トーラス係数の Milnor K 群と Birch-Tate 予想

山崎 隆雄 （東北大学）

1　概要

Birch-Tate 予想は、総実代数体の K_2 群と Dedekind ゼータ関数の -1 での値の関係を記述する。この関係を「トーラス係数」つきの関係式に一般化する。ここで、K_2 は染川氏によって導入された半アーベル多様体（今の場合はトーラス）を係数に持つ Milnor K 群に置き換えられ、Dedekind ゼータ関数はトーラスの余指標群の Artin L 関数に置き換えられる。Birch-Tate 予想は 2-冪部分を除き証明されている。トーラス係数の予想は、係数のトーラスが meta-cyclic 拡大で分裂するという仮定の下で 2-冪部分を除き証明できる。

　第二節で Birch-Tate 予想を復習する。第三節ではトーラス係数の予想を定式化し、主結果を述べる。第四節と第五節で証明について説明する。第六節では関連する話題について述べる。

2　Birch-Tate 予想

体 F に対し、その分離閉包 $\bar{F}$ を固定して、$G_F = \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$、$\mu_n = \{\zeta \in \bar{F}^* \mid \zeta^n = 1\}$ とおく。（ここで n は F で可逆な自然数。）さらに、

$$W_2(F) = [\bigcup_n \mu_n \otimes \mu_n]^{G_F} = H^0(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$$

と書く。ここで $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2) = \cup_n \mu_n \otimes \mu_n$ である。（n は F で可逆な自然数を走る。）$F = K$ が代数体のときは、$W_2(K)$ は有限群である。ネーター環 R に対して Quillen の K_2 群を $K_2(R)$ と書く。我々にとって必要なのは $R = O_K$ が代数体 K の整数環の場合である。この場合には $K_2(O_K)$ はずっと具体的に記述できることを、下の注意 2.4 で復習する。また、その場合は $K_2(O_K)$ が有限であることも知られている（Garland [2]）。以上の準備のもとで Birch-Tate 予想を述べる：

予想 2.1. ([14]) K を（有限次）総実代数体、O_K を K の整数環、$\zeta_K(s)$ を K の Dedekind ゼータ関数とするとき、次の等式が成り立つであろう：

$$\zeta_K(-1) = \pm\frac{|K_2(O_K)|}{|W_2(K)|}.$$

例 2.2. $K = \mathbb{Q}$ のとき、$\zeta_K(s)$ は Riemann ゼータ関数なので $\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$ である。他方、$W_2(\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/24\mathbb{Z}, K_2(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ である。（$K_2(\mathbb{Z})$ の非自明な元は $\{-1,-1\}$ であたえられる。）この場合には予想が成立していることが分かる。

予想 2.1 は現在では（ほとんど）定理である。歴史を述べると、

- １９７０年ごろ、正標数の大域体に対する類似の等式が証明された [14, 15]。（はじめに 2-冪部分を Birch と Tate が共同で、後になって Tate が一般に証明した。）これが予想の根拠となった結果である。

- Wiles は１９９０年の論文で予想 2.1 を 2-冪部分を除き証明した [18]。（すなわち、両辺の比が 2 の冪であることを示した。）これは岩澤主予想の帰結である。K がアーベル体の場合は 2-冪部分も成り立つ。

注意 2.3. K を（総実とは限らない）代数体として、その複素素点の数を r_2 とする。このとき、$\zeta_K(s)$ は $s = -1$ で r_2 位の零点を持つ。このときには、$\zeta_K(s)$ の $s = -1$ におけるテイラー展開のはじめの係数を記述する予想が定式化されている（Quillen-Lichtenbaum 予想 [4]）。この定式化には K_3 群と regulator の概念が必要となる。

注意 2.4. 代数体の整数環 O_K に対して $K_2(O_K)$ の具体的な記述をあたえよう。まず、一般に体 F に対しては

$$K_2(F) = [F^* \otimes_{\mathbb{Z}} F^*]/ < a \otimes (1-a) \mid a \in F^* \setminus \{1\} >$$

