ゲーデルのダイアレクティカ解釈と直観主義算術

藤原 誠

早稲田大学高等研究所

数学基礎論サマースクール 2018

2018 年 9 月 5, 6 日

参考文献 1

- ゲーデル論文 *1
  - K. Gödel, Uber eine bisher noch benutzte Erweiterung des finiten Standpunktes, Dialectica 12, pp. 280–287, 1958.
  - K. Gödel, On an Extension of Finitary Mathematics Which has Not yet Been Used, Kurt Gödel: Collected Works: Volume II: Publications 1938-1974 (published in 1990), pp. 271–280, 1972.

*1

- ゲーデル自身は 1930 年代後期には既にダイアレクティカ解釈の構想を持っていたことが知られている．
- ゲーデル論文には体系の定義や証明の詳細は書かれていない．しかし，ゲーデル自身はその証明の細部までよく分かっていたと思われる記述が (特に 1972 版の脚注の) 随所に見受けられる．

参考文献 2

- ゲーデルの仕事の解説
  - A. S. Troelstra, Introductory note to 1958 and 1972, Kurt Gödel: Collected Works: Volume II: Publications 1938-1974, pp. 217–241, 1990.
    ··· ゲーデル論文について知りたければまずこれを読むべき!?
  - 新井敏康，ゲーデルの無矛盾性証明，現代思想 2007 年 2 月臨時増刊号 総特集=ゲーデル，青土社，2007.
    ··· ゲーデルが与えた算術の無矛盾性証明に関する書評.
    ゲーデル自身の結果について深く考察されている.

参考文献3

- ダイアレクティカ解釈に関連する研究全般の解説
  - J. Avigad and S. Feferman, Gödel's functional ("Dialectica") interpretation, Handbook of proof theory, pp. 337–405, 1998.
    ··· ダイアレクティカ解釈に関連する研究の全体像を知るのによい．証明の詳細はあまり書かれていない．
  - H. Luckhardt, Extensional Gödel functional interpretation, A consistency, proof of classical analysis, 1973.
    ··· ダイアレクティカ解釈を用いた二階算術の無矛盾性証明について詳しい議論がなされている．

参考文献4

- ダイアレクティカ解釈に関する数学的主張の証明が書かれている日本語で書かれた文献
  - 竹内 外史/八杉 満利子，証明論入門 (復刊)，2010.
    ··· 「竹内 外史/八杉 満利子，数学基礎論増補，1974」掲載の八杉氏によるゲーデルの無矛盾性証明の解説を集録.
  - 白旗優，ダイアレクティカ解釈，ゲーデルと 20 世紀の論理学 3(不完全性定理と算術の体系), 2007.
    ··· ダイアレクティカ解釈の健全性定理の部分は基本的に Avigad/Feferman に沿っている.

参考文献5

- 有限型算術に対する Proof Interpretation (ダイアレクティカ解釈，型付き実現可能性解釈に関する内容全般)
  - A. S. Troelstra, Metamathematical investigation of intuitionistic arithmetic and analysis, 1973.
    ··· 関連事項が全て書かれているが色々な面で読むのが大変.
  - U. Kohlenbach, Applied proof theory: proof interpretations and their use in mathematics, 2008.
    ··· 記載内容が極めて正確 (誤植もほとんどない).

- ダイアレクティカ解釈の健全性定理の証明が詳細に書かれている文献は (洋書でも) ほとんどない.
- 体系の定義 (特に等号や外延性公理の扱い) にそれぞれ微妙に違いがあり，その扱いは非常にセンシティブである (健全性定理が成り立ったり成り立たなかったりする) ため，他人の証明を安直に鵜呑みにするのは危険.

参考文献6

- 藤原誠，ゲーデルのダイアレクティカ解釈と直観主義論理，算術の無矛盾性証明:証明論入門，2018 年出版予定.
  - ダイアレクティカ解釈に関する最も古典的な研究 $(+\alpha)$ を扱っている.
  - 体系の定義と証明が細部まで詳細に書かれいる.
  - Ferreira 2012 の結果と Howard 1968 の結果を組み合わせて得られる二階算術から $\mathbf{T} + \mathrm{BR}^{\omega}$ への無矛盾性還元 (Spector 1962 の結果) の見通しの良い証明が細部まで詳細に書かれている.
  - BHK 解釈の観点から見たダイアレクティカ解釈の意味に関する考察.

3 回の講義の内容 (予定)

第 1 回: ダイアレクティカ解釈による無矛盾性証明の概要

1. ダイアレクティカ解釈による無矛盾性証明のシナリオ
2. 直観主義有限型算術の定義と否定翻訳
3. 一階算術の **T** への無矛盾性還元 (Gödel 1958)

第 2 回: ダイアレクティカ解釈の健全性定理

1. ダイアレクティカ解釈の健全性定理 (Gödel 1958)
2. ダイアレクティカ解釈の健全性定理のバー再帰 BR^{ω} を用いた拡張と二階算術の **T** $+ \mathrm{BR}^{\omega}$ への無矛盾性還元 (Spector 1962)

第 3 回: BHK 解釈から見たダイアレクティカ解釈の意味

1. BHK 解釈: 構成的証明とその構成情報
2. 型付き実現可能性解釈 (Kreisel 1959, 1962)
3. 型付き実現可能性解釈とダイアレクティカ解釈の関係

ゲーデル論文“いままで用いられたことのない，ある有限の立場の拡張について”

- K. Gödel, Uber eine bisher noch benutzte Erweiterung des finiten Standpunktes, Dialectica 12, pp. 280–287, 1958.
- K. Gödel, On an Extension of Finitary Mathematics Which has Not yet Been Used, Kurt Gödel: Collected Works: Volume II: Publications 1938-1974 (published in 1990), pp. 271–280, 1972.

定理. (Gödel 1958)

PA で矛盾 $(0 = 1)$ が証明されるならば，**T** で矛盾 $(0 = 1)$ が証明される．

なぜこれで PA の無矛盾性を示したことになるのか？

1. **T** は量化子を持たない (logic-free の) 有限型算術であり，有限の立場を形式化した体系とみなし得る [*2].
2. 上記の定理の証明は，PA における $0 = 1$ の証明図 (PA の公理から PA の推論規則だけを用いて論理式 $0 = 1$ を導出する証明図) を **T** における $0 = 1$ の証明図に変換する具体的な手続き (有限の記号操作) を与えるものである.
   $\Rightarrow$ その証明自体を **T** の中で形式化できる！

これらより，**T** は "有限の立場" を表現する形式体系であって **T** の無矛盾性は自明であると認めるならば，この証明は PA が無矛盾であることのある種の (拡張された) 有限の立場における証明とみなせる.

[*2] **T** は PRA(primitive recursive arithmetic) の拡張である.

T の無矛盾性について

T が無矛盾であることはどうして保証されるのか？[*3]

現代的に見れば，T のモデルとして典型的なものとして以下が知られている．

- T に属する各有限型関数に計算可能関数の自然数コードを割り当てるモデル HRO;
- T の正規な項からなる項モデル．

しかし，これらが T のモデルであることを PA の中で証明することはできず (ゲーデルの第二不完全性定理から従う)，ゲンツェンによる PA の無矛盾性証明と同様に ϵ_0 までの超限帰納法が必要となる．

[*3] ゲーデル自身，この部分に関して自身の議論に満足はしていなかったようである．

この講義では，ゲーデルが与えた証明と同じ流れ (方法論) でより以下を示す:

定理.

1. PA $\vdash \perp$ ならば $\mathbf{T} \vdash \perp$. (Gödel 1958)
2. E-PA$^\omega$ $+ \mathrm{AC}^0 \vdash \perp$ ならば $\mathbf{T} + \mathrm{BR}^\omega \vdash \perp$. (Spector 1962)

ここで $\perp$ は $0 = 1$ である (以下同様).

“PA $\vdash \perp$ ならば $\mathbf{T} \vdash \perp$” の証明のあらすじ

1. PA における $\perp$ $(0 = 1)$ の証明があるとする仮定する．
2. PA を有限型に拡張した体系 WE-PA$^\omega$ における $\perp$ $(0 = 1)$ の証明がある．
3. 否定翻訳 (negative translation) に関する有限の記号操作により，与えられた WE-PA$^\omega$ における $\perp$ の証明を直観主義有限型算術 WE-HA$^\omega$ における $\perp$ の証明に変換する．
4. ダイアレクティカ解釈に関する有限の記号操作により，上で得られた WE-HA$^\omega$ における $\perp$ の証明を量化子を持たない有限型原始再帰的算術 $\mathbf{T}$ における $\perp$ の証明に変換する．

定義. (直観主義一階述語論理 $\mathrm{IL}_{-=}$) 1/4

- $\mathrm{IL}_{-=}$ の言語 $\mathcal{L}(\mathrm{IL}_{-=})$ は以下からなる:
  - 論理結合子 $\wedge, \vee, \rightarrow, \bot, \exists, \forall$;
  - 変数記号 $x, y, z, \ldots$;
  - n 変数関数記号 $f_1, f_2, f_3, \ldots$ (n は 0 以上の自然数);
    (0 変数関数記号は通常定数記号と呼ばれ，$c_1, c_2, c_3, \ldots$ 等で表される．)
  - n 変数関係記号 $R_1, R_2, R_3, \ldots$ (n は 1 以上の自然数);
- 項 (term) は以下により定義される:
  - 変数記号及び定数記号 (0 変数関数記号) は項である;
  - $t_1, \ldots, t_n$ が項であり，f が n 変数関数記号であるとき，$f(t_1, \ldots, t_n)$ は項である．

変数記号を含まない項を閉項 (closed term) という．

定義. (直観主義一階述語論理 $\mathrm{IL}_{-=}$) 2/4

- 論理式 (formula) は以下により定義される:
  - $t_1, \ldots, t_n$ が項であり，R が n 変数関係記号であるとき，$R(t_1, \ldots, t_n)$ は (原始) 論理式である．また，$\perp$ は (原始) 論理式である．
  - A, B が論理式であるとき，$(A \wedge B), (A \vee B), (A \to B)$ は論理式である．
  - A が論理式であり x が変数記号であるとき，$(\forall x A), (\exists x A)$ は論理式である．

表記 記号の煩雑さを避けるため，今後は以下の略記を用いる:

- $\neg A :\equiv A \to \perp$;
- $A \leftrightarrow B :\equiv (A \to B) \wedge (B \to A)$.

また，慣習に従って括弧を省略することがある．

例．$((A \wedge B) \to (\neg C) \vee D))$ は $A \wedge B \to \neg C \vee D$ と記される．

定義. (直観主義一階述語論理 $\mathrm{IL}_{-=}$) 3/4

- $\mathrm{IL}_{-=}$ の公理は以下からなる:
  - $A \vee A \to A, A \to A \wedge A$ (axioms of contraction);
  - $A \to A \vee B, A \wedge B \to A$ (axioms of weakening);
  - $A \vee B \to B \vee A, A \wedge B \to B \wedge A$ (axioms of permutation);
  - $\perp \to A$ (ex falso quodlibet);
  - $\forall x A \to A[t/x], A[t/x] \to \exists x A$, ここで，$t$ は A において x に対して自由 (すなわち，A において x を t で置き換えても新たに束縛される変数はない) であり，$A[t/x]$ は A において x を t で置き換えて得られる論理式を表す (quantifier axioms).

定義. (直観主義一階述語論理 $\mathrm{IL}_{-=}$) 4/4

- $\mathrm{IL}_{-=}$ の推論規則は以下からなる:
  - $\dfrac{A, \quad A \to B}{B}$, $\dfrac{A \to B, \quad B \to C}{A \to C}$ (modus ponens and syllogism);
  - $\dfrac{A \wedge B \to C}{A \to (B \to C)}$, $\dfrac{A \to (B \to C)}{A \wedge B \to C}$ (exportation and importation);
  - $\dfrac{A \to B}{C \vee A \to C \vee B}$ (expansion);
  - $\dfrac{B \to A}{B \to \forall x A}$, $\dfrac{A \to B}{\exists x A \to B}$, ただし x は B に自由に出現しない (quantifier rules).

定義. (直観主義一階述語論理 IL)

等号を言語に含む直観主義一階述語論理 IL は $\mathrm{IL}_{=}$ に言語として 2 変数述語記号 $=$ を加え，さらに公理として以下 (等号公理と呼ばれる) を加えて得られるものである:

- $x = x, x = y \to y = x, x = y \wedge y = z \to x = z$;
- $x_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge x_n = y_n \to f(x_1, \ldots, x_n) = f(y_1, \ldots, y_n)$ (f は n 変数関数記号);
- $x_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge x_n = y_n \to (R(x_1, \ldots, x_n) \to R(y_1, \ldots, y_n))$ (R は n 変数述語記号).

命題.

直観主義論理に基づく理論の上で以下が示せる.

1. $A \to \neg\neg A$;
2. $\neg\neg\neg A \to \neg A$;
3. $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$;
4. $\neg\neg(A \to B) \leftrightarrow (\neg\neg A \to \neg\neg B) \leftrightarrow (A \to \neg\neg B)$;
5. $\neg(A \lor B) \leftrightarrow \neg A \land \neg B$;
6. $\neg\neg(A \lor \neg A)$;
7. $\forall x(A(x) \to B) \leftrightarrow (\exists x A(x) \to B)$,
   特に $B :\equiv \perp$ のとき，$\forall x \neg A(x) \leftrightarrow \neg\exists x A(x)$.

定義. (古典一階述語論理 PL)

(等号を言語に含む) 古典一階述語論理 PL は IL に排中律 $A \vee \neg A$ を公理として加えたものである.

定義.

- 論理式 $\forall x A(x)$ (*resp.* $\exists x A(x)$) において変数記号 x は "$\forall$ で (*resp.* $\exists$ で) 束縛されている" という.
- 論理式 A に現われる変数記号 x が A のいかなる部分論理式においても束縛されていないとき, A において x は自由に出現しているという.
- 変数記号 x を含む論理式 A において x が自由に出現しているとき, x は A における自由変数 (*free variable*) であるという.
- 自由変数を含まない論理式を文 (*sentence*) または閉論理式 (*closed formula*) という.

命題.

古典一階述語論理 PL で以下が導出される (すなわち，古典一階述語論理 PL の公理から PL の推論規則のみを用いて以下が導出される):

1. $(\forall x A(x) \wedge B) \leftrightarrow \forall x(A(x) \wedge B)$;
2. $(\exists x A(x) \wedge B) \leftrightarrow \exists x(A(x) \wedge B)$;
3. $(\forall x A(x) \vee B) \leftrightarrow \forall x(A(x) \vee B)$;
4. $(\exists x A(x) \vee B) \leftrightarrow \exists x(A(x) \vee B)$;
5. $(\exists x A(x) \to B) \leftrightarrow \forall x(A(x) \to B)$;
6. $(\forall x A(x) \to B) \leftrightarrow \exists x(A(x) \to B)$;
7. $(B \to \forall x A(x)) \leftrightarrow \forall x(B \to A(x))$;
8. $(B \to \exists x A(x)) \leftrightarrow \exists x(B \to A(x))$;

ただし，これらにおいて x は B に自由に出現しないとする.

