_\epsilon(e) = \mathrm{rk}_\epsilon(e_1[s]) = \mathrm{rk}_\epsilon(e_1[y]) < \mathrm{rk}_\epsilon(\epsilon y B_1[e_1[y]])$$

がいえるが，このことは $\mathrm{rk}_\epsilon(e) = \mathrm{rk}(\pi)$ であることに反する．

第一イプシロン定理の証明

証明, contd.

(Case 2) e は s の中に現れるが B の中には現れない場合：
このとき，s は $s_1[e]$ という形をしているから，論理式 C は

$$B[s_1[t]] \to B[\epsilon y B]$$

という形になる．C は確かに主要論理式であり，C に属する
ϵ 項 e' は $\epsilon y B$ にほかならない．よって，
いまの場合において補題が成り立つことは明らかである．

第一イプシロン定理の証明

証明, contd.

(Case 3) e が B の中に現れる場合：このとき B は $B_1[y,e]$ という形をしており，B', C はそれぞれ次の形をしている．

$$B' \equiv B_1[s,e] \to B_1[\epsilon y B_1[y,e],e], \quad C \equiv B_1[s',t] \to B_1[\epsilon y B_1[y,t],t].$$

仮に $\mathrm{rk}_\epsilon(\epsilon y B_1[y,e]) = \mathrm{rk}(\pi)$ とする．項の代入に関する規約より e は $\epsilon y B_1[y,e]$ のどの部分 ϵ 項にも従属していないから，$\deg(\epsilon y B_1[y,e]) > \deg(e)$ となり，$\deg(e) = \deg(\pi, \mathrm{rk}(\pi))$ に反する．よって 2. は空虚に成り立つ．

第一イプシロン定理の証明

証明, contd.

(Case 3) e が B の中に現れる場合：このとき B は $B_1[y, e]$ という形をしており，B', C はそれぞれ次の形をしている．

$$B' \equiv B_1[s, e] \to B_1[\epsilon y B_1[y, e], e], \quad C \equiv B_1[s', t] \to B_1[\epsilon y B_1[y, t], t].$$

仮に $\mathrm{rk}_\epsilon(\epsilon y B_1[y, e]) = \mathrm{rk}(\pi)$ とする．項の代入に関する規約より e は $\epsilon y B_1[y, e]$ のどの部分 ϵ 項にも従属していないから，$\deg(\epsilon y B_1[y, e]) > \deg(e)$ となり，$\deg(e) = \deg(\pi, \mathrm{rk}(\pi))$ に反する．よって 2. は空虚に成り立つ．一方で，階数補題より，

$$\mathrm{rk}_\epsilon(e') = \mathrm{rk}_\epsilon(\epsilon y B[y, z]) = \mathrm{rk}_\epsilon(\epsilon y B_1[y, e]) = \mathrm{rk}_\epsilon(\epsilon y B)$$

がいえる．よって 3. も成り立つ．□

第一イプシロン定理の証明

補題 (オーダー還元補題)

π を EC_ϵ における B の証明とし，e を π の主要 ϵ 項で

$$\mathrm{rk}_\epsilon(e) = \mathrm{rk}(\pi), \quad \deg(e) = \deg(\pi, \mathrm{rk}(\pi))$$

をみたすものとする．このとき，B の EC_ϵ 証明 π_e が存在し，

$$\mathrm{rk}(\pi_e) \leq \mathrm{rk}(\pi), \quad \deg(\pi_e, \mathrm{rk}(\pi)) \leq \deg(\pi, \mathrm{rk}(\pi)),$$

$$\mathrm{or}(\pi_e, \mathrm{rk}(\pi)) = \mathrm{or}(\pi, \mathrm{rk}(\pi)) - 1$$

が成り立つ．

第一イプシロン定理の証明

証明

e が属する主要論理式の中でも，π の中に現れるものを

$$A[t_1] \to A[e], \dots, A[t_n] \to A[e]$$

というようにしてすべて列挙し，それぞれ C_k で表す $(1 \leq k \leq n)$. π の中からこれらの主要論理式を除去して，$\mathrm{rk}_\epsilon(e') = \mathrm{rk}(\pi)$ となる主要 ϵ 項 e' の数が一つ減った B の証明を構成する.

