

量子旗多様体上の $\mathcal{D}$ 加群

谷崎俊之 (大阪市立大学)

1 旗多様体上の $\mathcal{D}$ 加群

G を $\mathbb{C}$ 上の連結半単純代数群, B, B^- を G の Borel 部分群であって $H = B \cap B^-$ が G の極大トーラスとなるものとし, $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$, $\mathfrak{h} = \text{Lie}(H)$ とおく. また W を Weyl 群とする. 包絡代数 $U(\mathfrak{g})$ の中心を $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ で表す. このとき Harish-Chandra により, $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \simeq \mathbb{C}[\mathfrak{h}^*/W]$ が知られている. 従って, 中心指標 ($\text{Hom}_{\text{alg}}(\mathfrak{z}(\mathfrak{g}), \mathbb{C})$ の元) は, $\mathfrak{h}^*/W$ でパラメトライズされる. $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対して $W\lambda$ に対応する中心指標を χ_λ で表す. 一般に $U(\mathfrak{g})$ 加群 M に関して

$$zm = \chi_\lambda(z)m \quad (z \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g}), m \in M)$$

が成り立つとき, M は中心指標 χ_λ をもつという. すべての既約 $U(\mathfrak{g})$ 加群は中心指標を持つ (Schur の補題).

G の旗多様体を

$$\mathcal{B} = B^- \backslash G$$

で表す. また $\mathcal{B}$ 上の微分作用素のなす環の層を $\mathcal{D}_{\mathcal{B}}$ で表す. より一般に, $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対して, $\mathcal{B}$ 上のねじれ微分作用素のなす環の層 $\mathcal{D}_{\mathcal{B}, \lambda}$ が定まる.

定理 1 (Beilinson-Bernstein[1]) $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ は, *regular* かつ *anti-dominant* とすると, 次の圏同値がある:

$$\{U(\mathfrak{g}) \text{ 加群で中心指標 } \chi_\lambda \text{ をもつもの}\} \simeq \{\text{擬接続 } \mathcal{D}_{\mathcal{B}, \lambda} \text{ 加群}\}$$

この定理を用いて $U(\mathfrak{g})$ 加群に関するある種の問題は, $\mathcal{D}$ 加群の問題に翻訳される (Kazhdan-Lusztig 予想の解決 (Brylinski-柏原 [2], Beilinson-Bernstein [1] 1981) など).

2 量子旗多様体上の $\mathcal{D}$ 加群

まず“量子旗多様体”の定義を与えよう．通常の旗多様体 $B = B^- \backslash G$ は，

$$B = \text{Proj}(\mathbb{C}[N^- \backslash G])$$

と表される．ここで N^- は B^- のベキ単根基，また

$$(1) \quad \mathbb{C}[N^- \backslash G] = \{f \in \mathbb{C}[G] \mid f/ng = f(g) \ (n \in N^-, g \in G)\}.$$

$\mathbb{C}[N^- \backslash G]$ には自然に次数付き環の構造が入り，旗多様体の斉次座標環となる．以下量子包絡代数 $U_q(\mathfrak{g})$ を用いて，これの q 類似を構成する． $U_q(\mathfrak{g})$ は， $\mathbb{C}(q)$ 上の Hopf 代数であり， $U(\mathfrak{g})$ の q 類似とみなされる．このとき $\mathbb{C}[G]$ の q 類似 $\mathbb{C}_q[G]$ (量子座標環) が， $U_q(\mathfrak{g})$ の双対 Hopf 代数として定まる．また $\mathbb{C}[N^- \backslash G]$ の q 類似 $\mathbb{C}_q[N^- \backslash G]$ (量子旗多様体の斉次座標環) が，(1) と同様にして定まる．これは $\mathbb{C}_q[G]$ の部分環であり，自然に次数付き環の構造が入る．そこで“量子旗多様体” B_q を

$$(2) \quad B_q = \text{Proj}(\mathbb{C}_q[N^- \backslash G])$$

により定めたい．しかし $\mathbb{C}_q[N^- \backslash G]$ は非可換環なので， B_q を幾何学的に意味付けようとする，“非可換代数多様体”と思わざるをえない．