となる。なお、$a, b \in F^*$ のとき、$a \otimes b$ の $K_2(F)$ での類を $\{a, b\}$ と書く。次に、F の離散付値 v とその剰余体 $\mathbb{F}_v$ に対して tame symbol と呼ばれる写像 $\partial_v : K_2(F) \to \mathbb{F}_v^*$ がある。$F = K$ が代数体、v がその有限素点の場合は、この写像は（符号を除いて）次の合成と一致する：

$$K_2(K) \to K_2(K_v) \to \mu_n \cong \mathbb{F}_v^*$$

ここで K_v は完備化を表す。はじめの写像は包含写像 $K \subset K_v$ の導く自然な写像。$n = |\mathbb{F}_v^*|$ であり、最後の同型は $\mu_n \subset O_{K_v}^* \twoheadrightarrow \mathbb{F}_v^*$ の合成である。真ん中の写像は局所類体論の Hilbert symbol である。すなわち、局所類体論の相互写像を $\rho_{K_v} : K_v^* \to G_{K_v}^{ab}$ とするとき $\{a, b\} \mapsto (\rho_{K_v}(b)(\sqrt[n]{a}))/(\sqrt[n]{a})$ と特徴づけられる。以上の準備のもとで、$K_2(O_K)$ は次のように記述できる：

$$K_2(O_K) = \bigcap_{v:\text{有限素点}} \ker[\partial_v : K_2(K) \to \mathbb{F}_v^*].$$

3　トーラス係数の Birch-Tate 予想

F を体、T を F 上のトーラスとする。すなわち、T は F 上の代数群で、ある有限次ガロア拡大 E/F で係数拡大すると乗法群 $\mathbb{G}_m$ の直和と同型となる：$T \otimes_F E \cong \mathbb{G}_m^d$.（このとき T は E で分裂するという。）F で可逆な自然数 n に対し $T[n] = \{x \in T(\bar{F}) \mid x^n = 1\}$ とおく。さらに

$$W_2^T(F) = [\bigcup_n T[n] \otimes \mu_n]^{G_F} = H^0(F, T_{\mathrm{tor}}(1)), \qquad T_{\mathrm{tor}} = \cup_n T[n]$$

と書く。（n は F で可逆な自然数を走る。）$T = \mathbb{G}_m$ の場合、$W_2^{\mathbb{G}_m}(F) = W_2(F)$ となる。$F = K$ が代数体の場合、$W_2^T(K)$ は有限群である。

下の定義 3.6 で、T を係数とした F の Milnor K-群 $K_2^T(F)$ を定義する。さらに $F = K$ が代数体の場合、T に対する適当な仮定の下で、その部分群 $K_2^T(O_K)$ も定義する。これら定義は後回にして、ここでは $T = \mathbb{G}_m$ のときは「適当な仮定」が満たされており、$K_2^{\mathbb{G}_m}(F) = K_2(F),\ K_2^{\mathbb{G}_m}(O_K) = K_2(O_K)$ が成り立つことだけ注意しておく。

$X = \mathrm{Hom}_{\bar{F}}(\mathbb{G}_m, T)$ を T の余指標群とする。このとき、$X \cong \mathbb{Z}^d$ であり、G_F が有限商 $\mathrm{Gal}(E/F)$ を経由して X に作用する。従って $X_{\mathbb{C}} = X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ はガロア群 G_F の（像が有限な）有限次元表現（Artin 表現）を与える。$T = \mathbb{G}_m$ の場合は $X = \mathbb{Z}$ で G_F の作用は自明である。

予想 3.1. K を代数体、T を K 上のトーラスとする。このとき、 $K_2^T(O_K)$ は有限であろう。さらに T が総実な代数体 L/K で分裂するならば、次の等式が成り立つであろう：

$$L_K(-1, X_{\mathbb{C}}) = \pm \frac{|K_2^T(O_K)|}{|W_2^T(K)|}.$$

ここで $L_K(s, X_{\mathbb{C}})$ は表現 $X_{\mathbb{C}}$ の Artin L-関数である。

例 3.2. T が $\mathbb{G}_m$ の場合、すでに述べたとおり $W_2^T(K) = W_2(K)$ と $K_2^{\mathbb{G}_m}(O_K) = K_2(O_K)$ が成り立つ。また、このとき $X_{\mathbb{C}}$ は単位表現であるから Artin L 関数 $L_K(s, X_{\mathbb{C}})$ は Dedekind ゼータ関数 $\zeta_K(s)$ に一致する。したがって、この場合の予想 3.1 はもとの Birch-Tate 予想 2.1 に一致する。