特に，1, 2, 4, 5, 7 は直観主義論理 IL においても (すなわち排中律 $A \vee \neg A$ を用いることなく) 導出される．

一方で，3, 6, 8 に関しては

3*. $(\forall x A(x) \vee B) \to \forall x(A(x) \vee B)$;

6*. $(\forall x A(x) \to B) \leftarrow \exists x(A(x) \to B)$;

8*. $(B \to \exists x A(x)) \leftarrow \exists x(B \to A(x))$

は IL で導出されるものの，それらの逆は IL では一般に導出されない．例えば，3*の逆は排中律を用いて次のように示される:

- B を仮定すると axiom of weakening より $\forall x A(x) \vee B$ が従う．
- 一方で，$\neg B$ を仮定すると，仮定 $\forall x(A(x) \vee B)$ から ex falso quodlibet を用いて $\forall x A(x)$ が得られ，これから axiom of weakening より $\forall x A(x) \vee B$ が従う．
- 排中律より，いま $B \vee \neg B$ であることから，上の議論と合わせて $\forall x A(x) \vee B$ が得られる．

定義. (直観主義一階算術 HA)

1. HA の言語 $\mathcal{L}(\mathrm{HA})$ は以下からなる:
   - $\mathcal{L}(\mathrm{IL})$ と同様の論理結合子;
   - 変数記号 $x, y, z, \ldots$;
   - 2 変数述語記号 $=$;
   - 定数記号 0 及び 1 変数関数記号 S *(successor)*;
   - 全ての n 変数原始再帰的関数に対する n 変数関数記号.
2. HA の公理及び推論規則は以下からなる:
   - $\mathcal{L}(\mathrm{HA})$-論理式に対する IL と同様の公理と推論規則;
   - $\neg(S(x) = 0)$ 及び $S(x) = S(y) \to x = y$;
   - 各 (原始再帰的関数に対応する) 関数記号の定義公理
   - 数学的帰納法の規則 IR: $\dfrac{A(0), \quad A(x) \to A(S(x))}{A(x)}$.

注意. ($\perp$ の扱い)

- HA においては $\perp \leftrightarrow 0 = 1$(ここで $1 := S(0)$) が証明できるため，$\perp$ は $0 = 1$ と同一視される．
- さらに，$0 = 1 \to B$(ただし B は $\perp$ を含まない言語の論理式) 及び $S(x) = 0 \to 0 = 1$ が $\perp$ を含む公理 $\perp \to A$ 及び $\neg(S(x) = 0)$ を用いずに証明されるため，実際には HA は否定記号 $\perp$ を用いることなく定義できる．

表記 記号の煩雑さを避けるため，以降では $S(x)$ と書く代わりに $x + 1$ と書き，$\neg(x = y)$ と書く代わりに $x \neq y$ と書くこともある．

注意.

以下の原始再帰的関数 $+, \cdot, sg, \overline{sg}, pd, \dot{-}$ が HA の関数記号として存在し，以下が HA で示せる． :

1. $x + 0 = 0,\ x + S(x) = S(x + y)$ 　(+ の定義公理);
2. $x \cdot 0 = 0,\ x \cdot S(y) = x \cdot y + x$ 　(· の定義公理);
3. $sg(0) = 0,\ sg(S(x)) = 1;$
4. $\overline{sg}(0) = 1, \overline{sg}(S(x)) = 0;$
5. $pd(0) = 0,\ pd(S(x)) = x;$
6. $x \dot{-} 0 = x,\ x \dot{-} (S(y)) = pd(x \dot{-} y);$

注意. (HA において自然数の間の大小関係を扱える)

特に,

$$\begin{cases} f_{\leq}xy := y \dot{-} x, \\ f_{<}xy := y \dot{-} S(x) \end{cases}$$

なる原始再帰的関数 $f_{\leq}, f_{<}$ (に対する関数記号) を考えれば,

$$f_{\leq}xy = 0 \leftrightarrow f_{<}xy = 0 \vee x = y$$

が HA で示せる.

表記 以降では, $f_{\leq}xy = 0$ 及び $f_{<}xy = 0$ の略記として $x \leq y$ 及び $x < y$ を用いる.

一階算術において限定量化子 (bounded quantifier) は以下のように扱われる.

定義.

- t が変数記号 x を含まない項であるとき, $\exists x(A(x) \land x \leq t)$, $\exists x(A(x) \land x < t)$ をそれぞれ $\exists x \leq t\, A(x)$, $\exists x < t\, A(x)$ と略記する.
- その中に現れる量化子が全て $\exists x \leq t\, A(x)$, $\exists x < t\, A(x)$ という形に表せる論理式を " 限定論理式 *(bounded formula)*" といい, 変数記号 x はこれらの論理式において " 限定束縛されている" という.

命題.

HA の全て限定論理式 $A(x_1, \ldots, x_k)$(ここで $x_1, \ldots, x_k$ は $A(x_1, \ldots, x_k)$ における自由変数) に対して,

$$\mathrm{HA} \vdash A(x_1, \ldots, x_k) \leftrightarrow t(x_1, \ldots, x_k) = 0$$

なる k 変数関数記号 t が存在する.

命題.

HA において

$$A \vee B \leftrightarrow \exists k((k = 0 \rightarrow A) \wedge (k \neq 0 \rightarrow B))$$

が示される.

定義. (古典一階算術 PA)

古典一階算術 PA は HA に排中律 $A \vee \neg A$(ただし A は $\mathcal{L}$(HA)-論理式) を公理として加えたものである.

- 定義から，当然，HA $\vdash A$ ならば PA $\vdash A$ である.

定義. (有限型)

有限型 *(finite type)* の集合 $\mathbb{T}$ は以下により定義される [*4]*:*

- $0 \in \mathbb{T}$*;*
- $\rho, \tau \in \mathbb{T} \Rightarrow \tau(\rho) \in \mathbb{T}$*.*

[*4] $0 \in \mathbb{T}$ は各自然数に割り当てられる型であり，$\tau(\rho) \in \mathbb{T}$ は型 ρ を持つ関数 (または自然数) を型 τ を持つ関数 (または自然数) に変換する各関数に割り当てられる型である.

注意.

- 以下では，有限型を記す際，混乱が生じない限りにおいて括弧を省略する．
- 0 でない全ての有限型 $\rho \in \mathbb{T}$ は

$$0\rho_k \dots \rho_1 \ (\rho_1, \dots, \rho_k \in \mathbb{T})$$

という形に一意に表されることに注意せよ．
この事実は以降で頻繁に用いられる．

定義. (有限型の次数)

有限型 $\rho \in \mathbb{T}$ の次数 $deg(\rho)$ は以下により定義される

- $deg(0) := 0;$
- $deg(\tau(\rho)) := \max\{deg(\rho) + 1, deg(\tau)\}.$

定義. (外延的直観主義有限型算術 E-HA$^\omega$)

- E-HA$^\omega$ の言語 $\mathcal{L}$(E-HA$^\omega$) は以下からなる:
  - $\mathcal{L}$(IL) と同様の論理結合子 (ただし，$\perp$ は $0 = 1$ にて代用する);
  - 変数記号 $x^\rho, y^\rho, z^\rho, \dots$ ($\rho \in \mathbb{T}$);
  - 型 0 の 2 元に関する述語記号 $=_0$;
  - 型 0 の定数記号 0 及び型 $1 (:= 0(0))$ の定数記号 S (successor);
  - 型 $\rho\tau\rho$ の定数記号 $\Pi_{\rho,\tau}$ (projector);
  - 型 $\tau\delta(\rho\delta)(\tau\rho\delta)$ の定数記号 $\Sigma_{\delta,\rho,\tau}$ (combinator);
  - 型 $\rho(\rho 0 \rho)\rho 0$ の定数記号 R_ρ (recursor);
  - 任意の型 ρ, τ に対する 2 変数関数記号 $App_{\rho,\tau}$ (application operator).

- E-HA$^\omega$ の項 (term) は以下により定義される:
  - 変数記号及び定数記号は項である;
  - t が型 $\tau(\rho)$ の項であり，s が型 ρ の項であるとき，$App_{\rho,\tau}(t, s)$ は項である．

記法.

以降では $App_{\rho,\tau}(t, s)$ を単に $t(s)$ と書き，App を複数回適用して得られる項 $t_1(t_2)(t_3)\dots(t_n)$ を単に $t_1 t_2 t_3 \dots t_n$ と書く．

さらに，以降では度々，項の列を (コード化せず列のまま) 扱うので，慣習に従い以下の略記を用いる:

- $y_i \underline{x} := y_i x_1 \dots x_k$;
- $\underline{y}\underline{x} := y_1\underline{x}, \dots, y_n\underline{x}$.

- E-HA$^\omega$ の論理式 (formula) は以下により定義される:
  - t, s が共に型 0 の項であるとき，$s =_0 t$ は (原始) 論理式．
  - A, B が論理式のとき，$(A \wedge B), (A \vee B), (A \to B)$ は論理式．
  - A が論理式，x^ρ が変数記号のとき，$(\forall x^\rho A), (\exists x^\rho A)$ は論理式．

注意. (略記 $s =_\rho t$ について)

- 厳密には 0 以外の型に関する等号は E-HA$^\omega$ の言語には含まれていない.
- 全ての 0 でない有限型は $0\rho_k \ldots \rho_1$ という形をしていることを踏まえ，以下では

$$\forall y_1^{\rho_1}, \ldots, y_k^{\rho_k}(sy_1 \ldots y_k =_0 ty_1 \ldots y_k)$$

を

$$s =_\rho t \,(\text{ただし}\, \rho := 0\rho_k \ldots \rho_1)$$

と略記する.

- E-HA$^\omega$ の公理及び推論規則は以下からなる:
  - $\mathcal{L}$(E-HA$^\omega$)-論理式に対する IL$_=$ と同様の公理と推論規則;
  - 等号 $=_0$ に関する公理:
    $x =_0 x, x =_0 y \to y =_0 x, x =_0 y \wedge y =_0 z \to x =_0 z$;
  - 外延性公理 (extensionality)$\mathrm{E}_{\rho,\tau}$:
    $$\forall z^{\tau(\rho)}, x^\rho, y^\rho \, (x =_\rho y \to zx =_\tau zy) \;\; (\rho, \tau \in \mathbb{T});$$
  - $\neg(S(x) =_0 0)$ 及び $S(x) =_0 S(y) \to x =_0 y$;
  - Π, Σ, R に関する公理:
    $$(\Pi): \; \Pi_{\rho,\tau} x^\rho y^\tau =_\rho x^\rho;$$
    $$(\Sigma): \; \Sigma_{\delta,\rho,\tau} xyz =_\tau xz(yz) \; (\text{ただし } x^{\tau\rho\delta}, y^{\rho\delta}, z^\delta);$$
    $$(R): \begin{cases} R_\rho 0yz =_\rho y, \\ R_\rho(Sx)yz =_\rho z(R_\rho xyz)x, \end{cases} \quad (\text{ただし } x^0, y^\rho, z^{\rho 0 \rho});$$
  - 数学的帰納法の規則 IR: $\dfrac{A(0), \quad A(x) \to A(S(x))}{A(x)}$.

有限型の等号に関する注意.

- 0 以外の任意の型 $\rho \in \mathbb{T}$ に関する等号公理

$$x =_\rho x,\ x =_\rho y \to y =_\rho x,\ x =_\rho y \wedge y =_\rho z \to x =_\rho z$$

が $=_0$ に対する等号公理から導かれる.

- 外延性公理 E を用いて，以下が証明できる (同値になる):

$$x =_\rho y \wedge A(x) \to A(y).$$

- 外延性公理 E は以下のように書くこともできる:

$$\bigcup_{\rho=0\rho_k\ldots\rho_1,\ \rho_i\in\mathbb{T}} \forall z^\rho, x_1^{\rho_1}, y_1^{\rho_1}, \ldots, x_k^{\rho_k}, y_k^{\rho_k} \left(\bigwedge_{i=1}^{k} (x_i =_{\rho_i} y_i) \to z\underline{x} =_0 z\underline{y} \right).$$

E-HA$^\omega$ は HA の自然な拡張であるが，ダイアレクティカ解釈を考える際にはその外延性公理 E を少し弱めて得られる以下の体系を用いる必要がある:

定義. (WE-HA$^\omega$)

WE-HA$^\omega$ は E-HA$^\omega$ の外延性公理 $\mathrm{E}_{\rho,\tau}$ を弱外延性規則 $\mathrm{QF\text{-}ER}_\rho$:

$$\frac{A_{qf} \to s =_\rho t}{A_{qf} \to r[s/x^\rho] =_0 r[t/x^\rho]}$$

(ただし，A_{qf} は量化子を含まない $\mathcal{L}$(E-HA$^\omega$)-論理式であり，s^ρ, t^ρ, r^0 は E-HA$^\omega$ の項) に弱めて得られる体系である. [*5]

[*5] 弱外延性規則 QF-ER は

$$\frac{A_{qf} \to s =_\rho t}{A_{qf} \to r[s/x^\rho] =_\tau r[t/x^\rho],}$$

すなわち r は任意の有限型を許す形で定義されることが多いが，それは上記の $\mathrm{QF\text{-}ER}_\rho$ から直ちに導かれる.

外延性公理 E の弱外延性規則 QF-ER への制限は，直感的には，量化子を含まない仮定の下でしか外延性公理を適用できないことを意味している．

定義. (古典有限型算術 E-PA$^\omega$, WE-PA$^\omega$)

古典一階算術 E-PA$^\omega$(*resp.* WE-PA$^\omega$) は E-HA$^\omega$(*resp.* WE-HA$^\omega$) に排中律 $A \vee \neg A$ を公理として加えたものである．

注意.

E-HA$^\omega$(*resp.* E-PA$^\omega$) は演繹定理 *(deduction theorem)* をみたすのに対し，WE-HA$^\omega$(*resp.* WE-PA$^\omega$) は演繹定理をみたさない．

注意.

型 0 についての外延性規則 $\mathrm{QF\text{-}ER}_0$ から型 0 についての外延性公理 $\mathrm{E}_{0,\tau}$:

$$\forall z^{\tau(0)}, x^0, y^0\, (x =_0 y \to zx =_\tau zy) \quad (\tau \in \mathbb{T})$$

が従う.

注意.

WE-HA$^\omega$ において (実際にはその量化子を含まない部分体系 **T** において)Π, Σ を用いてラムダ項が定義でき，これを用いて射影関数が容易に定義できる.
よって，全ての (型 $1 := 0(0)$ の) 原始再帰的関数は WE-HA$^\omega$ の (変数記号を含まない) 項として定義できる.
つまり， HA (*resp.* PA) は WE-HA$^\omega$ (*resp.* WE-PA$^\omega$) の部分体系と見ることができる.

命題.

WE-HA$^\omega$ の量化子を含まない任意の論理式 $A_{qf}(\underline{x})$(ここで $\underline{x}$ は A_{qf} に含まれる全ての変数記号の列) に対して，WE-HA$^\omega \vdash t\underline{x} =_0 0 \leftrightarrow A_{qf}(\underline{x})$ をみたす，変数記号を含まない WE-HA$^\omega$ の項 t が存在する．

命題.

