周期：積分で表わされる数について

齋藤 政彦 (神戸大学・大学院理学研究科)

2008 年 8 月 5 日, 大阪私学教育文化会館

1 はじめに

今回の講演では, 周期という特別の複素数のクラスを扱いたいと思います. 主に M. コンツェビッチと D. ザギエの論説 [2] と最近の神戸大の吉永正彦のプレプリント [4] を参照しつつ, 数に関する新しい感覚と数学の広がりをお伝えできればと思います. [object Object] M. コンツェビッチと D. ザギエは [2] において, **周期 (Period)** という複素数のあるクラスを定義しました. 詳しくは後で述べますが, ある複素数 a の実部と虚部が, 有理数係数の有理式の, 有理数係数の多項式で定義された境界で囲まれるユークリッド空間 $\mathbf{R}^m$ 領域 D 上の積分で表わせる時に a は**周期 (Period)** と呼ばれます. a が有理数のとき,

$$a = \int_0^a dx, \quad \log(a) = \int_1^a \frac{1}{x} dx$$

なので, 有理数 a も, 有理数 a の対数 $\log(a)$ も周期です. (すなわち $\log 2, \log 3$ などは周期です).

$$\sqrt{2} = \int_{2x^2 \leq 1} 1dx, \quad \pi = \int_{x^2+y^2 \leq 1} 1dxdy = 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx$$

より, $\sqrt{2}$ も π も周期となります.

この周期の定義は, 古くから色々な数学の分野に現れていた周期の概念を, 数学的に明確にした定義になっています. 吉永はこの周期のある特徴付けを行いました.

実数は有理数の近似として定義されますが, その近似のされ方によって実数に違いがあるという事が知られています. その近似のされ方で**初等的実数**というクラスが定義されますが, 吉永は**周期が初等的実数である**という事実を証明しました.

周期全体を $\mathcal{P}$ と書くことにすると複素数体 $\mathbf{C}$ の部分集合 $\mathcal{P} \subset \mathbf{C}$ がどのような集合になっているかが問題です. 吉永は同時に $\mathcal{P}$ に属さない, すなわち周期でない具体的な実数を構成することに成功しました.

2　数の広がり

2.1　複素数まで

小学校から高等学校まで, 数は次の様に拡張されていきます.

- **自然数**

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

- **整数** 上記の自然数に 0 と負の数を加えて, **整数**を得ます.

$$\mathbf{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$$

- **有理数** 既約分数が加わって, **有理数**を得ます.

$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{N}, \mathrm{g.c.d}(p, q) = 1 \right\}$$

- **実数** 有理数の極限として, **実数** $\mathbf{R}$ を得ます. すなわち $a_n = \frac{p_n}{q_n} \in \mathbf{Q}$ を有理数列としてその極限として実数を捉えるわけです. 実数を 10 進展開した無限小数と捉える事もこの考え方です.

$$\sqrt{2} = 1.41421356237309504\,88\ldots$$

$$\pi = 3.14159265358979323846264338328\ldots$$

リュウビリ数 (Liouville's number):

$$\sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^6} + \frac{1}{10^{24}} + \frac{1}{10^{120}} + \cdots = 0.110001000000000000000001000000\ldots$$

- **複素数** 実数 $\mathbf{R}$ に, $i^2 = -1$ を満たす記号 i を形式的に加えて, 複素数を得ます.

$$\mathbf{C} = \{\ z = x + iy\ |x, y \in \mathbf{R}\}$$

2.2　代数的数と超越的数

有理数係数の 1 次方程式は $ax + b = 0, a, b \in \mathbf{Q}, a \neq 0$ は, 有理数の範囲で解 $x = -\frac{b}{a}$ を持ちます.

一方, 有理数を係数にもつ 2 次方程式の $ax^2 + bx + c = 0\ a, b, c \in \mathbf{Q}, a \neq 0$ の解の公式より, 解は

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

で与えられますが, 一般に $\sqrt{b^2-4ac}$ は有理数でないために, 係数が有理数の 2 次方程式でもそれを解くためには有理数 $\mathbf{Q}$ に有理数の平方根 $\sqrt{2},\sqrt{3},\cdots$ などを付け加えていく事が必要になります. ($x^2+6x+2=0$ の解は $x=-3\pm\sqrt{7}$, $x^2-x+1=0 \Longrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$ など).