注意 3.3. 分裂体 L が総実であるという仮定は $L_K(s, X_{\mathbb{C}})$ が $s = -1$ で（正則かつ）零でないことを導く。この仮定を設けずに $L_K(s, X_{\mathbb{C}})$ の $s = -1$ におけるテイラー展開のはじめの係数を記述する予想を定式化するには、トーラス係数の K_3 群とその上の regulator の導入が必要となる。

有限群は、その全ての Sylow 部分群が巡回群のときに meta-cyclic と呼ばれる。有限次ガロア拡大で、ガロア群が meta-cyclic なものを meta-cyclic 拡大と呼ぶ。次の定理が主結果である：

定理 3.4. T を総実代数体 K 上のトーラスとする。T が総実な *meta-cyclic* 拡大 L/K で分裂するならば、T に対する予想 *3.1* は 2-冪部分を除き成立する。

注意 3.5. (1) 正標数の大域体に対する類似も成立する。

(2) $K_2^T(O_K)$ が定義されるための「適当な仮定」は、定理の仮定の下では（当然ながら）満たされる。

(3) 定理を含め、以下さまざまなところで「T が meta-cyclic 拡大で分裂する」という仮定を設けるが、これはひとえに後述の定理 4.1 を利用するための技術的な仮定である。（つまり、この仮定の下では証明できたというだけのことであって、仮定を外したら成り立たない例があるという訳ではない。この仮定を使わずに定理 4.1 が証明できれば、主結果である定理 3.4 からもこの仮定を外すことができる。その証明を試みているのだが、なかなかできなくて困っている。）

定義 3.6. トーラス係数の Milnor K-群の定義を述べる。まず、F を体、T を F 上のトーラスとして $K_2^T(F)$ を定義する。それには染川氏の定義 [10] を利用する。そこでは半アーベル多様体 $G_1, \dots, G_r$ を係数にもつ Milnor K-群 $K(F; G_1, \dots, G_r)$ が定義されているが、それを利用して

$$K_2^T(F) := K(F; T, \mathbb{G}_m)$$

と定める。いまの場合に限定して [10] の定義を書き下すと

$$K_2^T(F) = \bigoplus_E T(E) \otimes E^* / < \text{関係式} >$$

となる。ここで E は F の有限次拡大すべてを走る。関係式は、projection formula と Weil 相互律に起因するものであるが、その正確な記述はここでは省略する。$a \in T(E), b \in E^*$ のとき、$a \otimes b$ の $K_2^T(F)$ における類を $\{a, b\}_{E/F}$ と書く。

例 3.7. (1) $T = \mathbb{G}_m$ の場合、上の「関係式」は前節であたえた「$a \otimes (1-a)$ が生成するもの」という具体的な記述とはぜんぜん違うものになっているが、標準的な同型 $K_2(F) \cong K_2^{\mathbb{G}_m}(F)$ が存在することが [10] で証明されている。対応は $\{a, b\} \mapsto \{a, b\}_{F/F}$ である。（逆の対応は $\{a, b\}_{E/F} \mapsto N_{E/F}(\{a, b\})$ である。ここで E/F は有限次拡大、$a, b \in E^*$、$N_{E/F} : K_2(E) \to K_2(F)$ はノルム写像。）

(2) E/F を巡回拡大、$T = \ker[N_{E/F} : \mathrm{Res}_{E/F}\,\mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m]$ をノルム 1 トーラスとする。このとき、同型写像

$$K_2^T(F) \cong \mathrm{coker}[K_2(F) \to K_2(E)]$$

が存在する。（ただし、同型は標準的ではなく、ガロア群の生成元の選択に依存する。）

定義 3.6 のつづき. $F = K$ を代数体とする。K の各有限素点 v に対して次のいずれかが成り立つことを仮定する：

(1) T は v で good reduction を持つ。（これは惰性群が X に自明に作用することと同値である。）

(2) T の係数拡大 $T \otimes_K K_v$ は meta-cyclic 拡大で分裂する。

このとき、以下で述べるように $K_2^T(F)$ 上の（適当な群に値を持つ）準同型写像 ∂_v^T が定義できる。その上で、トーラス T を係数とする環 O_K の K_2-群を