WE-HA$^\omega$ で以下が示せる．

1. $A_{qf} \vee \neg A_{qf}$，ただし A_{qf} は量化子を含まない論理式;
2. $\neg\neg A_{qf} \leftrightarrow A_{qf}$，ただし A_{qf} は量化子を含まない論理式.

WE-HA$^\omega$ で (数学的帰納法の規則 IR を用いて)

$$x =_0 y \vee \neg(x =_0 y)$$

が示されること及び上の命題から従う．

否定翻訳 (Negative Translation)

- 古典論理に基づく体系の証明を対応する直観主義論理に基づく体系の証明に変換する翻訳は一般に否定翻訳 (negative translation) または二重否定翻訳 (double negation translation) と呼ばれる．ゲーデル 1933 は PA を HA に埋め込むために現代ではゲーデル/ゲンツェン翻訳 (Gödel-Gentzen translation) と呼ばれる否定翻訳を導入した (ゲンツェンも独立に同様の翻訳を発見している).
- その他に有名な否定翻訳としてコロモゴロフ翻訳 (Kolmogorov translation) や黒田翻訳 (Kuroda translation) などがあるが，これらの翻訳は全て直観主義論理上同値であることが知られている．
- ここでは変換がシンプルな黒田 1951 の翻訳を用いる．

定義.

論理式 A の否定翻訳 A^N を定義するにあたり，まず A^* を以下によって帰納的に定義する:

- 原始論理式 A に対して，$A^* :\equiv A$;
- $\Box \in \{\wedge, \vee, \to\}$ に対して，$(A \Box B)^* :\equiv (A^* \Box B^*)$;
- $(\exists x^\rho A)^* :\equiv \exists x^\rho A^*$;
- $(\forall x^\rho A)^* :\equiv \forall x^\rho \neg\neg A^*$.

そして，A の否定翻訳 A^N を $A^N := \neg\neg A^*$ と定義する.

定理.

任意の $\mathcal{L}(\text{E-HA}^\omega)$-論理式 A に対して，

$$\text{E-PA}^\omega \vdash A \ (\textit{resp.}\ \text{WE-PA}^\omega \vdash A)$$

ならば

$$\text{E-HA}^\omega \vdash A^N \ (\textit{resp.}\ \text{WE-HA}^\omega \vdash A^N).$$

Proof. 1/6

任意に与えられた $\mathcal{L}(\text{E-HA}^\omega)$-論理式 A を固定し，$\text{E-PA}^\omega \vdash A$ であるとする．
以下では，証明図 $\text{E-PA}^\omega \vdash A$ の各公理と推論規則を逐次変換し，別の証明図 $\text{E-HA}^\omega \vdash A^N$ を構成する手続きを示す．

補題．WE-HA^ω で以下が示せる:

1. $A \to \neg\neg A$;
2. $\neg\neg\neg A \to \neg A$;
3. $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$;
4. $\neg\neg(A \to B) \leftrightarrow (\neg\neg A \to \neg\neg B) \leftrightarrow (A \to \neg\neg B)$;
5. $\neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$;
6. $\neg\neg(A \vee \neg A)$;
7. $\forall x(A(x) \to B) \leftrightarrow (\exists x A(x) \to B)$,
   特に $B :\equiv \perp$ のとき，$\forall x \neg A(x) \leftrightarrow \neg\exists x A(x)$.

Proof. 2/6

まず，論理公理 ($\mathrm{IL}_{-=}$ の公理) について考察する.

- $\mathrm{IL}_{-=}$ の公理のうち，$\forall x A \to A[t/x]$ 以外の公理 F に関しては F^* が E-HA$^\omega$ の公理 F の実例 (instance) であることが容易に確かめられ，補題 1 より E-HA$^\omega \vdash \neg\neg F^*$ が従う.
- $\forall x A \to A[t/x]$ に関しては $\forall x A \to A[t/x]^N \equiv \neg\neg(\forall x \neg\neg A^* \to A^*[t/x])$ であるが，補題 4 より E-HA$^\omega$ 上これは $G :\equiv \forall x \neg\neg A^* \to \neg\neg A^*[t/x])$ と同値であり，G は E-HA$^\omega$ の公理 $\forall x A \to A[t/x]$ の実例であるので，E-HA$^\omega \vdash \forall x A \to A[t/x]^N$ が従う.
- 排中律公理 $A \vee \neg A$ に関しては，$(A \vee \neg A)^N \equiv \neg\neg(A^* \vee \neg A^*)$ であるので，補題 6 より E-HA$^\omega \vdash A \vee \neg A^N$ が従う.

Proof. 3/6

次に論理規則 ($\mathrm{IL}_{=}$ の推論規則) について考察する．

- modus ponens 規則について考察する．いま，$\text{E-HA}^\omega \vdash \neg\neg A^*$, $\text{E-HA}^\omega \vdash \neg\neg(A \to B)^*$ とすると，補題 4 より $\neg\neg(A \to B)^* \leftrightarrow (\neg\neg A^* \to \neg\neg B^*)$ であるから，E-HA^ω の modus ponens 規則を用いることにより $\text{E-HA}^\omega \vdash \neg\neg B^*$ が従う．
- syllogism 規則，exportation 規則，importation 規則，$\exists$ に関する quantifier 規則についても同様に示せる．

Proof. 4/6

- $\forall$ に関する quantifier 規則について考察する．いま，$\text{E-HA}^\omega \vdash \neg\neg(A \to B)^*$ とすると，補題 4 より $\text{E-HA}^\omega \vdash A^* \to \neg\neg B^*$ である．よって，E-HA^ω の quantifier 規則より，$\text{E-HA}^\omega \vdash A^* \to \forall x \neg\neg B^*$ が従い，補題 1 より，$\text{E-HA}^\omega \vdash A^* \to \neg\neg\forall x \neg\neg B^*$ が従う．再び補題 4 より $\text{E-HA}^\omega \vdash \neg\neg(A^* \to \forall x \neg\neg B^*)$ が導かれる．
- expansion 規則について考察する．いま，$\text{E-HA}^\omega \vdash \neg\neg(A^* \to B^*)$ とすると，補題 3 より $\text{E-HA}^\omega \vdash A^* \to \neg\neg B^*$ である．補題 5 を用いることにより，$\text{E-HA}^\omega \vdash (C^* \vee \neg\neg B^*) \to \neg\neg(C^* \vee B^*)$ が示せ，仮定とこの事実を用いることにより $\text{E-HA}^\omega \vdash C^* \vee A^* \to \neg\neg(C^* \vee B^*)$ が従う．よって，補題 4 より $\text{E-HA}^\omega \vdash \neg\neg(C^* \vee A^* \to C^* \vee B^*)$ が導かれる．

Proof. 5/6

最後にその他の公理と推論規則について考察する．

- $=_0$, S, Π, Σ に関する公理は全て $\forall \underline{x} A_{qf}(\underline{x})$(ここで A_{qf} は量化子を含まない論理式) という形をしている．$(\forall \underline{x} A_{qf}(\underline{x}))^N \equiv \neg\neg\forall x_0 \neg\neg\forall x_1 \neg\neg \dots \forall x_n \neg\neg A_{qf}(\underline{x})$ であるが，補題の 2 及び 7 を繰り返し用いることにより，$(\forall \underline{x} A_{qf}(\underline{x}))^N$ は $\forall \underline{x} \neg\neg A_{qf}(\underline{x})$ と同値であることが示され，補題 4 よりこれは $\forall \underline{x} A_{qf}(\underline{x})$ から導出される．以上より，$=_0$, S, Π, Σ の公理の否定翻訳は全て E-HA$^\omega$ で証明できる．
- 外延性公理 $\mathrm{E}_{\rho,\tau}$ について考察する．$E^N_{\rho,\tau} \equiv \neg\neg\forall z^{(\tau)\rho}, x^\rho, y^\rho \neg\neg((x =_\rho y)^* \to (zx =_\tau zy)^*)$ であるが，補題の 2 及び 7 を用いることにより，これは $E_{\rho,\tau}$ 自身から導かれる．つまり E-HA$^\omega \vdash E^N_{\rho,\tau}$ である．

Proof. 6/6

- 数学的帰納法の規則 IR について考察する．いま，$\text{E-HA}^\omega \vdash \neg\neg A^*(0)$, $\text{E-HA}^\omega \vdash \neg\neg(A^*(x) \to A^*(S(x)))$ とすると，補題 3 より $\text{E-HA}^\omega \vdash \neg\neg A^*(x) \to \neg\neg A^*(S(x))$ が従う．よって，$\neg\neg A^*(x)$ に対して数学的帰納法の規則を適用することにより $\text{E-HA}^\omega \vdash \neg\neg A^*(x)$ が導かれる．

なお，弱外延性規則 $\mathrm{QF\text{-}ER}_\rho$ の仮定及び帰結に関しては，それらの否定翻訳がそれら自身と同値であることが示せ，これより，$\mathrm{QF\text{-}ER}_\rho$ の仮定の否定翻訳の WE-HA^ω における証明図は $\mathrm{QF\text{-}ER}_\rho$ の帰結の否定翻訳の WE-HA^ω における証明図に変換できることが従う．よって，WE-PA^ω, WE-HA^ω に対する主張も全く同様にして示される． □

注意.

上記の証明より，一般に以下が成り立つ:

任意の $\mathcal{L}(\text{E-HA}^\omega)$-論理式 A に対して，

$$\text{E-PA}^\omega + \Gamma \vdash A \ (\textit{resp.}\ \text{WE-PA}^\omega + \Gamma \vdash A)$$

ならば

$$\text{E-HA}^\omega + \Gamma^N \vdash A^N \ (\textit{resp.}\ \text{WE-HA}^\omega + \Gamma^N \vdash A^N),$$

ここで Γ は E-HA^ω の論理式の集合であり，Γ^N はそれらの元の否定翻訳の集合である.

ダイアレクティカ解釈

- WE-HA$^\omega$ の論理式 A のダイアレクティカ解釈 A^D は A の構成に関して帰納的に定義される.
- A^D は A と (WE-PA$^\omega$ + AC^ω 上) 同値なスコーレム標準形 (Skolem normal form) の論理式一つ [*6].

例. (古典述語論理に基づく理論の上で議論する)

$$
\begin{aligned}
A :\equiv\ & \exists x A_{qf}(x) \to \exists u \forall v\, B_{qf}(u,v) \\
\Leftrightarrow\ & \forall x\, (A_{qf}(x) \to \exists u \forall v\, B_{qf}(u,v)) \\
\Leftrightarrow\ & \forall x \exists u\, (A_{qf}(x) \to \forall v\, B_{qf}(u,v)) \\
\Leftrightarrow\ & \forall x \exists u \forall v\, (A_{qf}(x) \to B_{qf}(u,v)) \\
& \cdots \text{冠頭標準形 (prenex normal form)} \\
\dashrightarrow\ & \exists U \forall x, v\, (A_{qf}(x) \to B_{qf}(U(x),v)) \equiv A^D \\
& \cdots \text{スコーレム標準形 (Skolem normal form)}
\end{aligned}
$$

[*6] 一般に A と古典論理上同値な冠頭標準形の論理式 $\hat{A}$ はたくさんある.

定義.

- 原始論理式 A に対して，$A^D :\equiv A_D :\equiv A$ ($\underline{x}$, $\underline{y}$ は空列);

$A^D \equiv \exists \underline{x} \forall \underline{y} A_D(\underline{x}, \underline{y})$, $B^D :\equiv \exists \underline{u} \forall \underline{v} B_D(\underline{u}, \underline{v})$ とする．このとき，

- $(A \wedge B)^D :\equiv \exists \underline{x}, \underline{u} \forall \underline{y}, \underline{v}\, (A \wedge B)_D :\equiv \exists \underline{x}, \underline{u} \forall \underline{y}, \underline{v} (A_D(\underline{x}, \underline{y}) \wedge B_D(\underline{u}, \underline{v}))$;
- $(A \vee B)^D :\equiv \exists z^0, \underline{x}, \underline{u} \forall \underline{y}, \underline{v}\, (A \vee B)_D :\equiv \exists z^0, \underline{x}, \underline{u} \forall \underline{y}, \underline{v} \big((z = 0 \rightarrow A_D(\underline{x}, \underline{y})) \wedge (z \neq 0 \rightarrow B_D(\underline{u}, \underline{v})) \big)$;
- $(A \rightarrow B)^D :\equiv \exists \underline{U}, \underline{Y} \forall \underline{x}, \underline{v}\, (A \rightarrow B)_D :\equiv \exists \underline{U}, \underline{Y} \forall \underline{x}, \underline{v} (A_D(\underline{x}, \underline{Y}\,\underline{x}\,\underline{v}) \rightarrow B_D(\underline{U}\,\underline{x}, \underline{v}))$;
- $(\forall z^\rho A(z))^D :\equiv \exists \underline{X} \forall z, \underline{y}\, (\forall z A(z))_D :\equiv \exists \underline{X} \forall z, \underline{y} A_D(\underline{X}\, z, \underline{y}, z)$;
- $(\exists z^\rho A(z))^D :\equiv \exists z, \underline{x} \forall \underline{y}\, (\exists z A(z))_D :\equiv \exists z, \underline{x} \forall \underline{y} A_D(\underline{x}, \underline{y}, z)$.

注意．任意の $\mathcal{L}(\text{WE-HA}^\omega)$-論理式 A に対して，A_D は量化子を含まない ($\mathbf{T}$ の) 論理式であり，A^D は A と全く同じ自由変数を含むことが A の構成に関する帰納法によって示される．

命題. (八杉 1963)

任意の $\mathcal{L}(\text{WE-HA}^\omega)$-論理式 A に対して

$$\text{WE-HA}^\omega + \mathrm{AC}^\omega + \mathrm{IP}^\omega_\forall + \mathrm{M}^\omega \vdash A \leftrightarrow A^D.$$

- $\mathrm{AC}^{\rho,\tau}$(axiom scheme of choice):
  $\forall x^\rho \exists y^\tau A(x,y) \to \exists Y^{\tau(\rho)} \forall x^\rho A(x, Y(x))$;
- $\mathrm{IP}^{\rho,\tau}_\forall$(independence-of-premise schema for universal premises):
  $(\forall u^\tau A_{qf}(u) \to \exists x^\rho B(x)) \to \exists x^\rho (\forall u^\tau A_{qf}(u) \to B(x))$,
  ただし $A_{qf}(u)$ は量化子を含まない論理式であり，かつ x を自由変数として含まない;
- M^ρ(Markov's principle for finite types) :
  $\neg\neg\exists x^\rho A_{qf}(x) \to \exists x^\rho A_{qf}(x)$;

ただし，これらは任意の有限型の変数記号を (パラメータとして) 含み得る．

定理. (ダイアレクティカ解釈の健全性定理)

$A(\underline{a})$ は自由変数として $\underline{a}$ のみを含む $\mathcal{L}(\text{WE-HA}^\omega)$-論理式とし，$A^D(\underline{a}) \equiv \exists \underline{x} \forall \underline{y} A_D(\underline{x}, \underline{y}, \underline{a})$ とする．
このとき，

$$\text{WE-HA}^\omega + \mathrm{AC} + \mathrm{IP}^\omega_\forall + \mathrm{M}^\omega \vdash A(\underline{a})$$

ならば，変数記号を含まない $\mathbf{T}$ の項の列 $\underline{t}$ が存在して

$$\mathbf{T} \vdash A_D(\underline{t}\,\underline{a}, \underline{y}, \underline{a}).$$

- 一言で言えば，$\mathbf{T}$ は WE-HA^ω から量化子 $\forall, \exists$ を取り除いた体系 ($\mathbf{T}$ は qf-WE-HA^ω と表記されることもある).