第一イプシロン定理の証明

証明

e が属する主要論理式の中でも，π の中に現れるものを

$$A[t_1] \to A[e], \ldots, A[t_n] \to A[e]$$

というようにしてすべて列挙し，それぞれ C_k で表す $(1 \leq k \leq n)$.
π の中からこれらの主要論理式を除去して，$\mathrm{rk}_\epsilon(e') = \mathrm{rk}(\pi)$ となる主要 ϵ 項 e' の数が一つ減った B の証明を構成する.
以下では最初に，各 k $(1 \leq k \leq n)$ について，上の主要論理式のどれ一つも用いない $A[t_k] \to B$ の証明 π_k を構成する.

第一イプシロン定理の証明

証明

e が属する主要論理式の中でも，π の中に現れるものを

$$A[t_1] \to A[e], \ldots, A[t_n] \to A[e]$$

というようにしてすべて列挙し，それぞれ C_k で表す $(1 \le k \le n)$.
π の中からこれらの主要論理式を除去して，$\mathrm{rk}_\epsilon(e') = \mathrm{rk}(\pi)$ となる主要 ϵ 項 e' の数が一つ減った B の証明を構成する.
以下では最初に，各 k $(1 \le k \le n)$ について，上の主要論理式のどれ一つも用いない $A[t_k] \to B$ の証明 π_k を構成する.
その次に，同様に上の主要論理式のどれ一つも用いない $\neg A[t_1] \wedge \cdots \wedge \neg A[t_n] \to B$ の証明を構成する．あとはトートロジー $A[t_1] \vee \cdots \vee A[t_n] \vee (\neg A[t_1] \wedge \cdots \wedge \neg A[t_n])$ に訴えればよい.

第一イプシロン定理の証明

証明, contd.

任意の k $(1 \leq k \leq n)$ をひとつ固定しよう．まず，π の中に現れている e をすべて t_k で置き換える．すると，どの j $(1 \leq j \leq n)$ についても，主要論理式 C_j は $A[t'_j] \to A[t_k]$ と書き換えられる．
ここで $\mathsf{EC}_\epsilon \cup \{A[t_k]\} \vdash A[t'_j] \to A[t_k]$ がいえることに注意する．

第一イプシロン定理の証明

証明, contd.

任意の k $(1 \leq k \leq n)$ をひとつ固定しよう．まず，π の中に現れている e をすべて t_k で置き換える．すると，どの j $(1 \leq j \leq n)$ についても，主要論理式 C_j は $A[t'_j] \to A[t_k]$ と書き換えられる．ここで $\mathsf{EC}_\epsilon \cup \{A[t_k]\} \vdash A[t'_j] \to A[t_k]$ がいえることに注意する．

したがって，あとは π を模倣すれば，$\mathsf{EC}_\epsilon \cup \{A[t_k]\} \vdash B$ がいえる．よって，演繹定理より，$\mathsf{EC}_\epsilon \vdash A[t_k] \to B$ が成り立つことが分かる．

第一イプシロン定理の証明

証明, contd.

任意の k $(1 \leq k \leq n)$ をひとつ固定しよう．まず，π の中に現れている e をすべて t_k で置き換える．すると，どの j $(1 \leq j \leq n)$ についても，主要論理式 C_j は $A[t'_j] \to A[t_k]$ と書き換えられる．ここで $\mathsf{EC}_\epsilon \cup \{A[t_k]\} \vdash A[t'_j] \to A[t_k]$ がいえることに注意する．

したがって，あとは π を模倣すれば，$\mathsf{EC}_\epsilon \cup \{A[t_k]\} \vdash B$ がいえる．よって，演繹定理より，$\mathsf{EC}_\epsilon \vdash A[t_k] \to B$ が成り立つことが分かる．

こうして得られた証明を π_k とおく．e は π_k の主要 ϵ 項ではなく，また，π の中の e を t_k で置き換えても，置き換え補題より階数 $\mathrm{rk}(\pi)$ をもつ ϵ 項は同一のままである．それゆえ，$\mathrm{or}(\pi_k, \mathrm{rk}(\pi)) = \mathrm{or}(\pi, \mathrm{rk}(\pi)) - 1$ が成り立つ．

第一イプシロン定理の証明

証明, contd.

π_k が求める性質をみたすことを確認しよう．どの C_j とも異なる π の中の任意の主要論理式 B' を考え，B' に属する ϵ 項を e' とおく．π の中の e を t_k で置き換えることにより，B' は主要論理式 C に変わったとしよう．主要論理式 C に属する ϵ 項を e^* で表す．

第一イプシロン定理の証明

証明, contd.