$$K_2^T(O_K) = \bigcap_v \ker(\partial_v^T)$$

と定める。

(1) T が v で good reduction を持つときは、写像 ∂_v^T を次の写像の合成として定義できる：

$$K_2^T(K) \to K_2^T(K_v) \to T[n] \cong T_v(\mathbb{F}_v).$$

ここで、はじめの写像は包含 $K \subset K_v$ の導く自然な写像。T_v は、トーラス T の還元で、剰余体 $\mathbb{F}_v$ 上のトーラスとなる。n はその有理点の群 $T_v(\mathbb{F}_v)$ の位数であり、最後の同型は還元写像が導くもの。真ん中の写像は局所類体論の Hilbert symbol をまねして、$\{a, b\}_{K_v/K_v} \mapsto (\rho_{K_v}(b)(\sqrt[n]{a}))/(\sqrt[n]{a})$ が任意の $a \in T(K_v), b \in K_v^*$ に対して成り立つように定める。(正確な特徴付けは、ここで述べた条件に加えてノルム写像との可換性を要請することよりあたえられる。) $\mathbb{G}_m$ はすべての素点で good reduction を持ち、同型 $K_2(K) \cong K_2^{\mathbb{G}_m}(K)$ のもとで ∂_v と $\partial_v^{\mathbb{G}_m}$ は同一視できる。

(2) T の係数拡大 $T \otimes_K K_v$ が meta-cyclic 拡大で分裂するときは、写像 ∂_v^T を次の写像の合成として定義することができる：

$$K_2^T(K) \to \bigoplus_p K_2^T(K_v)[p^\infty] \to \bigoplus_p H^1(K_v, M_p) \to \bigoplus_p H_v^2(O_{K_v}, M_p).$$

ここで p は v の剰余標数と異なる素数を走り、

$$M_p = \bigcup_n (T[p^n] \otimes \mu_{p^n}) = X \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(2) \tag{3.1}$$

および $K_2^T(K_v)[p^\infty] = \cup_n K_2^T(K_v)[p^n]$ という記号を用いた。はじめの写像は包含写像 $K \subset K_v$ の導く自然な写像である。($K_2^T(K)$ はねじれ群である。なお、v の剰余標数の冪位数の $K_2^T(K)$ の元はゼロへ移す。) 最後の写像は localization sequence の境界写像である。真ん中の写像は、仮定 (2) によって後述の系 4.5 から得られる写像である。

注意 3.8. (1) T が v で good reduction を持つときは $\oplus_p H_v^2(O_{K_v}, M_p)$ は $T_v(\mathbb{F}_v)$ と同型であり、∂_v^T の二つの定義は両立する。

(2) 定理 4.1（または系 4.5 ）を「T が meta-cyclic 拡大で分裂する」という仮定をせずに証明できれば、上で述べた ∂_v^T の二つ目の構成は仮定 (2) がなくても有効となる。

4　証明について

証明は二つの部分に分けられる：

$$(A) \qquad L_K(-1, X_{\mathbb{C}}) = \pm \prod_p \frac{|H^1(O_K[\frac{1}{p}], M_p)|}{|H^0(O_K[\frac{1}{p}], M_p)|}.$$

$$(B) \qquad H^1(O_K[\frac{1}{p}], M_p) \cong K_2^T(O_K)[p^\infty].$$

ここで p は素数を走る。(M_p は (3.1) で導入した群である。) なお、定義から $H^0(O_K[\frac{1}{p}], M_p) \cong W_2^T(K)[p^\infty]$ は容易に分かる。

4.1　等式 (A) の証明.

ここは容易に Wiles の定理に帰着させられる。meta-cyclic という仮定も不要である。証明の方針は以下の通り：

- Wiles の定理 [18] により $T = \mathbb{G}_m$ の場合は成立。
- L/K を有限次拡大として、T が Weil restriction $\mathrm{Res}_{L/K}\,\mathbb{G}_m$ の場合は上に帰着できる。
- 任意のトーラス T に対して、次の形の isogeny が存在する [9]：

$$\bigoplus_i \mathrm{Res}_{L_i/K}\,\mathbb{G}_m^{m_i} \oplus T^m \longrightarrow \bigoplus_j \mathrm{Res}_{L_j/K}\,\mathbb{G}_m^{m_j}.$$

  ここで L_i, L_j は L/K の中間体、$m \in \mathbb{Z}_{>0},\ m_i,\ m_j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

- T の isogeny 類は $X_{\mathbb{C}}$ で決まる。従って、$L_K(s, X_{\mathbb{C}})$ も T の isogeny 類のみで決まる。そこで $|H^1|/|H^0|$ が isogeny で不変なことを示せば証明が完了する。これは isogeny の核に現れる有限群の Euler 標数を計算することでなされる。(ここで L が総実であるという仮定を使う。)

4.2　同型 (B) の構成.