定理. (Gödel 1958)

$\mathrm{PA} \vdash \perp$ ならば $\mathbf{T} \vdash \perp$ である.

Proof.

1. PA は WE-PA$^\omega$ の部分体系と見れるので，$\mathrm{PA} \vdash \perp$ ならば WE-PA$^\omega \vdash \perp$ である.
2. $\perp^N \equiv \perp$ であるから，否定翻訳に関する定理より WE-HA$^\omega \vdash \perp$ である.
3. $\perp^D \equiv \perp$ であるから，ダイアレクティカ解釈の健全性定理より $\mathbf{T} \vdash \perp$ が従う.

□

量化子なし有限型算術 **T** の定義

- **T** の言語 $\mathcal{L}(\mathbf{T})$ は E-HA$^\omega$ の言語 $\mathcal{L}(\text{E-HA}^\omega)$ から $\forall, \exists$ を取り除いたもの [*7].
- **T** の項 (term) は以下により定義される [*8]:
  - 変数記号及び定数記号は項である;
  - t が型 $\tau(\rho)$ の項であり, s が型 ρ の項であるとき, $App_{\rho,\tau}(t,s)$ は項である [*9].
- **T** の論理式 (formula) は以下により定義される:
  - t, s が共に型 0 の項であるとき, $s =_0 t$ は **T** の (原始) 論理式である.
  - A, B が **T** の論理式のとき, $(A \wedge B), (A \vee B), (A \to B)$ は **T** の論理式である.

[*7] 任意有限型の変数記号を含む.

[*8] **T** の項 (の集合) は WE-HA$^\omega$ の項 (の集合) と全く同じである.

[*9] E-HA$^\omega$, WE-HA$^\omega$ の場合と同様に, 以下では $App_{\rho,\tau}(t,s)$ を単に $t(s)$ と書き, $t_1(t_2)(t_3)\ldots(t_n)$ を単に $t_1 t_2 t_3 \ldots t_n$ と書く.

T の公理及び推論規則は以下からなる:

- $\mathcal{L}(\mathbf{T})$-論理式に対する $\mathrm{IL}_=$ と同様の公理と推論規則;
- 等号 $=_0$ に関する公理，Successor S に関する公理;
- Π, Σ, R に関する公理:

$$(\Pi):\ \ \Pi_{\rho,\tau} x^\rho y^\tau =_\rho x^\rho;$$

$$(\Sigma):\ \ \Sigma_{\delta,\rho,\tau} xyz =_\tau xz(yz)\ (\text{ただし } x^{\tau\rho\delta}, y^{\rho\delta}, z^\delta);$$

$$(R):\ \begin{cases} R_\rho 0yz =_\rho y, \\ R_\rho(Sx)yz =_\rho z(R_\rho xyz)x, \end{cases}\quad (\text{ただし } x^0, y^\rho, z^{\rho 0 \rho});$$

ここで $s =_\rho t$ は $sy_1^{\rho_1}\dots y_k^{\rho_k} =_0 ty_1^{\rho_1}\dots y_k^{\rho_k}$ を意味する（ただし $\rho := 0\rho_k\dots\rho_1$ であり，$y_1,\dots,y_k$ は s, t に現れない変数記号);

- 数学的帰納法の規則 IR: $\dfrac{A(0), \quad A(x)\to A(S(x))}{A(x)}$.

- 外延性規則 ER_ρ:

$$\frac{sy_1^{\rho_1}\dots y_k^{\rho_k} =_0 ty_1^{\rho_1}\dots y_k^{\rho_k}}{r[s/x^\rho] =_0 r[t/x^\rho]},$$

ただし，$\rho := 0\rho_k\dots\rho_1$ であり，s, t は型 ρ の項 $y_1,\dots,y_k$ は $sy_1^{\rho_1}\dots y_k^{\rho_k} =_0 ty_1^{\rho_1}\dots y_k^{\rho_k}$ の証明の仮定及び $r[s/x], r[t/x]$ に出現しない変数記号である．

- 置換規則 Sub[*10]: $\dfrac{A}{A[t^\rho/x^\rho]}$，ただし t は任意の型 ρ の **T** の項である．

[*10] 置換規則は $\forall$ に対する quantifier 規則に対応するものである．

注意.

1. **T** の定義において，外延性規則 ER_ρ を一見より強い外延性規則 ER_ρ^+ : $\dfrac{A \to sy_1^{\rho_1} \dots y_k^{\rho_k} =_0 ty_1^{\rho_1} \dots y_k^{\rho_k}}{A \to r[s/x^\rho] =_0 r[t/x^\rho]}$ に置き換えてもその証明能力は同じである．
2. ここでは **T** を直観主義論理に基づく体系として定義したが，全ての $\mathcal{L}(\mathbf{T})$-論理式 A に対して $\mathbf{T} \vdash A \vee \neg A$ であるので，**T** の証明能力は **T** の論理を古典論理に置き換えて得られる体系のそれと同じである．
3. $\rho := 0\rho_k \dots \rho_1 \in \mathbb{T}$ に対し，$s =_\rho t :\equiv sy_1^{\rho_1} \dots y_k^{\rho_k} =_0 ty_1^{\rho_1} \dots y_k^{\rho_k}$ (ただし $y_1, \dots, y_k$ は s, t に現れない変数記号) とすると，

$$\mathbf{T} \vdash s =_\rho s;$$
$$\mathbf{T} + \Gamma \vdash s =_\rho t \Rightarrow \mathbf{T} + \Gamma \vdash t =_\rho s;$$
$$\mathbf{T} + \Gamma \vdash s =_\rho t, \mathbf{T} + \Gamma \vdash t =_\rho u \Rightarrow \mathbf{T} + \Gamma \vdash s =_\rho u.$$

T の基本性質

命題.

T の任意の型 τ の項 t に対して，x^ρ を除き t に含まれる変数記号を含む **T** の項であって

$$\mathbf{T} \vdash (\lambda x^\rho.t[x])(u) =_\tau t[u/x]$$

(u は型 ρ の **T** の項) をみたす $(\lambda x^\rho.t[x])$ が存在する.

Proof. t の構成に関する帰納法によって示す.

- $t \equiv x$ の場合は $\lambda x^\rho.t := \Sigma\Pi\Pi$ とすればよい.
- t が x を含まない場合は $\lambda x^\rho.t := \Pi t$ とすればよい.
- t が x を含みかつ $s(s')$ という形をしている場合は，既に定義された $\lambda x^\rho.s$, $\lambda x^\rho.s'$ を用いて $\lambda x^\rho.t := \Sigma(\lambda x^\rho.s)(\lambda x^\rho.s')$ とすればよい. □

以下では直感的な読みやすさのため，様々な項を上記の λ を用いて表記する.

注意.

全ての原始再帰的関数は **T** の項として定義できる．特に，原始再帰的関数 $+, \cdot, sg, \overline{sg}, pd, \dot{-}$ が変数記号を含まない **T** の項として定義できる．

WE-HA$^\omega$ の場合と全く同様にして以下が示せる．

命題.

T の任意の論理式 $A(\underline{x})$(ここで $\underline{x}$ は A に含まれる全ての変数記号の列) に対して，$\mathbf{T} \vdash t\underline{x} =_0 0 \leftrightarrow A(\underline{x})$ をみたす，変数記号を含まない **T** の項 t が存在する．

命題.

T の任意の論理式 A に対して以下が成り立つ:

1. $A \vee \neg A$;
2. $\neg\neg A \to A$.

次の命題は，T において，(量化子を含まない)T の論理式による場合分けを用いて新しい関数を定義することができることを保証するものである．

命題.

全ての有限型 $\rho \in \mathbb{T}$ に対して，以下をみたす変数記号を含まない T の項 t が存在する:

$$\mathbf{T} \vdash \left(x = 0 \to txy_1y_2 =_\rho y_1\right) \wedge \left(x \neq 0 \to txy_1y_2 =_\rho y_2\right)^{*11}$$

---

*11 厳密には T は型 0 に対する等号 $=_0$ しか含まず，$\rho := 0\rho_k \ldots \rho_1 \in \mathbb{T}$ に対し，これは

$$\mathbf{T} \vdash \left(x = 0 \to txy_1y_2\underline{v}^\rho =_0 y_1\underline{v}^\rho\right) \wedge \left(x \neq 0 \to txy_1y_2\underline{v}^\rho =_0 y_2\underline{v}^\rho\right)$$

(ただし，$\underline{v}^\rho := v_1^{\rho_1}, \ldots, v_k^{\rho_k}$ は考えている証明中に現れない新しい変数記号) の略記である．

Proof. $\varphi := \lambda x^0, y_1^0, y_2^0. R_0 x y_1 (\lambda n^0, m^0. y_2)$ とすると，**T** で

$$\varphi 0 y_1 y_2 =_0 y_1 \tag{1}$$

及び

$$\varphi S(x) y_1 y_2 =_0 y_2 \tag{2}$$

が示せる．いま，各有限型 $\rho := 0\rho_k \dots \rho_1$ に対して，

$$t := \lambda x^0, y_1^\rho, y_2^\rho, \underline{v}^\rho. \varphi x (y_1 \underline{v})(y_2 \underline{v})$$

とする．このとき，置換規則 Sub, 外延性規則 ER$^+$ 等を用いることにより (1) から

$$x = 0 \rightarrow t x y_1 y_2 \underline{v}^\rho =_0 y_1 \underline{v}^\rho$$

が従う．一方，**T** において数学的帰納法の規則 IR を用いて $x \neq_0 0 \rightarrow x =_0 S(pd(x))$ が示せるから，再び置換規則 Sub, 外延性規則 ER$^+$ 等を用いることにより (2) から

$$x \neq 0 \rightarrow t x y_1 y_2 \underline{v}^\rho =_0 y_2 \underline{v}^\rho$$

が従う． □

次の補題は，直観主義有限型算術におけるペアリング関数におおよそ相当するものが項として存在することを主張している．

補題.

任意の有限型 σ, τ に対して，以下をみたす **T** の項 $D_{\sigma,\tau}$, $D'_{\sigma,\tau}$, $D''_{\sigma,\tau}$ が存在する:

$$\mathbf{T} \vdash D'_{\sigma,\tau}(D_{\sigma,\tau}xy) =_\sigma x,\ D''_{\sigma,\tau}(D_{\sigma,\tau}xy) =_\tau y, \tag{3}$$

ただし，x 及び y の型はそれぞれ σ 及び τ であり，$D_{\sigma,\tau}$, $D'_{\sigma,\tau}$, $D''_{\sigma,\tau}$ はそれぞれ適当な型を持つとする [*12].

[*12] 自然数上のペアリング関数 j の場合は自然数 x, y に対して $j(x, y)$ はやはり自然数であったわけであるが，上の補題における D の場合，一般に $D_{\sigma,\tau}x^\sigma y^\tau$ の型は σ でも τ でもなく，D を繰り返し作用させればさせるほどその型は複雑になる．以降では D を繰り返し作用させる状況が度々現れるが，その際 D はそれぞれ入力の型によって決まる適当な型を持っているものとしてその添字 σ, τ は省略する．

- 上の補題より，x^σ と y^τ に対して $A(\langle x, y\rangle, x, y)$ という命題は型 $\sigma \times \tau := 0\tau_n \dots \tau_1\sigma_m \dots \sigma_1$ の項 $D_{\sigma,\tau}$ を用いて **T** の中で $A(D_{\sigma,\tau}xy, x, y)$ として扱うことができる．
- 一方で，自然数列の自然数によるコーディングとは異なり，上の補題における $D_{\sigma,\tau}$, $D'_{\sigma,\tau}$, $D''_{\sigma,\tau}$ に対して

$$D_{\sigma,\tau}(D'_{\sigma,\tau}z, D''_{\sigma,\tau}z) = z$$

は一般には成り立たない．つまり，型 $\sigma \times \tau := 0\tau_n \dots \tau_1\sigma_m \dots \sigma_1$ の全ての項を型 σ と型 τ の元の組のコードとして見ることはできない．そのため，直積型 (product type) $\sigma \times \tau$ を自由に扱うためには，一般には型の定義を $\sigma, \tau \in \mathbb{T} \Rightarrow \sigma \times \tau \in \mathbb{T}$ を含むように拡張し，さらに

$$D'_{\sigma,\tau}(D_{\sigma,\tau}xy) =_\sigma x,\ D''_{\sigma,\tau}(D_{\sigma,\tau}xy) =_\tau y,\ D_{\sigma,\tau}(D'_{\sigma,\tau}z, D''_{\sigma,\tau}z) = z$$

をみたす $D_{\sigma,\tau}, D'_{\sigma,\tau}, D''_{\sigma,\tau}$ を項として新しく加えた有限型算術を考える必要がある．

補題. (有限型の元の有限個の組のコーディング)

全ての自然数 $k \geq 1$ に対して,

$$\mathbf{T} \vdash V_i^k(V^k x_0^{\rho_0} \dots x_{k-1}^{\rho_{k-1}}) =_{\rho_i} x_i^{\rho_i} \ (0 \leq i < k)$$

をみたす変数記号を含まない $\mathbf{T}$ の項 V^k 及び V_i^k $(0 \leq i < k)$ が存在する.

補題. (同時再帰 (Simultaneous recursion))

任意の有限型の列 $\underline{\rho} := \rho_1, \dots, \rho_k$ に対して，以下をみたす変数記号を含まない $\mathbf{T}$ の項の列 $\underline{R} := R_1, \dots, R_k$ が存在する:

$$\begin{cases} R_i 0\,\underline{y}\,\underline{z} =_{\rho_i} y_i^{\rho_i}, \\ R_i(Sx^0)\underline{y}\,\underline{z} =_{\rho_i} z_i^{\rho_i 0 \underline{\rho}^t}(\underline{R}x\underline{y}\,\underline{z})x, \quad (i = 1, \dots, k), \end{cases}$$

ただし，$\underline{\rho}^t$ は $\underline{\rho}$ を逆順に並べた有限型の列 $\rho_k, \dots, \rho_1$ を意味する.

補題. (有限個の変数の縮約)

自由変数 $x_0^{\rho_0}, \ldots, x_{k-1}^{\rho_{k-1}}$ を含む WE-HA$^\omega$ の任意の論理式 $A(x_0^{\rho_0}, \ldots, x_{k-1}^{\rho_{k-1}})$ に対してに対して

$$\text{WE-HA}^\omega \vdash$$

$$\forall x_0^{\rho_0}, \ldots, x_{k-1}^{\rho_{k-1}} A(x_0, \ldots, x_{k-1}) \leftrightarrow \forall x^\sigma A(V_0^k x, \ldots, V_{k-1}^k x))$$

が成り立つ ($\sigma \in \mathbb{T}$ は先の補題における $V^k x_0 \ldots x_{k-1}$ の型).

注意.