ガウスの代数学の基本定理より, 有理係数の n 次方程式

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots a_1x+a_0=0, \quad a_i\in\mathbf{Q}, a_n\neq 0 \tag{1}$$

は, 複素数の範囲で必ず n 個の解 $x=\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ をもちます.

定義 1. 有理数係数の n 次方程式の解となる複素数 α を, **有理数体 $\mathbf{Q}$ 上代数的な数**または**代数的数**と呼ばれる. 代数的数全体を

$$\overline{\mathbf{Q}}=\{\alpha\in\mathbf{C}\mid\alpha\text{ 代数的数 }\}$$

とおきます.

例 1. $\sqrt{2}\notin\mathbf{Q}$ がよく知られていますが, $\alpha=\sqrt{2}$ は $x^2-2=0$ の解なので, $\sqrt{2}\in\overline{\mathbf{Q}}$, $x=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ は, $x^4-10x^2+1=0$ の解なので代数的数です.

有理数全体 $\mathbf{Q}$ が四則演算について閉じている事はよく知られています. しかし代数的数全体の集合 $\overline{\mathbf{Q}}$ についても, 次の定理が知られています.

定理 1. *$\overline{\mathbf{Q}}$ は四則演算について閉じている. 代数的にいうと, $\overline{\mathbf{Q}}$ が体である, すなわち, 次が成立する.*

- $\alpha,\beta\in\overline{\mathbf{Q}} \Longrightarrow \alpha\pm\beta\in\overline{\mathbf{Q}}$
- $\alpha,\beta\in\overline{\mathbf{Q}} \Longrightarrow \alpha\beta\in\overline{\mathbf{Q}}$
- $\alpha\in\overline{\mathbf{Q}},\alpha\neq 0 \Longrightarrow \frac{1}{\alpha}\in\overline{\mathbf{Q}}$.

集合の濃度という概念があります. 集合に含まれている元の個数の事です. 有限個の元からなる集合ならば, その個数が濃度ですが, 無限集合になると濃度の概念は少しややこしくなります. ある集合 S に対して, 自然数の集合 $\mathbf{N}$ から S への全射 1 対 1 写像 $f:\mathbf{N}\longrightarrow S$ が存在するとき, S の濃度は加算無限であるといい, S を加算無限集合と言います. 次の定理が知られています.

定理 2.
- *数の集合 $\mathbf{Z},\mathbf{Q},\overline{\mathbf{Q}}$ は加算無限集合である.*
- *$\mathbf{R}$ や $\mathbf{C}$ の濃度は加算無限より真に大きい. (Cantor(1874)).*

定義 2. $\mathbf{R},\mathbf{C}$ の数で代数的でない数を超越数という. (すなわち $\alpha\in\mathbf{C}\setminus\overline{\mathbf{Q}}$ なるとき, α を超越数という).

$\overline{\mathbf{Q}} \subset \mathbf{C}$ ですが, $\mathbf{C}$ は連続無限個の数を含み, $\overline{\mathbf{Q}}$ は加算無限個の元しか含まないことから, 次の系が得られます.

系 1. *超越的数 α は, 連続無限個存在する.*

今まで出てきた数のクラスをまとめると次のようになります.

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{N} & \subset & \mathbf{Z} & \subset & \mathbf{Q} & \subset & \overline{\mathbf{Q}} \\ & & & & \cap & & \cap \\ & & & & \mathbf{R} & \subset & \mathbf{C} \end{array}$$

具体的な数の超越性を示すのは結構難しいことです.

定理 3.
- *Liouville 数 $\sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!}$ は超越数である（Liouville (1844)).*
- *e は超越数である (Hermite (1873)).*
- *π は超越数である (Lindeman (1882)).*

3 周期と呼ばれる数

さて, [2] にしたがって, 新しい数のクラスとして周期 (Period) を定義しましょう.

定義 3. ある複素数が**周期 (Period)** であるとは, その実部と虚部が, 有理数係数の多項式の不等式で与えられる $\mathbf{R}^m$ 内の領域上での有理数係数有理関数の絶対収束積分の値になっていることである. 周期全体を $\mathcal{P}$ と書く.

周期の例をいくつかあげてみます.

- a が有理数のとき,
$$a = \int_0^a dx, \quad \log(a) = \int_1^a \frac{1}{x} dx$$
より, 有理数 a, 有理数の対数 $\log(a)$ は周期です. $\mathbf{Q} \subset \mathcal{P}, \log(\mathbf{Q}) \subset \mathcal{P}$ です.