こちらは簡単には乗法群の場合に帰着させられない。主要な段階は次にある：

定理 4.1. F を体、T を F 上のトーラスとする。T が *meta-cyclic* 拡大で分裂するならば、次の自然な同型がある：

$$K_2^T(F) \cong H^2(F, X \otimes \mathbb{Z}(2)).$$

ここで、X は T の余指標群、$\mathbb{Z}(2)$ は「重さ 2 のエタール・モチビック複体」である。(ここでは *Lichtenbaum* が *[5]* で構成したものとする。)

この定理の証明は技術的であり、また定理自体も最善のものとは限らない。特に「T は meta-cyclic 拡大で分裂する」という仮定は、ある理論（トーラスの flasque resolution）を利用するために設けたに技術的なものにすぎず、不要なのかもしれない。そういう訳なので、証明についてはむしろ述べない方がいいのかもしれないが、次の節でもう少し説明する。

注意 4.2. $T = \mathbb{G}_m$ の場合、同型 $K_2^{\mathbb{G}_m}(F) \cong K_2(F)$ に注意すれば、定理 4.1 は $\mathbb{Z}(2)$ の基本性質のひとつである $K_2(F) \cong H^2(F, \mathbb{Z}(2))$ を意味する。

$\mathbb{Z}(2)$ の性質からただちに、完全三角形

$$X \otimes \mathbb{Z}(2) \xrightarrow{n} X \otimes \mathbb{Z}(2) \to T[n] \otimes \mu_n \to X \otimes \mathbb{Z}(2)[1]$$

の存在が分かる。（同型 $X \otimes \mu_n^{\otimes 2} \cong T[n] \otimes \mu_n$ に注意。）これと定理 4.1 から次の定理 4.3 が従う：

定理 4.3. T を体 F 上のトーラスで *meta-cyclic* 拡大で分裂するものとする。n が F で可逆な自然数ならば *'Galois symbol'*

$$K_2^T(F)/n \to H^2(F, T[n] \otimes \mu_n)$$

は単射である。

注意 4.4. (1) $T = \mathbb{G}_m$ の場合、$K_2^T(F) = K_2(F)$ の同一視のもとで上の Galois symbol は通常の（Tate の）それと一致する。従って、この場合は Merkurjev-Suslin の定理 [7] によってこの写像は同型である。（一般の T に対しては全射とは限らない。）
(2) $T = \mathbb{G}_m$ で F が大域体の場合、Merkurjev-Suslin よりもずっと前に Tate はこの同型を証明していた [15]。これは正標数の大域体に対し Birch-Tate 予想 2.1 の類似が証明されたときの鍵であった。
(3) 等式 (B) は、定理 4.3（あるいはより精密な定理 4.1）から証明される。これは上の注意 (2) の類似と思える。
(4) 「重さ 2 の Hilbert 90」によって $H^3(F, \mathbb{Z}(2)) = 0$ が成り立つ。しかし、一般の T に対しては $H^3(F, X \otimes \mathbb{Z}(2))$ は非自明な群となりうる。これが $T = \mathbb{G}_m$ のときは Galois symbol が全射なのに一般の T に対してはそうならない理由である。

系 4.5. F を $\mathbb{Q}_l$ の有限次拡大、p を l と異なる素数とする。T が *meta-cyclic* 拡大で分裂する F 上のトーラスならば、自然な同型

$$K_2^T(F)[p^\infty] \cong H^1(F, M_p)$$

が存在する。ここで M_p は (3.1) で導入された群である。

これは、$K_2^T(F)$ がねじれのない可除群と有限群の直和であること、$H^1(F, M_p)$ が可除部分群を持たないこと、および定理 4.3 から分かる。

5 Voevodsky の圏

定理 4.1 は Colliot-Thélène, Sanscu [1] によるトーラスの flasque resolution の理論を用いて直接示すことができる。しかし、ここでは少し概念的な証明を説明する。

F を体とする。この節では [6, 16] の記号を用いる。特に、$DM^{eff,-}_{Nis}(F)$ と $DM^{eff,-}_{et}(F)$ は Voevodsky が [16] で構成したテンソル三角圏とする。両者の間には「位相の取り替え」の関手 $\pi^* : DM^{eff,-}_{Nis}(F) \to DM^{eff,-}_{et}(F)$ と、その右随伴関手 $R\pi_* : DM^{eff,-}_{et}(F) \to DM^{eff,-}_{Nis}(F)$ が存在する。