WE-HA$^\omega$ の論理式 $A(\underline{a})$ のダイアレクティカ解釈

$$\exists x_1, \ldots, x_m \forall y_1, \ldots, y_n A_D(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n, \underline{a})$$

は $\exists x \forall y\, A_D(V_0^m x, \ldots, V_{m-1}^m x, V_0^n y, \ldots, V_{n-1}^n y, \underline{a})$ と WE-HA$^\omega$ 上同値である.

ダイアレクティカ解釈の健全性定理の証明

定理. (ダイアレクティカ解釈の健全性定理，再掲)

$A(\underline{a})$ は自由変数として $\underline{a}$ のみを含む $\mathcal{L}(\text{WE-HA}^\omega)$-論理式とし，$A^D(\underline{a}) \equiv \exists \underline{x} \forall \underline{y} A_D(\underline{x}, \underline{y}, \underline{a})$ とする．
このとき，

$$\text{WE-HA}^\omega + \mathrm{AC} + \mathrm{IP}^\omega_\forall + \mathrm{M}^\omega \vdash A(\underline{a})$$

ならば，変数記号を含まない $\mathbf{T}$ の項の列 $\underline{t}$ が存在して

$$\mathbf{T} \vdash A_D(\underline{t}\,\underline{a}, \underline{y}, \underline{a}).$$

Proof.

- (論理式の有限列として表した) 証明図 $\text{WE-HA}^\omega + \text{AC} + \text{IP}^\omega_\forall + \text{M}^\omega \vdash A(\underline{a})$ の長さに関する帰納法によって，その証明図の長さより小さい全ての自然数 k に対して，証明図の k 番目以前に現れる (自由変数として $\underline{w}$ のみを含む) 各論理式 $W(\underline{w})$ に対して，変数記号を含まない **T** の項の列 $\underline{t}$ が存在して $\mathbf{T} \vdash W_D(\underline{t}\,\underline{w}, \underline{y}, \underline{w})$(ただし $W^D(\underline{w}) \equiv \exists\underline{x}\forall\underline{y}A_D(\underline{x}, \underline{y}, \underline{w})$) であることを示す.

- これが示せれば，k として "証明図 $\text{WE-HA}^\omega + \text{AC} + \text{IP}^\omega_\forall + \text{M}^\omega \vdash A$ の長さ" -1 をとれば [*13]，健全性定理の主張が直ちに従う.

- 実際には，否定翻訳に関する定理の証明と同様に，$\text{WE-HA}^\omega + \text{AC} + \text{IP}^\omega_\forall + \text{M}^\omega$ の各公理 $W(\underline{w})$ に対して，変数記号を含まない **T** の項の列 $\underline{t}$ が存在して $\mathbf{T} \vdash W_D(\underline{t}\,\underline{w}, \underline{y}, \underline{w})$ が成り立つこと，及び WE-HA^ω の各推論規則が上の条件を保存することを確かめれば十分である.

[*13] ここでは有限列の最初の論理式を "0 番目" の論理式と数えている.

まずは，論理公理 ($\mathrm{IL}_{-=}$ の公理) について考察する．

- $A \vee A \to A$ (axioms of contraction 1) について:

  $\underline{a}$ を A に含まれる全ての自由変数の列とする．定義より，

$$
\begin{aligned}
&(A \vee A \to A)^D \\
\equiv\ & \left(\begin{array}{l} \exists z^0, \underline{x}, \underline{x'} \forall \underline{y}, \underline{y'} \left(((z = 0 \to A_D(\underline{x}, \underline{y}, \underline{a})) \wedge (z \neq 0 \to A_D(\underline{x'}, \underline{y'}, \underline{a})))\right) \\ \to \exists \underline{x''} \forall \underline{y''} A_D(\underline{x''}, \underline{y''}, \underline{a}) \end{array} \right)^D \\
\equiv\ & \exists \underline{X''}, \underline{Y}, \underline{Y'} \forall z^0, \underline{x}, \underline{x'}, \underline{y''} \\
& \left(\begin{array}{l} \big(\big(z = 0 \to A_D(\underline{x}, \underline{Y} z \underline{x}\, \underline{x'}\, \underline{y''}, \underline{a})\big) \wedge \big(z \neq 0 \to A_D(\underline{x'}, \underline{Y'} z \underline{x}\, \underline{x'}\, \underline{y''}, \underline{a})\big)\big) \\ \to A_D(\underline{X''} z \underline{x}\, \underline{x'}, \underline{y''}, \underline{a}) \end{array} \right).
\end{aligned}
$$

である．いま，

$$
\underline{t_{X''}} := \lambda \underline{a}, z, \underline{x}, \underline{x'}. \begin{cases} \underline{x} & \text{if } z = 0 \\ \underline{x'} & \text{if } z \neq 0 \end{cases}, \ \underline{t_Y} := \underline{t_{Y'}} := \lambda \underline{a}, z, \underline{x}, \underline{x'}, \underline{y''}. \underline{y''}
$$

とすると，$\mathbf{T} \vdash z =_0 0 \vee z \neq_0 0$ より

$$
\mathbf{T} \vdash \begin{array}{l} \big(z = 0 \to A_D(\underline{x}, \underline{t_Y} \underline{a} z \underline{x}\, \underline{x'}\, \underline{y''}, \underline{a})\big) \wedge \big(z \neq 0 \to A_D(\underline{x}, \underline{t_{Y'}} \underline{a} z \underline{x}\, \underline{x'}\, \underline{y''}, \underline{a})\big) \\ \to A_D(\underline{t_{X''}} \underline{a} z \underline{x}\, \underline{x'}\, \underline{y''}, \underline{y''}, \underline{a}) \end{array}
$$

が示される．

- $A \to A \wedge A$ (axioms of contraction 2) について:

$\underline{a}$ を A に含まれる全ての自由変数の列とする．定義より，

$$
\begin{aligned}
& (A \to A \wedge A)^D \\
\equiv \; & \left(\begin{array}{l} \exists \underline{x} \forall \underline{y} A_D(\underline{x}, \underline{y}, \underline{a}) \\ \to \exists \underline{x'}, \underline{x''} \forall \underline{y'}, \underline{y''} (A_D(\underline{x'}, \underline{y'}, \underline{a}) \wedge A_D(\underline{x''}, \underline{y''}, \underline{a})) \end{array} \right)^D \\
\equiv \; & \exists \underline{X'}, \underline{X''}, \underline{Y} \forall \underline{x}, \underline{y}, \underline{y''} \left(\begin{array}{l} A_D(\underline{x}, \underline{Y}\,\underline{x}\,\underline{y'}\,\underline{y''}, \underline{a}) \\ \to A_D(\underline{X'}\,\underline{x}, \underline{y'}, \underline{a}) \wedge A_D(\underline{X''}\,\underline{x}, \underline{y''}, \underline{a}) \end{array} \right)
\end{aligned}
$$

である．いま，A_D が量化子を含まない論理式であるから，

$$
\underline{t}_{\underline{X'}} := \underline{t}_{\underline{X''}} := \lambda \underline{a}, \underline{x}. \underline{x}, \; \underline{t}_{\underline{Y}} := \lambda \underline{a}, \underline{x}, \underline{y'}, \underline{y''}. \begin{cases} \underline{y'} & \text{if } \neg A_D(\underline{x}, \underline{y'}, \underline{a}) \\ \underline{y''} & \text{if } A_D(\underline{x}, \underline{y'}, \underline{a}) \end{cases}
$$

がとれ，**T** の ex falso quodlibet 公理を用いて

$$
T \vdash A_D(\underline{x}, \underline{t}_{\underline{Y}}\underline{a}\,\underline{x}\,\underline{y'}\,\underline{y''}, \underline{a}) \to A_D(\underline{t}_{\underline{X'}}\underline{a}\,\underline{x}, \underline{y'}, \underline{a}) \wedge A_D(\underline{t}_{\underline{X''}}\underline{a}\,\underline{x}, \underline{y''}, \underline{a})
$$

が示される．

Exercise!

- $A \to A \vee B$ (axioms of weakening 1);
- $A \wedge B \to A$ (axioms of weakening 2);
- $A \vee B \to B \vee A$ (axioms of permutation 1);
- $A \wedge B \to B \wedge A$ (axioms of permutation 2);
- $\perp \to A$ (ex falso quodlibet);
- $\forall z^\rho A \to A[t/z]$ (quantifier axiom 1);
- $A[t/z] \to \exists z^\rho A$ (quantifier axiom 2).

次に論理規則 ($\mathrm{IL}_{-=}$ の推論規則) について考察する.

- modus ponens 規則について:
  $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ はそれぞれ $A, B, A \to B$ に含まれる全ての自由変数の列 ($\{\underline{c}\} = \{\underline{a}, \underline{b}\}$) とし変数記号を含まない $\mathbf{T}$ の項 $\underline{t}_1, \underline{t}_2, \underline{t}_3$ は

$$\mathbf{T} \vdash A_D(\underline{t}_1 \underline{a}, \underline{y}, \underline{a}), \tag{4}$$

$$\mathbf{T} \vdash A_D(\underline{x}, \underline{t}_2 \underline{c}\, \underline{x}\, \underline{v}, \underline{a}) \to B_D(\underline{t}_3 \underline{c}\, \underline{x}, \underline{v}, \underline{b}) \tag{5}$$

  をみたすとする.
  以下では, 変数記号を含まないある $\mathbf{T}$ の項 $\underline{t}_4$ に対して,
  $\mathbf{T} \vdash B_D(\underline{t}_4 \underline{b}, \underline{v}, \underline{b})$ が成り立つことを示す.
  いま, 置換規則 Sub を用いて (5) の $\underline{x}$ を $\underline{t}_1 \underline{a}$ で置き換えれば

$$\mathbf{T} \vdash A_D(\underline{t}_1 \underline{a}, \underline{t}_2 \underline{c}(\underline{t}_1 \underline{a}) \underline{v}, \underline{a}) \to B_D(\underline{t}_3 \underline{c}(\underline{t}_1 \underline{a}), \underline{v}, \underline{b})$$

  を得る.
  一方, 置換規則 Sub を用いて (4) の $\underline{y}$ を $\underline{t}_2 \underline{c}(\underline{t}_1 \underline{a}) \underline{v}$ で置き換えれば

$$\mathbf{T} \vdash A_D(\underline{t}_1 \underline{a}, \underline{t}_2 \underline{c}(\underline{t}_1 \underline{a}) \underline{v}, \underline{a})$$

  を得る.

これらと $\mathbf{T}$ の modus ponens 規則より，

$$\mathbf{T} \vdash B_D(\underline{t_3}\underline{c}(\underline{t_1}\underline{a}), \underline{v}, \underline{b})$$

が従い，再び $\mathbf{T}$ の置換規則 Sub を用いて $\underline{a}$ のうち $\underline{b}$ に含まれない a_i を全て $\mathbf{0} := \lambda y_1^{\rho_1}, \ldots, y_k^{\rho_k}.\, 0$($a_i$ の型は $\rho := 0\rho_k \ldots \rho_1$) で置き換えれば，

$$\mathbf{T} \vdash B_D(\underline{t_3}\underline{\mathbf{0}}\,\underline{b}(\underline{t_1}\underline{\mathbf{0}}\,\underline{b'}), \underline{v}, \underline{b})$$

(ただし，$\underline{b'}$ は $\underline{a}$ のうち $\underline{b}$ に含まれる変数記号の列，) が従う．よって，$\underline{t_4} := \lambda\underline{b}.\, \underline{t_3}\underline{\mathbf{0}}\,\underline{b}(\underline{t_1}\underline{\mathbf{0}}\,\underline{b'})$ とすれば $\mathbf{T} \vdash B_D(\underline{t_4}\underline{b}, \underline{v}, \underline{b})$ が成り立つ．

Exercise!

- $\dfrac{A \to B, \quad B \to C}{A \to C}$ (syllogism);
- $\dfrac{A \wedge B \to C}{A \to (B \to C)}$, $\dfrac{A \to (B \to C)}{A \wedge B \to C}$ (exportation and importation);
- $\dfrac{A \to B}{C \vee A \to C \vee B}$ (expansion);
- $\dfrac{B \to A}{B \to \forall x A}$, $\dfrac{A \to B}{\exists x A \to B}$, ただし x は B に自由に出現しない (quantifier rules).

最後にその他の公理と推論規則について考察する.

- $=_0, S, \Sigma, \Pi, R$ に関する公理について:
  これらは全て $\forall \underline{x} A_{qf}(\underline{x})$(ここで A_{qf} は量化子を含まない論理式) という形をしているため，それらのダイアレクティカ解釈はそれら自身である.
  よって，これらに対して必要となる **T** の項の列は空列であり，対応する **T** の公理 ($A_{qf}(\underline{x})$ という形をしている) がこれらの場合を保証する.

- 弱外延性規則 $\mathrm{QF\text{-}ER}_\rho$ について:
  弱外延性規則 $\mathrm{QF\text{-}ER}_\rho$ は

$$\frac{A_{qf} \to s =_\rho t}{A_{qf} \to r[s/x^\rho] =_0 r[t/x^\rho]}$$

という規則であるが，いま $\mathrm{QF\text{-}ER}_\rho$ における A_{qf} は $t'\underline{a} =_0 0$ という形をしているとして一般性を失わない．
$\mathcal{L}(\mathsf{WE\text{-}HA}^\omega)$-論理式 $t'\underline{a} =_0 0 \to s =_\rho t$ $(\rho = 0\rho_k \ldots \rho_1)$ に対して，そのダイアレクティカ解釈 $(t'\underline{a} =_0 0 \to s =_\rho t)^D$ は

$$\forall y_1^{\rho_1}, \ldots, y_k^{\rho_k}(t'\underline{a} =_0 0 \to sy_1 \ldots y_k =_0 ty_1 \ldots y_k)$$

であり，$\mathcal{L}(\mathsf{WE\text{-}HA}^\omega)$-論理式 $t'\underline{a} =_0 0 \to r[s/x^\rho] =_0 r[t/x^\rho]$ に対して，そのダイアレクティカ解釈はそれ自身であるが，
$\mathbf{T}$ の外延性規則 ER_ρ^+ 及び置換規則 Sub より，
$\mathbf{T} \vdash t'\underline{a} =_0 0 \to sy_1 \ldots y_k =_0 ty_1 \ldots y_k$ ならば
$\mathbf{T} \vdash t'\underline{a} =_0 0 \to r[s/x^\rho]z_1 \ldots z_{k'} =_0 r[t/x^\rho]z_1 \ldots z_{k'}$ (必要となる $\mathbf{T}$ の項の列は空列) であることが示される．

- 数学的帰納法の規則 IR について:
  $\underline{a}$ は $A(z)$ に含まれる z 以外の全ての自由変数の列とし，変数記号を含まない $\mathbf{T}$ の項の列 $\underline{t}_1, \underline{t}_2, \underline{t}_3$ は

$$\mathbf{T} \vdash A_D(\underline{t}_1\underline{a}, \underline{y}, 0, \underline{a}) \tag{6}$$

$$\mathbf{T} \vdash A_D(\underline{x}, \underline{t}_2 z\underline{a}\,\underline{x}\,\underline{y}', z, \underline{a}) \to A_D(\underline{t}_3 z\underline{a}\,\underline{x}, \underline{y}', z+1, \underline{a}) \tag{7}$$

をみたすとする．以下では，変数記号を含まないある $\mathbf{T}$ の項 $\underline{t}_4$ に対して，$\mathbf{T} \vdash A_D(\underline{t}_4 z\underline{a}, \underline{y}, z, \underline{a})$ が成り立つことを示す．まず，同時再帰を用いて以下をみたす (変数記号を含まない)$\mathbf{T}$ の項の列 $\underline{t}_4$ をとる:

$$\begin{cases} \underline{t}_4 0\underline{a} & = & \underline{t}_1\underline{a}, \\ \underline{t}_4(z+1)\underline{a} & = & \underline{t}_3 z\underline{a}(\underline{t}_4 z\underline{a}). \end{cases}$$

このとき，(6), (7) 及び $\mathbf{T}$ の置換規則 Sub より

$$\mathbf{T} \vdash A_D(\underline{t}_4 0\underline{a}, \underline{y}, 0, \underline{a}) \tag{8}$$

$$\mathbf{T} \vdash A_D(\underline{t}_4 z\underline{a}, \underline{t}_2 z\underline{a}(\underline{t}_4 z\underline{a})\underline{y}', z, \underline{a}) \to A_D(\underline{t}_4(z+1)\underline{a}, \underline{y}', z+1, \underline{a}) \tag{9}$$

が成り立つ．

補題.