そこで，非可換代数幾何の一般論 (Manin, Artin-Zhang, Vervekin, Rosenberg,...,Rosenberg[7] を参照) について，簡単に復習しておこう．通常の (可換な) スキーム X は，その上の擬連接層のなすアーベル圏 $\text{Mod}_{qc}(\mathcal{O}_X)$ から，一意的に定まることが知られている．そこで，ある種の条件を満たすアーベル圏 $\mathcal{M}$ が与えられたとき，逆に

$$\text{Mod}_{qc}(\mathcal{O}_X) = \mathcal{M}$$

により，非可換スキーム X が定まるものと思う．特に，(非可換な) 次数付き環

$$A = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A(n)$$

が与えられたとき，次で定まるアーベル圏 $\mathcal{M}_A$ を擬連接層のなす圏とする非可換射影スキーム

$$X = \text{Proj}(A)$$

が定まるものと思う:

$$\mathcal{M}_A = \text{Mod}_{gr}(A)/\text{Tor}_{gr}(A),$$

$$\text{Mod}_{gr}(A) = \{ \text{次数付き左 } A \text{ 加群} \},$$

$$\text{Tor}_{gr}(A) = \{ M \in \text{Mod}_{gr}(A) \mid \forall m \in M; \exists r \text{ s.t. } A(k)m = 0 (k \geq r) \}.$$

我々の元の設定に戻る．上に述べた非可換代数幾何の一般論により，量子旗多様体 B_q が，(2) により，非可換射影代数多様体として定まる．Lunts-Rosenberg[6] は，量子旗多様体 B_q 上の擬連接ねじれ $\mathcal{D}$ 加群の圏

$$\text{Mod}(\mathcal{D}_{B_q, \lambda}) \quad (\lambda \in P = (\text{ウェイト格子}))$$

を定義し，これに関して Beilinson-Bernstein の定理の類似が成り立つ事を予想したが，これは，以下のように解決された．

定理 2 (谷崎 [8] 2005) $\lambda \in P$ は，*regular* かつ *anti-dominant* とすると，次の圏同値がある：

$$\{ U_q(\mathfrak{g}) \text{ 加群で中心指標 } \chi_\lambda \text{ をもつもの} \} \simeq \text{Mod}(\mathcal{D}_{B_q, \lambda}).$$

なお，Backelin-Kremnitzer [3] (2006) は別の方法で B_q 上の擬連接ねじれ $\mathcal{D}$ 加群の圏の定義を与え，これに関して Beilinson-Bernstein 型定理を証明した．

ここで $\text{Mod}(\mathcal{D}_{B_q, \lambda})$ の定義を与えておこう．簡単のため $A = \mathbb{C}_q[N^- \setminus G]$ とおく．これは，ウェイト格子 P により次数付けられた P 次数付き環である．そこで $\text{End}_{\mathbb{C}(q)}(A)$ の部分代数 D を

$$D = \langle \ell_\varphi, r_\varphi, \partial_u, \sigma_\lambda \mid \varphi \in A, u \in U_q(\mathfrak{g}), \lambda \in P \rangle_{\text{alg}} \subset \text{End}_{\mathbb{C}(q)}(A)$$

により定める．ただし

$$\begin{aligned} \ell_\varphi(\psi) &= \varphi\psi, & r_\varphi(\psi) &= \psi\varphi, \\ \partial_u(\psi) &= u \cdot \psi, & \sigma_\lambda(\psi) &= q^{(\lambda, \mu)}\psi \quad (\psi \in A(\mu)). \end{aligned}$$

このとき， D は

$$\begin{aligned} D &= \bigoplus_{\lambda \in P} D(\lambda), \\ D(\lambda) &= \{ \Phi \in D \mid \Phi(A(\mu)) \subset A(\lambda + \mu) \}. \end{aligned}$$

により, P 次数付き環となる. このとき, アーベル圏 $\text{Mod}(\mathcal{D}_{\mathcal{B}_q, \lambda})$ は

$$\begin{aligned}\text{Mod}(\mathcal{D}_{\mathcal{B}_q, \lambda}) &= \text{Mod}_{gr, \lambda}(D) / \text{Tor}_{gr, \lambda}(D), \\ \text{Mod}_{gr, \lambda}(D) &= \{ \text{次数付き左 } D \text{ 加群 } M \mid \sigma_\nu | M(\mu) = q^{(\nu, \mu + \lambda)} \text{id} \}, \\ \text{Tor}_{gr, \lambda}(D) &= \{ M \in \text{Mod}_{gr, \lambda}(D) \mid \forall m \in M, \exists \mu \in P^+, \ell_{A(\mu)} m = 0 \}\end{aligned}$$

により定義される.