G, H を F 上の半アーベル多様体とする。これらは homotopy invariant な Nisnevich sheaf with transfer を定めるので、次数 0 のみに項を持つ複体として $DM^{eff,-}_{Nis}(F)$ の対象と見なせる。（これは多様体 G に付随するモチーフ $M(G)$ とは異なることに注意。）テンソル積は右完全なので、$G \otimes H$ は次数 ≤ 0 に集中する。（テンソル積の基本性質から $M(G \times H) = M(G) \otimes M(H)$ が成り立つが、これと $G \otimes H$ は全く一致しないことに注意。）従って、随伴写像 $G \otimes H \to R\pi_*\pi^*(G \otimes H)$ は $G \otimes H \to t_{\leq 0} R\pi_*\pi^*(T \otimes \mathbb{G}_m)$ を経由する。

T が F 上のトーラスのとき、$\pi^*(T \otimes \mathbb{G}_m)$（を etale 層の導来圏に制限したもの）は $X \otimes \mathbb{Z}(2)$（こちらのテンソルは etale 層の導来圏での普通のテンソル）と同型である。このことに注意すれば、定理 4.1 は、次の二つの命題から従う。

命題 5.1. 定理 *4.1* と同じ仮定の下で、次の同型が存在する：

$$K_2^T(F) \cong \mathrm{Hom}_{DM^{eff,-}_{Nis}(F)}(\mathbb{Z}, T \otimes \mathbb{G}_m).$$

命題 5.2. 定理 *4.1* と同じ仮定の下で、

$$T \otimes \mathbb{G}_m \to t_{\leq 0} R\pi_*\pi^*(T \otimes \mathbb{G}_m)$$

は同型となる。

注意 5.3. ここでは $\mathbb{Z}(n)$ を Voevodsky が定義した $DM^{eff,-}_{Nis}(F)$ の対象とする。

(1) 同型 $\mathbb{Z}(1) \cong \mathbb{G}_m[-1]$, $\mathbb{Z}(2) \cong \mathbb{Z}(1) \otimes \mathbb{Z}(1)$ と $K_2^{\mathbb{G}_m}(F) \cong K_2(F)$ に注意すれば、$T = \mathbb{G}_m$ のとき命題 5.1 は

$$K_2(F) \cong \mathrm{Hom}_{DM^{eff,-}_{Nis}(F)}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}(2)[2])$$

を意味する。これは Suslin-Voevodsky [13] Theorem 3.4 で証明されている。

(2) 「重さ 2 の Beilinson-Lichtenbaum 予想」により、$T = \mathbb{G}_m$ の場合は命題 5.2 より強く

$$\mathbb{G}_m \otimes \mathbb{G}_m \to t_{\leq 1} R\pi_*\pi^*(\mathbb{G}_m \otimes \mathbb{G}_m)$$

が同型となる。（つまり、命題 5.2 に加えて $R^1\pi_*\pi^*(\mathbb{G}_m \otimes \mathbb{G}_m) = R^3\pi_*\pi^*\mathbb{Z}(2) = 0$ が成り立つ。注意 4.4 (4) を参照。）

命題 5.1, 5.2 は、トーラスの flasque resolution を用いると、$T = \mathbb{G}_m$ の場合に帰着させることができる。上の注意の通り、この場合はすでに知られている。

注意 5.4. （この注意は Bruno Kahn により指摘された。）命題 5.2 の一般化として、F 上の半アーベル多様体 $G_1, \cdots, G_r$ に対して

$$K(F; G_1, \cdots, G_r) \cong \mathrm{Hom}_{DM_{Nis}^{eff,-}(F)}(\mathbb{Z}, G_1 \otimes \cdots \otimes G_r)$$

が成り立つことが期待できるが、なかなか証明できないで困っている。（特に、命題 5.1 は「T が meta-cyclic 拡大で分裂する」の仮定がなくても成立すると期待できる。）望月 [8] に関係した結果がある。