いま，$\underline{b}$ は変数記号を含まない $\mathbf{T}$ の項の列とし，$A(z, \underline{y})$ は変数記号として z 及び $\underline{y}$ のみを含む $\mathbf{T}$ の論理式とする．このとき，

$$A(0, \underline{y}) \tag{10}$$

及び

$$A(z, \underline{bzy}) \to A(z+1, \underline{y}) \tag{11}$$

が $\mathbf{T} + \Gamma$(ただし，Γ は $\mathbf{T}$ の論理式の集合) で示されるならば，$A(z, \underline{y})$ が $\mathbf{T} + \Gamma$ で示される．

Idea of Proof. (11) を z 回用いて $A(z, \underline{y})$ の証明可能性を適当な $\underline{c}$ を用いた $A(0, \underline{c})$ の証明可能性に還元し，(10) と置換規則 Sub を用いてそれを保証する．

上の補題において，$A(z, \underline{y})$ として $A_D(\underline{t_4}z\underline{a}, \underline{y'}, z, \underline{a})$, $\underline{b}$ として $\lambda z, \underline{y'}, \underline{a}.\ \underline{t_2}z\underline{a}(\underline{t_4}z\underline{a})\underline{y'}$ をとれば，

$$\mathbf{T} \vdash A_D(\underline{t_4}z\underline{a}, \underline{y}, z, \underline{a})$$

が従う．

- AC について:

$$\mathrm{AC}^{\rho,\tau} :\equiv \forall u^\rho \exists v^\tau A(u,v,\underline{a}) \to \exists V^{\tau\rho} \forall u^\rho A(u,V(u),\underline{a})$$

(ただし，$\underline{a}$ は A に含まれる u, v 以外の全ての自由変数の列) であるので，定義より，

$$(\mathrm{AC}^{\rho,\tau})^D \equiv \begin{pmatrix} \exists V, \underline{X} \forall u, \underline{y} A_D(\underline{X}u, \underline{y}, u, V(u), \underline{a}) \\ \to \exists V, \underline{X} \forall u, \underline{y} A_D(\underline{X}u, \underline{y}, u, V(u), \underline{a}) \end{pmatrix}^D,$$

ただし $A^D(u,v,\underline{a}) \equiv \exists \underline{x} \forall \underline{y} A_D(\underline{x}, \underline{y}, u, v, \underline{a})$.
すなわち，$(\mathrm{AC}^{\rho,\tau})^D$ は $(A' \to A')^D$ という形をしている．
よって，$\mathbf{T}$ の任意の論理式 A に対して $T \vdash A \to A$ であることから，条件をみたす項を容易に構成できる．

- $\mathrm{IP}^{\omega}_{\forall}$ について:

$$\mathrm{IP}^{\rho,\tau}_{\forall} :\equiv \begin{array}{l} (\forall z^{\tau} A_{qf}(z,\underline{a}) \to \exists w^{\rho} B(w,\underline{b})) \\ \to \exists w^{\rho} (\forall z^{\tau} A_{qf}(z,\underline{a}) \to B(w,\underline{b})) \end{array}$$

であるが，いま A_{qf} は $tz\underline{a} =_0 0$ という形をしているとして一般性を失わない．
このとき $(\forall z A_{qf})^D \equiv \forall z A_{qf}$ であり，定義より，

$$\begin{aligned} &(\mathrm{IP}^{\rho,\tau}_{\forall})^D \\ \equiv\ & \left(\begin{array}{l} (\forall z A_{qf}(z,\underline{a}) \to \exists w, \underline{u} \forall \underline{v} B_D(\underline{u},\underline{v},w,\underline{b}))^D \\ \to \exists w (\forall z A_{qf}(z,\underline{a}) \to \exists \underline{u} \forall \underline{v} B_D(\underline{u},\underline{v},w,\underline{b}))^D \end{array} \right)^D \\ \equiv\ & \left(\begin{array}{l} \exists w, \underline{u}, Z \forall \underline{v} (A_{qf}(Z\underline{v},\underline{a}) \to B_D(\underline{u},\underline{v},w,\underline{b})) \\ \to \exists w, \underline{u}, Z \forall \underline{v} (A_{qf}(Z\underline{v},\underline{a}) \to B_D(\underline{u},\underline{v},w,\underline{b})) \end{array} \right)^D, \end{aligned}$$

ただし $B^D(w,\underline{b}) \equiv \exists \underline{u} \forall \underline{v} B_D(\underline{u},\underline{v},w,\underline{b})$.
AC の場合と同様に，$(\mathrm{IP}^{\rho,\tau}_{\forall})^D$ も $(A' \to A')^D$ という形をしており，**T** の任意の論理式 A に対して $T \vdash A \to A$ であることから，条件をみたす項を容易に構成できる．

- M^ω について:

$$\mathrm{M}^\rho :\equiv \neg\neg\exists z^\rho A_{qf}(z, \underline{a}) \to \exists z^\rho A_{qf}(z, \underline{a})$$

(ただし，$\underline{a}$ は $\exists z^\rho A_{qf}(z)$ に含まれる全ての自由変数の列) であるが，いま A_{qf} は $tz\underline{a} =_0 0$ という形をしているとして一般性を失わない．
このとき $(\exists z A_{qf})^D \equiv \exists z A_{qf}$ であり，定義より

$$\begin{aligned}(\mathrm{M}^\rho)^D &\equiv \left(\exists z \neg\neg A_{qf}(z, \underline{a}) \to \exists z' A_{qf}(z', \underline{a})\right)^D \\ &\equiv \exists Z' \forall z \left(\neg\neg A_{qf}(z, \underline{a}) \to A_{qf}(Z' z, \underline{a})\right)\end{aligned}$$

であるが，$t_{Z'} := \lambda \underline{a}, z. z$ とすれば，

$$\neg\neg A_{qf}(z, \underline{a}) \to A_{qf}(t_{Z'} \underline{a} z, \underline{a})$$

が示される．

□健全性定理

上の証明より，実際には以下が成り立つ:

ダイアレクティカ解釈の健全性定理

$A(\underline{a})$ は自由変数として $\underline{a}$ のみを含む $\mathcal{L}(\mathsf{WE\text{-}HA}^\omega)$-論理式とし，$A^D(\underline{a}) \equiv \exists \underline{x} \forall \underline{y} A_D(\underline{x}, \underline{y}, \underline{a})$ とする．このとき，

$$\mathsf{WE\text{-}HA}^\omega + \mathrm{AC} + \mathrm{IP}^\omega_\forall + \mathrm{M}^\omega + \mathrm{P} \vdash A(\underline{a})$$

ならば，変数記号を含まない $\mathbf{T}$ の項の列 $\underline{t}$ が存在して

$$\mathbf{T} + \mathrm{P}' \vdash A_D(\underline{t}\,\underline{a}, \underline{y}, \underline{a})$$

である，ただし，P は $\forall \underline{x} A_{qf}(\underline{x})$ という形の論理式の集合，P′ は対応する量化子を持たない論理式 $A_{qf}(\underline{x})$ の集合．

注意. (Howard 1973) ダイアレクティカ解釈の健全性定理において $\mathsf{WE\text{-}HA}^\omega$ を $\mathsf{E\text{-}HA}^\omega$ で置き換えた主張は成り立たない．

系.

$A(\underline{a})$ は自由変数として $\underline{a}$ のみを含む $\mathcal{L}(\text{WE-HA}^\omega)$-論理式とし，$A^D(\underline{a}) \equiv \exists \underline{x} \forall \underline{y} A_D(\underline{x}, \underline{y}, \underline{a})$ とする．
このとき，$\text{WE-HA}^\omega + \mathrm{AC} + \mathrm{IP}^\omega_\forall + \mathrm{M}^\omega \vdash A(\underline{a})$ ならば，変数記号を含まない WE-HA^ω の項 t が存在して
$\text{WE-HA}^\omega \vdash A_D(\underline{t}\,\underline{a}, \underline{y}, \underline{a})$ である．

Proof. **T** の項は WE-HA^ω の項でもあり，**T** は WE-HA^ω の部分体系であることから，健全性定理より従う．

系. (ダイアレクティカ解釈の特徴付け)

任意の $\mathcal{L}(\text{WE-HA}^\omega)$-論理式 A に対して，

$$\text{WE-HA}^\omega + \mathrm{AC} + \mathrm{IP}^\omega_\forall + \mathrm{M}^\omega \vdash A \iff \text{WE-HA}^\omega \vdash A^D.$$

Proof. $\Leftarrow$ は八杉 1963 から従い，$\Rightarrow$ は上の系から従う．

古典解析学 (二階算術) の無矛盾性

- 古典解析学の無矛盾性はヒルベルトの第 2 問題として 20 世紀初頭から問われていた重要な問題であった.
- 古典的な解析学の大部分は二階算術と呼ばれる枠組みのなかで形式化できることが古くから知られており，そのため，二階算術は古典解析学と呼ばれることも多い.
- 死後に出版された論文 (Spector 1962)[*14] において，スペクターはゲーデルの **T** にバー再帰と呼ばれる完全木の上の再帰的な定義を加えた量化子を持たない理論 $\mathbf{T} + \mathrm{BR}^\omega$ を導入し，二階算術の無矛盾性がその理論 [*15] の無矛盾性に還元されることを示した

[*14] この論文はスペクターの死後にクライゼルによって投稿された.

[*15] 実際には，スペクターの証明は暗黙に ω 規則をも使っていることが Luckard 1973 で指摘された．Kohlenbach 2008 において，スペクターの証明を修正することによりスペクターの意図通り $\mathbf{T} + \mathrm{BR}^\omega$ まで還元できることが示されている.

二階算術は自然数に対する変数記号と量化子のみならず自然数の集合に対する変数記号と量化子 [*16]，及び帰属関係記号 $\in$ を持ったペアノ算術 PA の拡張であり，論理式で表現される集合の存在を保証する内包公理 CA^0:

$$\exists X \forall x (x \in X \leftrightarrow A(x)),$$

ただし，X は自然数の集合に対する変数記号であり x は自然数に対する変数記号，を含んでいる．

[*16] 自然数上の関数をそのグラフと見ることにより，二階算術において自然数上の関数が扱える．

一方，自然数の集合をその特性関数と同一視すれば，上記の内包公理 CA^0 は WE-PA$^\omega$ の論理式として以下のように表される:

$$\exists f^{0(0)} \forall x^0 (f(x) =_0 0 \leftrightarrow A(x)). \tag{12}$$

いま，AC の弱い断片

$$\mathrm{QF\text{-}AC}^{0,0} :\equiv \forall x^0 \exists y^0 A_{qf}(x, y) \to \exists Y^{0(0)} \forall x^0 A_{qf}(x, Y(x)),$$

を考えると，以下が成り立つことが容易に確かめられる．

命題.

CA^0 と $\mathrm{AC}^{0,0}$ は WE-PA$^\omega$ + $\mathrm{QF\text{-}AC}^{0,0}$ 上 (公理群として) 同値である．

WE-PA$^\omega$ + $\mathrm{AC}^{0,0}$ は古典解析学を含む算術であるから，PA の無矛盾性証明を二階算術まで拡張するためには弱い選択公理 $\mathrm{AC}^{0,0}$ さえ同様に取り扱うことができればよい!
(実際には，$\mathrm{AC}^{0,0}$ を同様に取り扱うためには **T** では事足りず，そのためにバー再帰 BR^ω が必要となる．)

二階算術の無矛盾性還元 (Essentially, Spector 1962)

E-PA$^\omega$ $+ \mathrm{AC}^0 \vdash \perp$ ならば **T** $+ \mathrm{BR}^\omega \vdash \perp$ である.

- $\mathrm{AC}^0 := \bigcup_{\tau \in \mathbb{T}} \{\mathrm{AC}^{0,\tau}\}$, ただし,
  $\mathrm{AC}^{0,\tau} :\equiv \forall x^0 \exists y^\tau A(x, y) \to \exists Y^{\tau(0)} \forall x^\rho A(x, Y(x))$.

- AC^0 の否定翻訳 $(\mathrm{AC}^0)^N$ は ($\mathsf{WE\text{-}HA}^\omega$ 上) 以下と同値であることが容易に確かめられる:

$$\forall x^0 \neg\neg\exists y^\tau A^*(x,y) \to \neg\neg\exists Y^{\tau(0)} \forall x^0 \neg\neg A^*(x, Y(x)).$$

- この論理式はどのようにして導かれるであろうか？
おそらく最も自然な方法は以下であろう:
  1. $\forall x^0 \neg\neg\exists y^\tau A^*(x,y)$ において $\forall x^0$ の後ろにある二重否定を $\forall x^0$ の前へ移行する.
  2. AC^0 を用いて $\neg\neg\exists Y^{\tau(0)} \forall x^0 A^*(x, Y(x))$ を得る.
  3. 二重否定を加えて $\neg\neg\exists Y^{\tau(0)} \forall x^\rho \neg\neg A^*(x, Y(x))$ を得る

- この方法によれば，直観主義算術 $\mathsf{WE\text{-}HA}^\omega$ 上で否定翻訳 $(\mathrm{AC}^0)^N$ を得るためには AC^0 だけでなく，上記 1 の操作に対応する型 0 の二重否定シフト公理

$$\mathrm{DNS}^0 : \forall x^0 \neg\neg A(x) \to \neg\neg\forall x^0 A(x)$$

が必要となる.

否定翻訳に関する定理の証明に上記の議論を合わせることにより，以下が示される.

補題.

任意の $\mathcal{L}(\text{E-HA}^\omega)$-論理式 A に対して，$\text{WE-PA}^\omega + \mathrm{AC}^0 \vdash A$ ならば $\text{WE-HA}^\omega + \mathrm{AC}^0 + \mathrm{DNS}^0 \vdash A^N$ である.

注意.

一般に二重否定シフト公理は直観主義論理 (または算術) では証明できない論理公理であることが知られている.