- n を整数とするとき,
$$\sqrt{n} = \int_{x^2 \le n} \frac{1}{2} dx$$
より, $\sqrt{n} \in \mathcal{P}$ です. 一般に, α が代数的数であれば α は周期である事が示されます. すなわち $\overline{\mathbf{Q}} \subset \mathcal{P}$ が示されます.

- 円周率 π は
$$\pi = \int_{x^2+y^2 \le 1} dxdy = 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$
と表せるので, **π は周期です**. $\pi \in \mathcal{P}$ となり $\pi \notin \overline{\mathbf{Q}}$ なので $\pi \in \mathcal{P} \setminus \overline{\mathbf{Q}}$ です.

- $$\int_0^a x dx = \frac{a^2}{2}$$

  ここで, $a \notin \mathbf{Q}$ ならば, 積分区間 $[0, a]$ は, 有理数係数の多項式で定義された境界は持ちません. よってこの事から $\frac{a^2}{2}$ が周期であるという主張はできません. しかし 一方, $a = \sqrt{\pi}$ と置けば, $a \notin \mathbf{Q}$ であるが $\frac{a^2}{2} = \frac{\pi}{2} \in \mathcal{P}$ ですので, ある実数が周期であるかどうかを判定するのはなかなか難しい事です.

一般的な事実として定義より, $\mathcal{P}$ は和と差と積について閉じている事は示されます. すなわち

$$\boxed{\mathcal{P}\text{ は, 環をなしている}}$$

事が言えます.

一方いろいろな数を積分で現す方法があります. たとえば, リーマンのゼータ関数を考えましょう.

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \cdots$$

この s に正の偶数を入れた特殊値 $\zeta(2k)$ は, オイラーにより

$$\zeta(2) = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6},$$

$$\zeta(4) = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{90},$$

と求められています.

一方, リーマンのゼータ関数の奇数で値 $\zeta(2k+1)$ についてはあまり知られていません. たとえば,

$$\zeta(3) = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \cdots = 1.202056903159\ldots$$

$\zeta(3)$ については, 1986 年にアペリにより無理数であることが示されました. 一方

$$\zeta(3) = \int_{0 \le x \le y \le z \le 1} \frac{dxdydz}{(1-x)yz}.$$

という事が知られているので, $\zeta(3)$ は周期です. 一般に $s = k$ 整数に対して

$$\zeta(k) \in \mathcal{P}$$

が示されます.

3.1　積分を使ったバーゼル問題の証明

ここで, オイラーがバーゼル問題の解決で示した $\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$ のカラビによる積分を使った割合簡単な証明を紹介しましょう. 次の幾何級数の公式を考えます.

$$\frac{1}{1-x^2y^2}=\sum_{k=0}^{\infty}x^{2k}y^{2k}=1+x^2y^2+x^4y^4+\cdots+x^{2k}y^{2k}+\cdots$$

この両辺を $S=[0,1]\times[0,1]$ で積分すると,

$$\int\int_S x^{2k}y^{2k}dxdy=(\int_0^1 x^{2k}dx)(\int_0^1 y^{2k}dy)=\frac{1}{(2k+1)^2}$$

より

$$\int\int_S \frac{1}{1-x^2y^2}dxdy=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots$$

となります. この左辺は

$$\zeta(2)-\frac{\zeta(2)}{2^2}=\frac{3}{4}\zeta(2)$$

となります. $\zeta(2)=\frac{4}{3}\int\int_S\frac{1}{1-x^2y^2}dxdy$ で, $\zeta(2)$ が周期である事がわかります. ここで, 右辺の積分を次の変数変換で積分を書き換えてみます. (ここをなぜ思いつくのかが不思議です).

$$x=\frac{\sin(u)}{\cos(v)},\quad y=\frac{\sin(v)}{\cos(u)} \tag{2}$$

この Jacobi 行列式を計算すると

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{\cos(u)}{\cos(v)} & \frac{\sin(u)\sin(v)}{\cos^2(v)}\\ \frac{\sin(v)\sin(u)}{\cos^2(u)} & \frac{\cos(v)}{\cos(u)}\end{vmatrix}=1-\frac{\sin(u)^2\sin^2(v)}{\cos^2(v)\cos^2(u)}=1-x^2y^2$$