3 正標数における旗多様体上の $\mathcal{D}$ 加群

k を標数 $p > 0$ の代数閉体とする. 一般に, k 上の代数多様体 X に対して, その Frobenius twist を $Fr : X \rightarrow X^{(1)}$ で表す. $X = \text{Spec}(R)$ ならば, $R^{(1)} = \{ f^p \mid f \in R \} \subset R$ に関して $X^{(1)} = \text{Spec}(R^{(1)})$ である.

G_k を k 上の連結半単純代数群とする. ただし, $p > (\text{Coxeter 数})$ が成り立っているものとする. G_k の旗多様体を $\mathcal{B}_k = B_k^- \backslash G_k$ であらわす. また $\mathfrak{g}_k = \text{Lie}(G_k)$ とおく. $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}_k) := U(\mathfrak{g}_k)^{G_k}$ は, $U(\mathfrak{g}_k)$ の中心の部分代数で, $k[\mathfrak{h}_k^*/W]$ と同形である. これを Harish-Chandra 中心と呼ぶ ($U(\mathfrak{g}_k)$ の中心は $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}_k)$ よりもっと大きい).

$\mathcal{B}_k$ 上のクリスタル微分作用素のなす環の層を $\mathcal{D}_{\mathcal{B}_k}$ で表す. また $\lambda \in \mathfrak{h}_k^*$ に対して, $\mathcal{B}_k$ 上のねじれクリスタル微分作用素のなす環の層 $\mathcal{D}_{\mathcal{B}_k, \lambda}$ が定まる.

定理 3 (Bezrukavnikov-Mirkovic-Ryuminin [5]) $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ は *regular* とするとき, 2つのアーベル圏:

$$\begin{aligned}& \{ U(\mathfrak{g}) \text{ 加群で Harish-Chandra 中心指標 } \chi_\lambda \text{ をもつもの } \}, \\ & \{ \text{擬連接 } \mathcal{D}_{\mathcal{B}_k, \lambda} \text{ 加群 } \}\end{aligned}$$

は, 導来同値 (すなわち, それらの有界導来圏は同値である).

標数 0 の場合と異なり, $\mathcal{D}_{\mathcal{B}_k, \lambda}$ の中心は大きくなる. 正確には

$$\begin{aligned}(Fr_* \mathcal{D}_{\mathcal{B}_k} \text{ の中心}) &= \pi_*(\mathcal{O}_{T^* \mathcal{B}_k^{(1)}}), \\ (Fr_* \mathcal{D}_{\mathcal{B}_k, \lambda} \text{ の中心}) &= \pi_{\lambda*}(\mathcal{O}_{T_\lambda^* \mathcal{B}_k^{(1)}}).\end{aligned}$$

が成り立つ．ただし $\pi : T^*\mathcal{B}_k^{(1)} \rightarrow \mathcal{B}_k^{(1)}$ は $\mathcal{B}_k^{(1)}$ の余接束, $\pi_\lambda : T_\lambda^*\mathcal{B}_k^{(1)} \rightarrow \mathcal{B}_k^{(1)}$ は, その類似物 ($\mathcal{B}_k^{(1)}$ のねじれ余接束). そこで $\mathcal{D}_{\mathcal{B}_k, \lambda}$ の $T_\lambda^*\mathcal{B}_k^{(1)}$ 上での局所化を

$$\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{B}_k, \lambda} := \mathcal{O}_{T_\lambda^*\mathcal{B}_k^{(1)}} \otimes_{\pi_\lambda^{-1}\pi_{\lambda*}(\mathcal{O}_{T_\lambda^*\mathcal{B}_k^{(1)}})} \pi_\lambda^{-1} Fr_* \mathcal{D}_{\mathcal{B}_k, \lambda}.$$

により定義する．このとき, 圏同値

$$\{ \text{擬連接 } \mathcal{D}_{\mathcal{B}_k, \lambda} \text{ 加群} \} \simeq \{ \text{擬連接 } \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{B}_k, \lambda} \text{ 加群} \}$$