- つまり，$\text{WE-PA}^\omega + \mathrm{AC}^0$ の無矛盾性は $\text{WE-HA}^\omega + \mathrm{AC}^0 + \mathrm{DNS}^0$ の無矛盾性に還元される.
- 特に，ダイアレクティカ解釈の健全性定理より，その問題は DNS^0 のダイアレクティカ解釈を考える問題に帰着される.

定義. (バー再帰 (bar recursion), Spector 1962)

$$\begin{cases} Y\hat{s} < |s| & \to \quad \mathrm{BR}_{\rho,\tau} YGHs =_\tau Gs, \\ Y\hat{s} \geq |s| & \to \quad \mathrm{BR}_{\rho,\tau} YGHs =_\tau H(\lambda w^\rho.\mathrm{BR}_{\rho,\tau} YGH(s * \langle w \rangle))s, \end{cases}$$

ただし，s は型 ρ の元からなる有限列 (のコード) であり，G, H, Y はそれぞれ適当な型をもつとする．

定理. (ダイアレクティカ解釈の健全性定理の拡張)

$A(\underline{a})$ は自由変数として $\underline{a}$ のみを含む $\mathcal{L}(\text{WE-HA}^\omega)$-論理式とし，$A^D(\underline{a}) \equiv \exists \underline{x} \forall \underline{y} A_D(\underline{x}, \underline{y}, \underline{a})$ とする．このとき，$\text{WE-HA}^\omega + \mathrm{AC} + \mathrm{IP}^\omega_\forall + \mathrm{M}^\omega + \mathrm{DNS}^0 \vdash A(\underline{a})$ ならば，変数記号を含まない $\mathbf{T} + \mathrm{BR}^\omega$ の項の列 $\underline{t}$ が存在して

$$\mathbf{T} + \mathrm{BR}^\omega \vdash A_D(\underline{t}\,\underline{a}, \underline{y}, \underline{a}),$$

ただし，$\mathbf{T} + \mathrm{BR}^\omega$ は $\mathbf{T}$ に定数記号 $\mathrm{BR}_{\rho,\tau}$ $(\rho, \tau \in \mathbb{T})$ と上の定義公理を加えて得られる理論とする．

定義. (外延性除去翻訳)

A_e は以下によって帰納的に定義される.

- 原始論理式 A に対して, $A_e :\equiv A$;
- $\Box \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ に対して, $(A \Box B)_e :\equiv (A_e \Box B_e)$;
- $(\exists x^\rho A)_e :\equiv \exists x^\rho (x =^e_\rho x \wedge A_e)$;
- $(\forall x^\rho A)_e :\equiv \forall x^\rho (x =^e_\rho x \rightarrow A_e)$;

ただし,

- $x =^e_0 y :\equiv x =_0 y$;
- $x =^e_{\tau\rho} y :\equiv \forall u^\rho, v^\rho \left(u =^e_\rho v \rightarrow xu =^e_\tau xv \wedge xu =^e_\tau yv \right)$.

定理. (Essentially, Luckhardt 1973)

自由変数として $\underline{a}$ のみを含む任意の $\mathcal{L}(\text{E-HA}^\omega)$-論理式 $A(\underline{a})$ に対して, $\text{E-PA}^\omega + \mathrm{AC}^0 \vdash A(\underline{a})$ ならば $\text{WE-PA}^\omega + \mathrm{AC}^0 \vdash \underline{a} =^e \underline{a} \rightarrow A_e(\underline{a})$ である.

注意.

$deg(\rho) \leq 1$ なる型 $\rho \in \mathbb{T}$ の量化子及び自由変数しか含まない文 A に対しては,

$$\mathsf{WE\text{-}HA}^\omega \vdash A \leftrightarrow A_e.$$

二階算術の無矛盾性還元 (Essentially, Spector 1962), 再掲

$\mathsf{E\text{-}PA}^\omega + \mathrm{AC}^0 \vdash \perp$ ならば $\mathbf{T} + \mathrm{BR}^\omega \vdash \perp$ である.

Proof.

1. $\mathsf{E\text{-}PA}^\omega + \mathrm{AC}^0 \vdash \perp$ とする.
2. $\perp_e \equiv \perp$ であるから, 外延性除去翻訳に関する定理より $\mathsf{WE\text{-}HA}^\omega + \mathrm{AC}^0 \vdash \perp$ である.
3. $\perp^N \equiv \perp$ であるから, 否定翻訳に関する定理より $\mathsf{WE\text{-}HA}^\omega + \mathrm{AC}^0 + \mathrm{DNS}^0 \vdash \perp$ である.
4. $\perp^D \equiv \perp$ であるから, バー再帰を用いたダイアレクティカ解釈の健全性定理の拡張より $\mathbf{T} + \mathrm{BR}^\omega \vdash \perp$ が従う.

BHK 解釈から見たダイアレクティカ解釈の意味

背景

- 数学の基礎付けが大きな問題となっていた 20 世紀初頭，オランダの位相幾何学者ブラウアーは，数学的概念とは数学者の精神の産物であり，その存在は構成によって示されるべきという立場をとり，ヒルベルトの形式主義に対抗する形で，直観主義と呼ばれるその独自の哲学に基づいて数学の再構築を試みた．
- ブラウアーは (通常の数学では認めない特殊な原理をも認めたため)「全ての関数は連続である」等の通常の数学と明らかに矛盾する結果が得られていた．
- その証明における推論自体は通常の数学よりも弱い構成的なものであった．
- ブラウアーの直観主義数学は一般の数学者達には受け入れられなかったが，ブラウアーが認めた構成的な証明はマルコフ，ビショップらによるその後の構成的数学における証明 (構成的証明) の概念の発想の端緒となった．

- 1920-30 年代，ブラウアーの弟子であったハイティング及びコロモゴロフは，ブラウアーが認めた構成的な証明を形式的に扱うことを目的として (それぞれ独立に) 直観主義論理を導入した．
- その際，ハイティングが**構成的証明**の説明に用いた論理結合子の直観主義的解釈が BHK(Brouwer-Heyting-Kolmogorov) 解釈である．

  その心は $\cdots$

  - 数学的命題は論理式として形式化される．
  - 数学的命題をそれを表す論理式と同一視すれば，各論理式に対する証明の概念を論理式の構成に関して帰納的に定義することができれば [*17]，各数学的命題に対する構成的証明の概念が定まる．

[*17] 実際には BHK 解釈によって各論理式に対する証明の概念を論理式の構成に関して完全に帰納的に定義できるわけではない．

BHK 解釈を説明する前に…

- 構成的数学/直観主義数学における証明 (構成的証明) の概念は，一般の数学者はおろか，時として数学基礎論の研究者にさえ理解され難い.
- 構成的証明の概念を真っ当に理解するには，まず，おそらく現代数学をある程度学んだ人のほとんどが持っているであろう数学的命題についての**先入観**を取り払う必要があると思われる.

- 一般に，数学的命題とは「正しい」か「正しくない」かが判断**され得る**文である．
- 通常の数学では，全ての数学的命題は「正しい」か「正しくない」かのどちらかであるとみなされる．

正しい命題	分からない命題	**正しくない命題**

- 構成的数学/直観主義数学においては数学的命題について「正しい」「正しくない」が先に立つのではなく「証明」が先に立つ．
- 各数学的命題に対してまずその証明の概念があるのであって,「正しい」「正しくない」の判断基準は (構成的な) 証明があるか否かに他ならない．
- 構成的証明が与えられている命題だけが数学的真理として認められるのであるのであって，証明がない (まだ与えられていない) 命題の真偽については何も主張できない．

BHK 解釈 (非形式的な便宜的定義)

- $\perp$ の証明はない.
- $A \wedge B$ の証明は A の証明 p と B の証明 q のペア (p, q) である [*18].
- $A \vee B$ の証明は自然数 n と証明 p のペア (n, p) であり, $n = 0$ かつ p は A の証明, または $n \neq 0$ かつ p は B の証明である.
- $A \to B$ の証明は任意の A の証明を B の証明に一様に変換する手続きである.
- $\forall x A(x)$ の証明は任意の元 d を $A(d)$ の証明に一様に変換する手続きである.
- $\exists x A(x)$ の証明は元 d と証明 p のペア (d, p) であり, p は $A(d)$ の証明である.

[*18] 便宜的に集合の記号を用いて書くならば, $\{A \wedge B \text{ の証明}\} := \{(p, q) \mid p \text{ は } A \text{ の証明}, q \text{ は } B \text{ の証明}\}$ と書ける.

注意.

$A \to B$ 及び $\forall x A(x)$ については，以下のようにより強く解釈されるべきとする見解もある．

- $A \to B$ の証明は任意の A の証明を B の証明に一様に変換する手続き p とそれの証明 q のペア (p, q) である．
- $\forall x A(x)$ の証明は任意の元 d を $A(d)$ の証明に一様に変換する手続き p とそれの証明 q のペア (p, q) である．

- BHK 解釈は原始論理式の証明については何も言及しない．つまり，構成的証明は原始論理式の証明 (群) がどのようなものであるかによらずに論理式の構造のみによって規定される．
- 各命題 A に対し，A の構成的証明とは A の証明の “構成情報 (構成手続き)” に他ならない．
- 既に述べた通り構成的数学/直観主義数学においては命題はその証明を伴って初めて数学的真理として認められるものであるから，その意味で以下の対応関係が成り立つ:

$$A\text{の構成的証明} \approx A\text{の証明の構成情報} \approx A\text{の構成情報}.$$

直観主義論理で証明可能 $\Leftrightarrow$ 構成的に証明可能?

- BHK 解釈に基づいて直観主義論理における公理と推論規則を考えると，それらは全て許容されるように思われる．
(直観主義証明可能 $\Rightarrow$ 構成的に証明可能)

- 例えば，BHK 解釈に基づいて排中律 $A \vee \neg A$ や

3**. $(\forall x A(x) \vee B) \leftarrow \forall x(A(x) \vee B)$;
6**. $(\forall x A(x) \to B) \to \exists x(A(x) \to B)$;
8**. $(B \to \exists x A(x)) \to \exists x(B \to A(x))$

の構成的証明とは何かをそれぞれ考えると，それらは存在しそうにないことが見てとれるが，事実，これらは直観主義一階述語論理では証明できない．

- 一方で，例えば二重否定シフト公理は直観主義一階述語論理では証明できないが，BHK 解釈に基づいて考えれば許容してよいようにも思える．
(直観主義証明可能 $\not\Leftarrow$ 構成的に証明可能?)

BHK 解釈から見たダイアレクティカ解釈の意味

- ゲーデルは BHK 解釈の不可述性を問題とし，それよりも弱い (?) 何かしらの有限の立場まで PA の無矛盾性を還元しようとした．
- ダイアレクティカ解釈はその後，形式化された数学的定理の証明からその主張に関する (実効的) 情報を抽出する道具として大きく発展した (Kreisel, Kohlenbach etc.).
- 論理式 A のダイアレクティカ解釈 $A^D \equiv \exists \underline{x} \forall \underline{y} A_D(\underline{x}, \underline{y})$ は A のスコーレム標準形の一つ．
- ダイアレクティカ解釈の定義は $\to$ の解釈を除いて BHK 解釈を反映しているように見える．

$\Rightarrow$ ダイアレクティカ解釈は BHK 解釈とどう関係しているのであろうか？

ダイアレクティカ解釈の定義に関する再考察

A のダイアレクティカ解釈 $\exists \underline{x} \forall \underline{y} A_D(\underline{x}, \underline{y})$ は，おおよそ A の構成情報が先頭の存在量化子の列 $\exists \underline{x}$ として取り出されるように A をスコーレム化して得られるものと見れる！

- BHK 解釈に則って，“なるべく構成的” に各論理式からその構成情報を取り出すことを考えてみよう．
- BHK 解釈の最大の特徴は $A \to B$ の証明を “任意の A の証明を B の証明に一様に変換する手続き” と見る点にある．これを便宜上やや形式的に書くとすれば，
  $A \to B$ の証明とは

  $$\forall y\,(y \text{ が } A \text{ の証明} \to x(y) \text{ が } B \text{ の証明}) \tag{13}$$

  なる一様変換手続き x である．
- つまり，$A \to B$ の構成情報 x は $\forall y\, C(x, y)$ という形の命題をみたすものなのである．
  この観点に立てば，ダイアレクティカ解釈 (及び型付き実現可能性解釈) が $\exists \underline{x} \forall \underline{y} A_D(\underline{x}, \underline{y})$ という形をしていることは妥当であろう．

- 次に．$\exists \underline{x} \forall \underline{y} A_D(\underline{x}, \underline{y})$ という形でダイアレクティカ解釈を定義することは認めた上で，ダイアレクティカ解釈の定義における各ステップの妥当性について論理結合子ごとに考えてみよう．
- いま，A, B のダイアレクティカ解釈 $A^D \equiv \exists \underline{x} \forall \underline{y} A_D(\underline{x}, \underline{y})$, $B^D :\equiv \exists \underline{u} \forall \underline{v} B_D(\underline{u}, \underline{v})$ が既に定義されたとし，これらにおける $\underline{x}, \underline{u}$ はそれぞれ A, B の構成情報 (証明) であると思おう．
- $A \wedge B, A \vee B, \exists x A(x), \forall x A(x)$ のダイアレクティカ解釈がその構成情報を抽出したスコーレム標準形になるように定義しようと思えば，それらの定義はほとんど必然的に定まるであろう [*19]．

[*19] ゲーデル論文では $(A \vee B)^D :\equiv \exists z^0, \underline{x}, \underline{u} \forall \underline{y}, \underline{v}\, (A \vee B)_D :\equiv \exists z^0, \underline{x}, \underline{u} \forall \underline{y}, \underline{v} \big((z = 0 \wedge A_D(\underline{x}, \underline{y})) \vee (z \neq 0 \wedge B_D(\underline{u}, \underline{v})) \big)$ としているが，これは我々の定義と WE-HA$^\omega$ 上同値である．

- $A \to B$ のダイアレクティカ解釈 $(A \to B)^D$ が (13) を反映するものであるためには，どのようにスコーレム化すればよいであろうか？
- 上の方針に沿って，できる限り直観主義論理における変形を用いて

$$\exists \underline{x} \forall \underline{y} A_D(\underline{x}, \underline{y}) \to \exists \underline{u} \forall \underline{v} B_D(\underline{u}, \underline{v}) \tag{14}$$

をスコーレム標準形に変換してみよう．
- まず，最初の変形の可能性として

$$\forall \underline{x} \left(\forall \underline{y} A_D(\underline{x}, \underline{y}) \to \exists \underline{u} \forall \underline{v} B_D(\underline{u}, \underline{v}) \right) \tag{15}$$

または

$$\exists \underline{u} \left(\forall \underline{x} \forall \underline{y} A_D(\underline{x}, \underline{y}) \to \forall \underline{v} B_D(\underline{u}, \underline{v}) \right) \tag{16}$$

が考えられる．直観主義論理において (14) は (15) と同値ではあるものの (16) とは同値ではない．よって，最初のステップでは (15) を選択しよう．

- 次に (15) の変形を考えると，その可能性として

$$\forall \underline{x} \exists \underline{u} \left(\forall \underline{y} A_D(\underline{x}, \underline{y}) \to \forall \underline{v} B_D(\underline{u}, \underline{v}) \right) \tag{17}$$