命題 5.2 も、T が一般の（meta-cyclic 拡大で分裂しない）トーラスでも成り立つと期待している。一方で、次の例が構成されている：

例 5.5. (Spieß-Y. [11]) F を標数 0 の体、E/F を二次拡大で restriction map $H^3(F, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to H^3(E, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ が単射でないようなものとする。（たとえば F として二次元局所体 [3] を取れば、どんな二次拡大 E/F もこの仮定を満たす。）このｔき、ノルム 1 トーラス $T = \ker[N_{E/F} : \mathrm{Res}_{E/F}\, \mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m]$ に対して

$$T \otimes T \to t_{\leq 0} R\pi_* \pi^* (T \otimes T)$$

は同型とならない。

Beilinson は、２００７年３月にトロントでの講演で、アフィン多様体 X に対して

$$M(X) \to t_{\leq 0} R\pi_* \pi^* M(X)$$

が同型になることを予想した。例 5.5 の T に対しては $M(T) \cong \mathbb{Z} \oplus T$ （したがって $M(T \times T) \cong \mathbb{Z} \oplus T \oplus T \oplus (T \otimes T)$ ）が成り立つので、例 5.5 はこの予想への反例を与える。（なお、一般の半アーベル多様体 G に対しては G が $M(G)$ の直和因子になるとは限らない。）

6　染川予想

F を体とする。F で可逆な自然数 n と F 上の半アーベル多様体 $G_1, \cdots, G_r$ に対し、Milnor K-群 $K(F; G_1, \cdots, G_r)$ に関する ‘Galois symbol’

$$\rho : K(F; G_1, \cdots, G_r)/n \to H^r(F, G_1[n] \otimes \cdots \otimes G_r[n])$$

が構成されている。染川 [10] は次の予想を提出した：

予想 6.1. ρ は単射。

例 6.2. (1) T が F 上のトーラスのとき、定義によって $K(F; T, \mathbb{G}_m) = K_2^T(F)$ であった。定理 4.3 は、（T が meta-cyclic 拡大で分裂するという仮定の下で）この場合に予想 6.1 を証明したことになる。

(2) $G_1 = \cdots = G_r = \mathbb{G}_m$ のとき、自然な同型 $K(F; \mathbb{G}_m, \cdots, \mathbb{G}_m) \cong K_r^M(F)$ があり、それを通じて Galois symbol も通常のものと同一視される。従って、このとき予想 6.1 は Bloch-加藤予想（の単射性の部分）となる。特に $r = 2$ または n が 2 の冪の場合は、それぞれ Merkurjev-Suslin [7] および Voevodsky の定理 [17] （の一部）である。

(3) C を F 上の代数曲線で F-有理点を持つものとし、J をそのヤコビ多様体とする。このとき $K(F; J, \mathbb{G}_m)$ は、構造射 $C \to \operatorname{Spec} F$ の導く写像（ノルム写像）$\mathrm{CH}^2(C, 1) \to \mathrm{CH}^1(\operatorname{Spec} F, 1) = F^*$ の核（これは直和因子となっている）と同型になり、図式

$$\begin{array}{ccc} K(F; J, \mathbb{G}_m)/n & \xrightarrow{\rho} & H^2(F, J[n] \otimes \mu_n) \\ \downarrow\cap & & \downarrow \\ CH^2(C,1)/n & \xrightarrow{c} & H^3_{et}(C, \mu_n^{\otimes 2}) \end{array}$$

が可換となる。右の写像は Hochschild-Serre スペクトル系列と C の F-有理点の存在から導かれる写像である。Suslin [12] は写像 c が単射であることを示した。したがって、この場合 ρ も単射となり、予想 6.1 は成立する。

(4) C_1, C_2 を F 上の代数曲線で F-有理点を持つものとし、J_1, J_2 をそれらのヤコビ多様体とする。$K(F; J_1, J_2)$ は、代数曲面 $X = C_1 \times C_2$ のアルバネーゼ写像 $\mathrm{CH}^2(X)^{\deg=0} \to J_1(F) \oplus J_2(F)$ の核（これは $\mathrm{CH}^2(X)$ の直和因子となっている）と同型になり、図式

$$\begin{array}{ccc} K(F; J_1, J_2)/n & \xrightarrow{\rho} & H^2(F, J_1[n] \otimes J_2[n]) \\ \downarrow\cap & & \downarrow \\ CH^2(X)/n & \xrightarrow{c} & H^4_{et}(X, \mu_n^{\otimes 2}) \end{array}$$

が可換となる。右の写像は Hochschild-Serre スペクトル系列、Künneth 公式と X の F-有理点の存在から導かれる写像である。このとき、予想 6.1 はサイクル写像 c の単射性と同値になる。特に C_1, C_2 が p-進体上の Mumford 曲線のとき、予想 6.1 は成り立つ [19]。

このように、予想 6.1 は多くの場合に証明されているが、一般には成り立たないことが最近分かった。

例 6.3. (Spieß-Y. [11]) F を体、$n > 1$ を F で可逆な自然数、E/F を n 次巡回拡大とする。次の仮定を設ける：

(1) $\mu_{n^2} \subset F$.