π_k が求める性質をみたすことを確認しよう．どの C_j とも異なる π の中の任意の主要論理式 B' を考え，B' に属する ϵ 項を e' とおく．π の中の e を t_k で置き換えることにより，B' は主要論理式 C に変わったとしよう．主要論理式 C に属する ϵ 項を e^* で表す．

すると，置き換え補題より $\mathrm{rk}_\epsilon(e') = \mathrm{rk}_\epsilon(e^*)$ であるから，C に属する ϵ 項の階数は変わらない．よって，$\mathrm{rk}(\pi_k) \leq \mathrm{rk}(\pi)$ である．

第一イプシロン定理の証明

証明, contd.

π_k が求める性質をみたすことを確認しよう．どの C_j とも異なる π の中の任意の主要論理式 B' を考え，B' に属する ϵ 項を e' とおく．π の中の e を t_k で置き換えることにより，B' は主要論理式 C に変わったとしよう．主要論理式 C に属する ϵ 項を e^* で表す．

すると，置き換え補題より $\mathrm{rk}_\epsilon(e') = \mathrm{rk}_\epsilon(e^*)$ であるから，C に属する ϵ 項の階数は変わらない．よって，$\mathrm{rk}(\pi_k) \leq \mathrm{rk}(\pi)$ である．

同様に置き換え補題により，$\mathrm{rk}_\epsilon(e') = \mathrm{rk}(\pi)$ であるときは $e' = e^*$ であるから，$\mathrm{rk}(\pi)$ をもつ ϵ 項が B' に属している場合は $\deg(e^*) = \deg(e')$ となる．よって，$\deg(\pi_k, \mathrm{rk}(\pi)) \leq \deg(\pi, \mathrm{rk}(\pi))$ がいえる．

第一イプシロン定理の証明

証明, contd.

次に，どの C_k も用いない $\neg A[t_1] \wedge \cdots \wedge \neg A[t_n] \to B$ の証明を構成しよう．理論 $\mathrm{EC}_\epsilon \cup \{\neg A[t_1] \wedge \cdots \wedge \neg A[t_n]\}$ を考えると，この理論においては，各 $C_k = A[t_k] \to A[e]$ を公理ではなく証明可能な論理式とすることができる．したがって，あとは π を模倣することにより $\mathrm{EC}_\epsilon \cup \{\neg A[t_1] \wedge \cdots \wedge \neg A[t_n]\} \vdash B$ がいえる．ゆえに演繹定理より，$\mathrm{EC}_\epsilon \vdash \neg A[t_1] \wedge \cdots \wedge \neg A[t_n] \to B$ の証明 π' が存在する．

第一イプシロン定理の証明

証明, contd.

次に，どの C_k も用いない $\neg A[t_1] \wedge \cdots \wedge \neg A[t_n] \to B$ の証明を構成しよう．理論 $\mathsf{EC}_\epsilon \cup \{\neg A[t_1] \wedge \cdots \wedge \neg A[t_n]\}$ を考えると，この理論においては，各 $C_k = A[t_k] \to A[e]$ を公理ではなく証明可能な論理式とすることができる．したがって，あとは π を模倣することにより $\mathsf{EC}_\epsilon \cup \{\neg A[t_1] \wedge \cdots \wedge \neg A[t_n]\} \vdash B$ がいえる．ゆえに演繹定理より，$\mathsf{EC}_\epsilon \vdash \neg A[t_1] \wedge \cdots \wedge \neg A[t_n] \to B$ の証明 π' が存在する．

π と π' とを比較すると，π' においては e が主要 ϵ 項でない点を除けば何も変わらない．よって，π' が

$$\mathrm{rk}(\pi') \leq \mathrm{rk}(\pi),\ \deg(\pi', \mathrm{rk}(\pi)) \leq \deg(\pi, \mathrm{rk}(\pi)),$$

$$\mathrm{or}(\pi', \mathrm{rk}(\pi)) = \mathrm{or}(\pi, \mathrm{rk}(\pi)) \dot{-} 1$$

をみたすことが分かる．$\square$

第一イプシロン定理の証明

定理 (第一イプシロン定理)

A を $L(\mathrm{EC})$ 論理式とする．もし $\mathrm{PC}_\epsilon \vdash A$ であるならば $\mathrm{EC} \vdash A$ である．

証明

埋め込み補題より，EC_ϵ における A の証明 π が存在する．あとは，オーダー還元補題を繰り返し適用すれば，π の中の主要 ϵ 項 e を $\mathrm{rk}_\epsilon(e)$ が大きい順から除去することができ，主要論理式をまったく含まない A の EC_ϵ 証明が得られる．(厳密にいえば，$\langle \mathrm{rk}(\pi), \mathrm{or}(\pi, \mathrm{rk}(\pi))\rangle$ に関する二重帰納法を用いる．) あとは，この証明の中に残った ϵ 項をそれぞれ勝手な変項で置き換えれば，A の EC 証明が得られる．$\square$

拡張第一イプシロン定理の証明

定義

π を EC_ϵ における証明とする.