または

$$\forall \underline{x} \exists \underline{y} \left(A_D(\underline{x}, \underline{y}) \to \exists \underline{u} \forall \underline{v} B_D(\underline{u}, \underline{v}) \right) \tag{18}$$

が考えられる．この場合は (15) は (17) と (18) のどちらとも直観主義論理において同値ではない．では，どちらがより構成情報を失わない変換であろうか？BHK 解釈の意味で考えてみると，(15) から (18) への変換は構成的にはおおよそ不可能であるように思えるのに対し，(15) から (17) への変換はおおよそ構成的な変換であるとみなせるように思えるのである．なぜなら，(15) における $\forall \underline{y} A_D(\underline{x}, \underline{y}) \to \exists \underline{u} \forall \underline{v} B_D(\underline{u}, \underline{v})$ の構成情報とは本来 $\forall \underline{y} A_D(\underline{x}, \underline{y})$ の構成情報から $\exists \underline{u} \forall \underline{v} B_D(\underline{u}, \underline{v})$ の構成情報への一様変換手続きであるが，いま $\forall \underline{y} A_D(\underline{x}, \underline{y})$ はもはや構成情報を持たないものである (と理解している) ので，それは $\exists \underline{u} \forall \underline{v} B_D(\underline{u}, \underline{v})$ の構成情報 $\underline{u}$ に集約されるように思えるからである．そこで，いま (15) からの変形としては (17) を選択しよう．($\mathrm{IP}_{\forall}^{\omega}$ があれば十分)

- 同様に (17) の変形を考えると，その可能性としては

$$\forall \underline{x} \exists \underline{u} \forall \underline{v} \left(\forall \underline{y} A_D(\underline{x}, \underline{y}) \to B_D(\underline{u}, \underline{v}) \right) \tag{19}$$

または

$$\forall \underline{x} \exists \underline{u} \exists \underline{y} \left(A_D(\underline{x}, \underline{y}) \to \forall \underline{v} B_D(\underline{u}, \underline{v}) \right) \tag{20}$$

が考えられるが，直観主義論理において (17) は (19) と同値ではあるものの (20) とは同値ではない．そのため，ここでは (19) を選択しよう．

- さらに，(17) を変形すると冠頭標準形

$$\forall \underline{x}\exists \underline{u}\forall \underline{v}\exists \underline{y}\,(A_D(\underline{x},\underline{y}) \to B_D(\underline{u},\underline{v})) \qquad (21)$$

が得られるわけであるが，この変形は直観主義論理では実行できず，BHK 解釈の意味で考えてもおおよそ実行できそうにない．しかし，$A_D(\underline{x},\underline{y})$ や $B_D(\underline{u},\underline{v})$ が量化子を含まないような弱い論理式であるとすると，この変形は直観主義算術では導出できないものの，弱い二重否定除去公理

$$\mathrm{M}^{\omega}: \neg\neg\exists x A_{qf}(x) \to \exists x A_{qf}(x)$$

だけを用いて実行可能なのである．

- こうして得られた冠頭標準形の論理式 (21) に対して選択公理 AC^{ω} を (繰り返し) 用いることにより $A \to B$ のダイアレクティカ解釈

$$\exists \underline{U},\underline{Y}\forall \underline{x},\underline{v}(A_D(\underline{x},\underline{Y}\,\underline{x}\,\underline{v}) \to B_D(\underline{U}\,\underline{x},\underline{v}))$$

が得られる．

注意.

- 上の変形の際に用いた直観主義有限型算術では導出できない 3 つの原理 $\mathrm{AC}^\omega, \mathrm{IP}^\omega_\forall, \mathrm{M}^\omega$ のダイアレクティカ解釈を考えると，実はそれらのウィットネス (ダイアレクティカ解釈の意味での構成情報) はどれも簡単に得られる (健全性定理の証明を参照) ことが分かる.
- それればかりでなく，既に見た通り，実はその 3 つの原理はダイアレクティカ解釈による変換をちょうど特徴付ける原理になっている.
- つまり，ダイアレクティカ解釈はある意味 *BHK* 解釈を拡張した構成性の定義であると見ることができる.

問.

- ダイアレクティカ解釈 (の健全性定理) によって抽出される構成情報とは何であるのか？
- 通常の BHK 解釈における構成情報とどう違うのか？

型付き実現可能性解釈

- 型付き実現可能性解釈 (modified realizability) はダイアレクティカ解釈研究の中で Krisel 1959, 1962 において導入された.
- 型付き実現可能性解釈はダイアレクティカ解釈と非常に良く似た性質を持っている. 実際, 型付き実現可能性解釈はある意味ダイアレクティカ解釈の変種であると見ることができる.
- 現代では型付き実現可能性解釈は BHK 解釈に基づいた計算概念であるクリーネの (HA に対する) 実現可能性解釈の延長として説明されることが多い. しかし, クリーネの実現可能性解釈におけるリアライザー (抽出される構成情報) は部分再帰的関数の自然数コードであるのに対し, 型付き実現可能性解釈のリアライザーは有限型算術の (汎) 関数であり, コード化に関する問題を含まない. この意味で, 型付き実現可能性解釈は BHK 解釈のおおよそ直接的な表現である.

定義.

$\mathcal{L}$(E-HA$^\omega$)-論理式 A の型付き実現可能性解釈 A^{mr} は $\exists \underline{x}\,(\underline{x} \text{ mr } A)$ という形をした $\mathcal{L}$(E-HA$^\omega$)-論理式 ($\underline{x}$ は空列の場合もある) であって以下のようにして帰納的に定義される:

- 原始論理式 A に対して, $A^{mr} :\equiv \exists \underline{x}\,(\underline{x} \text{ mr } A) :\equiv A$;

  $A^{mr} :\equiv \exists \underline{x}\,(\underline{x} \text{ mr } A)$, $B^{mr} :\equiv \exists \underline{u}\,(\underline{u} \text{ mr } B)$ とする. このとき,
- $(A \wedge B)^{mr} :\equiv \exists \underline{x}, \underline{u}\,(\underline{x}, \underline{u} \text{ mr } (A \wedge B))$
  $:\equiv \exists \underline{x}, \underline{u}\,(\underline{x} \text{ mr } A \wedge \underline{u} \text{ mr } B)$;
- $(A \vee B)^{mr} :\equiv \exists z^0, \underline{x}, \underline{y}(z, \underline{x}, \underline{y} \text{ mr } (A \vee B))$
  $:\equiv \exists z, \underline{x}, \underline{y}\,\left((z =_0 0 \to \underline{x} \text{ mr } A) \wedge (z \neq_0 0 \to \underline{y} \text{ mr } B)\right)$;
- $(A \to B)^{mr} :\equiv \exists \underline{y}\,(\underline{y} \text{ mr } (A \to B))$
  $:\equiv \exists \underline{y} \forall \underline{x}(\underline{x} \text{ mr } A \to \underline{y}\underline{x} \text{ mr } B)$;
- $(\forall z^\rho A(z))^{mr} :\equiv \exists \underline{x}\,(\underline{x} \text{ mr } \forall z A(z)) :\equiv \exists \underline{x} \forall z(\underline{x}\, z \text{ mr } A(z))$;
- $(\exists z^\rho A(z))^{mr} :\equiv \exists z, \underline{x}\,(z, \underline{x} \text{ mr } \exists z A(z)) :\equiv \exists z, \underline{x}\,(\underline{x} \text{ mr } A(z))$.

定義.

$\mathcal{L}(\text{E-HA}^\omega)$-論理式 A が $\exists, \vee$ を含まないとき，その論理式は無存在形 (∃-*free*) であるという.

注意.

- ダイアレクティカ解釈においては $\forall \underline{u}\, A_{qf}(\underline{u})$ という形をした論理式が重要な役目を果たしたが，型付き実現可能性解釈においては無存在形の論理式が同様の役目を果たす.
- 実際，任意の $\mathcal{L}(\text{E-HA}^\omega)$-論理式 A に対して，A^{mr} は無存在形の $\mathcal{L}(\text{E-HA}^\omega)$-論理式 A_{ef} を用いて $\exists \underline{x}\, A_{ef}(\underline{x})$ という形に表され，かつ A^{mr} は A と全く同じ自由変数を含むことが A の構成に関する帰納法によって示される.

命題.

任意の無存在形の $\mathcal{L}(\text{E-HA}^\omega)$-論理式 A_{ef} に対して，$(A_{ef})^{mr} \equiv A_{ef}$ である．

Proof. 無存在形の論理式 A_{ef} の構成に関する帰納法による． □

定理. (型付き実現可能性解釈の健全性定理)

$A(\underline{a})$ は自由変数として $\underline{a}$ のみを含む $\mathcal{L}(\text{E-HA}^\omega)$-論理式とする．このとき，$\text{E-HA}^\omega + \mathrm{AC} + \mathrm{IP}^\omega_{\mathrm{ef}} \vdash A(\underline{a})$ ならば，変数記号を含まない E-HA^ω の項 t が存在して $\text{E-HA}^\omega \vdash \underline{t}\,\underline{a}\ \mathrm{mr}\ A(\underline{a})$ である，ただし $A^{mr}(\underline{a}) \equiv \exists \underline{x}\,(\underline{x}\ \mathrm{mr}\ A(\underline{a}))$.

- $\mathrm{IP}^\rho_{\mathrm{ef}} : (A_{ef} \to \exists x^\rho B(x)) \to \exists x^\rho (A_{ef} \to B(x^\rho))$，ただし A_{ef} は無存在形 (すなわち A_{ef} は $\exists, \vee$ を含まない) であり，かつ x を自由変数として含まない．

Proof. ダイアレクティカ解釈の健全性証明と同様に，証明図の長さに関する帰納法によって示される． □

命題.

任意の $\mathcal{L}(\mathsf{WE\text{-}HA}^\omega)$-論理式 A に対して

$$\mathsf{E\text{-}HA}^\omega + \mathrm{AC} + \mathrm{IP}^\omega_{\mathrm{ef}} \vdash A \leftrightarrow A^{mr}.$$

Proof. 論理式 A の構成に関する帰納法によって示される. □

系. (型付き実現可能性解釈の特徴付け)

任意の $\mathcal{L}(\mathsf{E\text{-}HA}^\omega)$-論理式 A に対して,

$$\mathsf{E\text{-}HA}^\omega + \mathrm{AC} + \mathrm{IP}^\omega_{\mathrm{ef}} \vdash A \iff \mathsf{E\text{-}HA}^\omega \vdash A^{mr}.$$

Proof. $\Rightarrow$ は健全性定理から従い, $\Leftarrow$ は上の命題から従う. □

ダイアレクティカ解釈と型付き実現可能性解釈の構成情報の取り出し方の違い

- 先の定義では，型付き実現可能性解釈 A^{mr} を A の "構成情報" $\underline{x}$ が存在するという形 $(\exists \underline{x}\,(\underline{x}\ \mathrm{mr}\ A))$ で素直に定義した．
- 一方,A のダイアレクティカ解釈 $A^D :\equiv \exists \underline{x} \forall \underline{y}\, A_D(\underline{x}, \underline{y})$ における $\underline{x}$ もまた A の "構成情報" を取り出しているように見える．

⇒ 両者の間にはどのような関係があるのであろうか？

- ここでは，Oliva 2006 の発想に基づき，ダイアレクティカ解釈の定義における $A \to B$ の解釈のみを少し変形したダイアレクティカ解釈の変種を定義し，それが型付き実現可能性解釈と同値になることを示す．

定義.

$\mathcal{L}$(WE-HA$^\omega$)-論理式 A の解釈 A^R は $\exists \underline{x} \forall \underline{y} A_R(\underline{x}, \underline{y})$ という形をした $\mathcal{L}$(WE-HA$^\omega$)-論理式 ($\underline{x}, \underline{y}$ は空列の場合もある) であって以下のようにして帰納的に定義される:

- 原始論理式 A に対して, $A^R :\equiv A_R :\equiv A$;

  $A^R \equiv \exists \underline{x} \forall \underline{y} A_R(\underline{x}, \underline{y})$, $B^R :\equiv \exists \underline{u} \forall \underline{v} B_R(\underline{u}, \underline{v})$ とする. このとき,
- $(A \wedge B)^R :\equiv \exists \underline{x}, \underline{u} \forall \underline{y}, \underline{v}\, (A \wedge B)_R$ $:\equiv \exists \underline{x}, \underline{u} \forall \underline{y}, \underline{v} (A_R(\underline{x}, \underline{y}) \wedge B_R(\underline{u}, \underline{v}))$;
- $(A \vee B)^R :\equiv \exists z^0, \underline{x}, \underline{u} \forall \underline{y}, \underline{v}\, (A \vee B)_R$ $:\equiv \exists z^0, \underline{x}, \underline{u} \forall \underline{y}, \underline{v} \big((z = 0 \to A_R(\underline{x}, \underline{y})) \wedge (z \neq 0 \to B_R(\underline{u}, \underline{v})) \big)$;
- $(A \to B)^R :\equiv \exists \underline{U} \forall \underline{x}\, (A \to B)_R$ $:\equiv \exists \underline{U} \forall \underline{x} (\forall \underline{y}\, A_R(\underline{x}, \underline{y}) \to \forall \underline{v}\, B_R(\underline{U}\, \underline{x}, \underline{v}))$;
- $(\forall z^\rho A(z))^R :\equiv \exists \underline{X} \forall z, \underline{y}\, (\forall z A(z))_R :\equiv \exists \underline{X} \forall z, \underline{y} A_R(\underline{X}\, z, \underline{y}, z)$;
- $(\exists z^\rho A(z))^R :\equiv \exists z, \underline{x} \forall \underline{y}\, (\exists z A(z))_R :\equiv \exists z, \underline{x} \forall \underline{y} A_R(\underline{x}, \underline{y}, z)$.

注意.

任意の $\mathcal{L}(\text{WE-HA}^\omega)$-論理式 A に対して，A_R は無存在形の $\mathcal{L}(\text{WE-HA}^\omega)$-論理式であり，$A^R$ は A と全く同じ自由変数を含むことが A の構成に関する帰納法によって示される.

定理.

全ての $\mathcal{L}(\text{WE-HA}^\omega)$-論理式 C に対して，WE-HA^ω で以下が示せる:

$$\forall \underline{x} \left(\underline{x} \ \mathrm{mr} \ C \leftrightarrow \forall \underline{y} \, C_R(\underline{x}, \underline{y}) \right).$$

Proof. 論理式 C の構成に関する帰納法による. □

注意.

- 上の定理は A^R が実は A の型付き実現可能性解釈 A^{mr} の別表現であることを主張している.
- 一方,ダイアレクティカ解釈 A^D の定義と型付き実現可能性解釈 A^R の定義の違いは $A \to B$ の解釈の仕方のみである.
- 特に,上記の A^R の定義においては A の構成情報から B の構成情報を与える関数列 $\underline{U}$ を抽出しているのみなのに対し,ダイアレクティカ解釈の定義ではそれに加えてさらに関数列 $\underline{Y}$ をも抽出する.

$\Rightarrow$ A のダイアレクティカ解釈 A^D は A の型付き実現可能性解釈 A^R よりも多くの構成情報を抽出する構成性のある種の定義である.