(2) restriction map $H^3(F, \mu_n^{\otimes 2}) \to H^3(E, \mu_n^{\otimes 2})$ は単射でない。

（たとえば F が条件 (1) を満たす二次元局所体 [3] なら、全ての n 次巡回拡大 E/F に対して仮定は成立する。）このとき、ノルム 1 トーラス $T = \ker[N_{E/F} : \operatorname{Res}_{E/F} \mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m]$ に対する Galois symbol

$$K(F; T, T)/n \xrightarrow{\rho} H^2(F, T[n] \otimes T[n])$$

は単射でない。

References

[1] J-L. Colliot-Thélène, J-J. Sansuc, La R-équivalence sur les tores. Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 10 (1977), no. 2, 175–229.

[2] H. Garland, A finiteness theorem for K_2 of a number field. Ann. Math. (2) 94, 534-548 (1971).

[3] K. Kato, A generalization of local class field theory by using K-groups. I. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. 26 (1979), no. 2, 303–376.

[4] S. Lichtenbaum, Values of zeta-functions, etale cohomology, and algebraic K-theory. Algebr. K-Theory II, Proc. Conf. Battelle Inst. 1972, Lect. Notes Math. 342, 489-501 (1973).

[5] S. Lichtenbaum, The construction of weight-two arithmetic cohomology. Invent. Math. 88 (1987), no. 1, 183–215.

[6] C. Mazza, V. Voevodsky, C. Weibel, Lecture notes on motivic cohomology. Clay Mathematics Monographs 2. American Mathematical Society, Providence, RI; Clay Mathematics Institute, Cambridge, MA, 2006.

[7] A. Merkurjev, A. Suslin, K-cohomology of Severi-Brauer varieties and the norm residue homomorphism. Math. USSR-Izv. 21 (1983), no. 2, 307–340.

[8] S. Mochizuki, Motivic interpretation of Milnor K-groups attached to Jacobian varieties ArXiv: math.KT/0603241.

[9] T. Ono, Arithmetic of algebraic tori. Ann. of Math. (2) 74 1961 101–139.

[10] M. Somekawa, On Milnor K-groups attached to semi-abelian varieties. K-Theory 4 (1990), no. 2, 105–119

[11] M. Spieß, T. Yamazaki, A counterexample to generalizations of the Milnor-Bloch-Kato conjecture. ArXiv: 0706.4354.

[12] A. Suslin, Torsion in K_2 of fields. K-Theory 1 (1987), no. 1, 5–29.

[13] A. Suslin, V. Voevodsky, Bloch-Kato conjecture and motivic cohomology with finite coefficients. Gordon, B. Brent (ed.) et al., The arithmetic and geometry of algebraic cycles. Proceedings of the NATO Advanced Study Institute, Banff, Canada, June 7-19, 1998. Vol. 1. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. NATO ASI Ser., Ser. C, Math. Phys. Sci. 548, 117-189 (2000).

[14] J. Tate, Symbols in arithmetic. Actes du Congrès International des Mathématiciens (Nice, 1970), Tome 1, pp. 201–211. Gauthier-Villars, Paris, 1971.

[15] J. Tate, Relations between K_2 and Galois cohomology. Invent. Math. 36 (1976), 257–274.

[16] V. Voevodsky, Triangulated categories of motives over a field. Cycles, transfers, and motivic homology theories, 188–238, Ann. of Math. Stud., 143, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2000.

[17] V. Voevodsky, Motivic cohomology with $Z/2$-coefficients. Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. No. 98 (2003), 59–104.

[18] A. Wiles, The Iwasawa conjecture for totally real fields. Ann. of Math. (2) 131 (1990), no. 3, 493–540.

[19] T. Yamazaki On Chow and Brauer groups of a product of Mumford curves. Math. Ann. 333 (2005), no. 3, 549–567.

山崎 隆雄
〒 980-8578
仙台市青葉区荒巻字青葉６番３号
東北大学大学院理学研究科数学専攻
ytakao@math.tohoku.ac.jp