1. ϵ 項 e に関する π の広さとは, π に現れ, かつ e が属する主要論理式の数であるとし, $\mathrm{wd}(\pi, e)$ と表す.
2. $\mathrm{wd}(\pi, r) := \max\{\mathrm{wd}(\pi, e) \mid \mathrm{rk}(e) = r\} + 1.$

拡張第一イプシロン定理の証明

定義

π を EC_ϵ における証明とする．

1. ϵ 項 e に関する π の広さとは，π に現れ，かつ e が属する主要論理式の数であるとし，$\mathrm{wd}(\pi, e)$ と表す．
2. $\mathrm{wd}(\pi, r) := \max\{\mathrm{wd}(\pi, e) \mid \mathrm{rk}(e) = r\} + 1$.

定義

$A[x_1, \ldots, x_n]$ を $L(\mathrm{EC})$ 論理式とし，$s_1, \ldots, s_n$ を $L(\mathrm{EC}_\epsilon)$ の項とする．$L(\mathrm{EC}_\epsilon)$ の論理式 $A' \equiv A[s_1, \ldots, s_n]$ の選言拡大とは，

$$A[s_1^1, \ldots, s_n^1] \vee \cdots \vee A[s_1^k, \ldots, s_n^k]$$

という形の $L(\mathrm{EC}_\epsilon)$ の論理式のことをいう．

拡張第一イプシロン定理の証明

補題 (拡張オーダー還元補題)

$A[x_1, \dots, x_n]$ を $L(\mathrm{EC})$ 論理式とする．また，$s_1, \dots, s_n$ を $L(\mathrm{EC}_\epsilon)$ の項とし，π を EC_ϵ における $A[s_1, \dots, s_n]$ の証明とする．さらに，e を π の主要 ϵ 項で $\mathrm{rk}_\epsilon(e) = \mathrm{rk}(\pi)$, $\deg(e) = \deg(\pi, \mathrm{rk}(\pi))$ をみたすものとする．このとき，EC_ϵ における

$$A[s_1^1, \dots, s_n^1] \vee \cdots \vee A[s_1^{\mathrm{wd}(\pi,e)+1}, \dots, s_n^{\mathrm{wd}(\pi,e)+1}]$$

の証明 π_e が存在し，

$$\mathrm{rk}(\pi_e) \leq \mathrm{rk}(\pi), \quad \deg(\pi_e, \mathrm{rk}(\pi)) \leq \deg(\pi_e, \mathrm{rk}(\pi)),$$

$$\mathrm{or}(\pi_e, \mathrm{rk}(\pi)) = \mathrm{or}(\pi, \mathrm{rk}(\pi)) - 1.$$

が成り立つ．

拡張第一イプシロン定理の証明

証明

e が属する主要論理式の中でも，π の中に現れるものを

$$B[t_1] \to B[e], \dots, B[t_m] \to B[e]$$

というようにしてすべて列挙する．まず，オーダー還元補題の証明と同様の手法を用いて，EC_ϵ における
$\neg B[t_1] \wedge \cdots \wedge \neg B[t_m] \to A[s_1, \dots, s_n]$ の証明 π' を構成する．

拡張第一イプシロン定理の証明

証明

e が属する主要論理式の中でも，π の中に現れるものを

$$B[t_1] \to B[e], \ldots, B[t_m] \to B[e]$$

というようにしてすべて列挙する．まず，オーダー還元補題の証明と同様の手法を用いて，EC$_\epsilon$ における $\neg B[t_1] \wedge \cdots \wedge \neg B[t_m] \to A[s_1, \ldots, s_n]$ の証明 π' を構成する．

次に，再びオーダー還元補題と同様にして，各 i $(1 \leq i \leq m)$ に対して EC$_\epsilon$ における $B[t_i] \to A[s_1^i, \ldots, s_n^i]$ の証明 π_i を構成する．

拡張第一イプシロン定理の証明

証明, contd.