よって積分の変数変換の公式から,

$$\int\int_S\frac{1}{1-x^2y^2}dxdy=\int\int_T dudv$$

ただし, $T=\{(u,v)|u>0,v>0,u+v<\pi/2\}$. この面積は $\pi^2/8$ であるから,

$$\zeta(2)=\frac{4}{3}\times\frac{\pi^2}{8}=\frac{\pi^2}{6}.$$

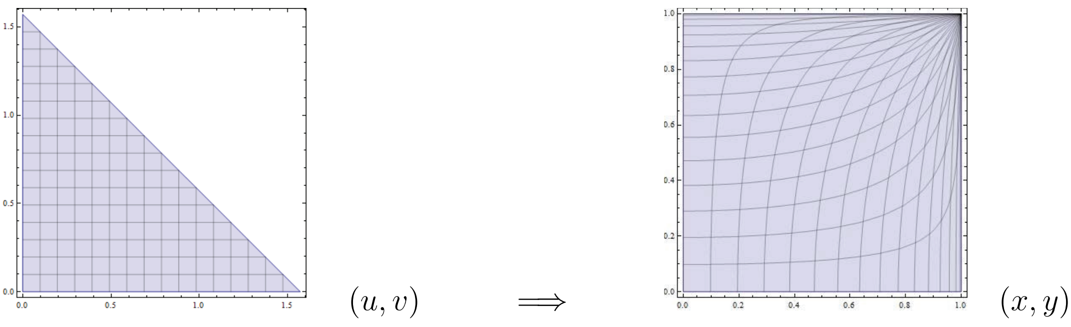

図 1: 変数変換の様子

4　初等的数と吉永正彦の定理

4.1　周期を実数として特徴付ける

周期という数のクラスを考える事により,

$$\mathbf{Q} \subset \overline{\mathbf{Q}} \subset \mathcal{P} \subset \mathbf{C}$$

となる周期の集合 $\mathcal{P}$ を定義しました. $\pi \in \mathcal{P}$ であるので $\mathcal{P}$ は代数的数にいくつかの超越数を付け加えた集合になっているはずです.

次の定理から, カントールが示したように, 周期全体の集合 $\mathcal{P}$ の濃度を考えて, 周期でないものの存在がわかります.

定理 4. $\mathcal{P}$ は加算無限個の数からなる.

よって, 周期でない複素数 $\mathbf{C} \setminus \mathcal{P}$ および実数が存在する事はただちにわかります. しかし, 具体的な実数を持ってきてそれが周期であるかどうか判定するのは難しい事であることは理解していただけると思います. 実際, [2] においても次の問題が提示されています.

問 1. $\boxed{\text{周期でない, 具体的な数を一つあげよ.}}$

この問に関しては,

$$\boxed{e \notin \mathcal{P}, \text{ すなわち } e \text{ は周期でない}}$$

と予想されていますが, 証明はまだないようです.

上の問いに答えるためには, 周期の複素数としのて特徴付けが必要となってきます. その問題にひとつの解答を与えた最近の吉永正彦の定理を紹介します.

4.2 初等的実数と吉永の定理

$\mathbf{Z}_{\geq 0} = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$ を非負整数全体とし,

$$f : \mathbf{Z}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbf{Z}_{\geq 0}$$

なる関数全体の中に, **初等的関数**というある種の関数のクラスを定める事ができます. この定義は少々ややこしいのでここでは省略しますが, $f(x) \equiv 0$, $f(x) = x + 1$ などの関数は初等的関数で足し算, 引き算, 積などから導かれる関数をすべて含むような自然な関数のクラスです.

定義 4. 実数 $\alpha \in \mathbf{R}$ が初等的実数であるとは, ある初等的関数 $a(x), b(x), c(x)$ が存在して, 任意の自然数 $k \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ に対して

$$\left| \frac{a(x)}{b(x)+1} - \alpha \right| < \frac{1}{k}, \forall x \geq c(k)$$

が成り立つ事である.

吉永は次の定理を示しました.

定理 5. *([4]).* 実数の周期は, 初等的実数である.

初等的実数でないものの具体的構成や, 証明の概略は講演のときにお話したいと思います.

参考文献

[1] Euler, Leonhard, Introductio in Analysin Infintorum, 日本語訳 : 無限小解析入門, (オイラーの無限解析, オイラーの解析幾何), 高瀬正仁訳，海鳴社.

[2] M. コンツェビッチ, D. ザギエ, 数学の最先端 21 世紀への挑戦 〈volume 1〉 (単行本) 74–125.

[3] Ian Stewart, Galois Theory, Chapman and Hall.

[4] M. Yoshinaga, Periods and elementary numbers, preprint 2008, Math:arXiv:0805.0349.