$s_k^{m+1} :\equiv s_k \ (1 \leq k \leq n)$ とおけば，π' からは論理式

$$\neg B[t_1] \wedge \cdots \wedge \neg B[t_m] \to A[s_1^1, \ldots, s_n^1] \vee \cdots \vee A[s_1^{m+1}, \ldots, s_n^{m+1}]$$

の EC_ϵ における証明 π'' が得られ，各 π_i からは論理式

$$B[t_i] \to A[s_1^1, \ldots, s_n^1] \vee \cdots \vee A[s_1^{m+1}, \ldots, s_n^{m+1}]$$

の EC_ϵ における証明 π_i' が得られる．

拡張第一イプシロン定理の証明

証明, contd.

$s_k^{m+1} :\equiv s_k$ $(1 \leq k \leq n)$ とおけば，π' からは論理式

$$\neg B[t_1] \wedge \cdots \wedge \neg B[t_m] \to A[s_1^1, \ldots, s_n^1] \vee \cdots \vee A[s_1^{m+1}, \ldots, s_n^{m+1}]$$

の EC_ϵ における証明 π'' が得られ，各 π_i からは論理式

$$B[t_i] \to A[s_1^1, \ldots, s_n^1] \vee \cdots \vee A[s_1^{m+1}, \ldots, s_n^{m+1}]$$

の EC_ϵ における証明 π_i' が得られる．

よって，$m + 1 = \mathrm{wd}(\pi, e) + 1$ であることより，π'' と各 π_i' から論理式

$$A[s_1^1, \ldots, s_n^1] \vee \cdots \vee A[s_1^{\mathrm{wd}(\pi,e)+1}, \ldots, s_n^{\mathrm{wd}(\pi,e)+1}]$$

の EC_ϵ における証明 π_e が得られる．$\square$

拡張第一イプシロン定理の証明

補題 (階数還元補題)

$A[x_1, \ldots, x_n]$ を $L(\mathrm{EC})$ 論理式とする．また，$s_1, \ldots, s_n$ を $L(\mathrm{EC}_\epsilon)$ の項とし，π を EC_ϵ における $A[s_1, \ldots, s_n]$ の証明とする．このとき，$A[s_1, \ldots, s_n]$ の選言拡大 A' の EC_ϵ における証明 π' が存在し，$\mathrm{rk}(\pi') < \mathrm{rk}(\pi)$ が成り立つ．

証明

$k := \mathrm{or}(\pi, \mathrm{rk}(\pi))$ とおく．π の主要 ϵ 項 e の中から，$\mathrm{rk}_\epsilon(e) = \mathrm{rk}(\pi)$, $\deg(e) = \deg(\pi, \mathrm{rk}(\pi))$ をみたすものを一つ選び，拡張オーダー還元補題を適用する．すると，$A[s_1, \ldots, s_n]$ の選言拡大 A' の EC_ϵ における証明 π_e が得られる．π と比べると，π_e においては，$\mathrm{rk}_\epsilon(e') = \mathrm{rk}(\pi)$ をみたす主要 ϵ 項 e' の数が一つ減り，また，$\mathrm{rk}(\pi_e) > \mathrm{rk}(\pi)$ となることはありえない．同様にして，拡張オーダー還元補題の適用をあと $k - 1$ 回行なう．□

拡張第一イプシロン定理の証明

定理 (拡張第一イプシロン定理)

$A[x_1, \ldots, x_n]$ を $L(\mathsf{EC})$ 論理式とする．また，$s_1, \ldots, s_n$ を $L(\mathsf{EC}_\epsilon)$ の項とし，π を EC_ϵ における $A[s_1, \ldots, s_n]$ の証明とする．このとき，ϵ 項を含まない項 t_i^j $(1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq k)$ および

$$A[t_1^1, \ldots, t_n^1] \vee \cdots \vee A[t_1^k, \ldots, t_n^k]$$

の EC における証明が存在する．

証明

階数還元補題を繰り返し適用し，ある k について，$A(t_1^1, \ldots, t_n^1) \vee \cdots \vee A(t_1^k, \ldots, t_n^k)$ の EC_ϵ における証明でしかも主要論理式を一つも含まないもの π' を得る．あとは，π' の中に残った ϵ 項をそれぞれ勝手な変項で置き換える．□