が成り立つ．また $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{B}_k, \lambda}$ は階数 $p^{2 \dim \mathcal{B}_k}$ の東屋代数である．すなわち $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{B}_k, \lambda}$ は, 局所自由 $\mathcal{O}_{T_\lambda^*\mathcal{B}_k^{(1)}}$ 加群で,

$$\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{B}_k, \lambda}(y) \simeq M_{p^{\dim \mathcal{B}_k}}(k) \quad (y \in T_\lambda^*\mathcal{B}_k^{(1)}).$$

が成り立つ． $\gamma_\lambda : T_\lambda^*\mathcal{B}_k^{(1)} \rightarrow \mathfrak{g}_k^{*(1)}$ をモーメント写像とする．

定理 4 (Bezrukavnikov-Mirkovic-Ryuminin [5]) $\xi \in \mathfrak{g}_k^{*(1)}$ に対して, 制限 $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{B}_k, \lambda}|_{\gamma_\lambda^{-1}(\xi)}$ は分解型東屋代数である．すなわち, ある局所自由 $\mathcal{O}_{\gamma_\lambda^{-1}(\xi)}$ 加群 $\mathcal{V}$ に関して

$$\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{B}_k, \lambda}|_{\gamma_\lambda^{-1}(\xi)} \simeq \mathcal{E}nd_{\mathcal{O}_{\gamma_\lambda^{-1}(\xi)}}(\mathcal{V})$$

が成り立つ．

定理 3 と定理 4 を用いて, 与えられた中心指標をもつ既約 $U(\mathfrak{g}_k)$ 加群の個数に関する Lusztig の予想が導かれる．

4 ベキ根における量子旗多様体上の $\mathcal{D}$ 加群

一般に, 正標数における半単純代数群の表現論と, パラメータ q が 1 のベキ根のときの量子包絡代数の表現論は, よく“似ている”ことが知られている．そこで, パラメータ q が 1 のベキ根のときの量子旗多様体上の $\mathcal{D}$ 加群に関して, Bezrukavnikov-Mirkovic-Ryuminin の結果 (定理 3 と定理 4) の類似が成り立つかどうかについて考える．実際, Backelin-Kremnitzer [4] は彼らの流儀での $\mathcal{D}$ 加群の圏に関して, 定理 3 と定理 4 の類似を示している．以下, Lunts-Rosenberg の流儀での $\mathcal{D}$ 加群の圏に関して同様の問題を考える．現段階では, 定理 4 の類似のみ証明できているので, 以下これについて述べる．

$\mathbb{A} = \mathbb{C}[q, q^{-1}]$ とおく．1 のベキ根への特殊化を考えるために，第2節で現れた代数の $\mathbb{A}$ -form が必要となる． $U_q(\mathfrak{g})$ の $\mathbb{A}$ -form には，De Concini-Kac form と呼ばれるものと，Lusztig form と呼ばれるものの2種類があるが，ここでは De Concini-Kac form をとり， $U_{\mathbb{A}}$ で表す． $U_q(\mathfrak{g})$ の Lusztig form の双対 Hopf 代数として， $\mathbb{C}_q[G]$ の $\mathbb{A}$ -form が定まるが，これから $A = \mathbb{C}_q[N^- \setminus G]$ の $\mathbb{A}$ -form $A_{\mathbb{A}}$ が自然に定まる．そこで

$$D_{\mathbb{A}} = \langle \ell_{\varphi}, r_{\varphi}, \partial_u, \sigma_{\lambda} \mid \varphi \in A_{\mathbb{A}}, u \in U_{\mathbb{A}}, \lambda \in P \rangle \subset D$$

とおく．

以下，特殊化

$$\mathbb{A} \rightarrow \mathbb{C} \quad (q \mapsto \zeta = \exp(2\pi\sqrt{-1}/\ell)),$$

を考える．ただし， ℓ は奇正整数で， G_2 型の場合， ℓ は3と互いに素であるとする．これにより， $\mathbb{C}$ 代数

$$U_{\zeta} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{A}} U_{\mathbb{A}}, \quad A_{\zeta} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{A}} A_{\mathbb{A}}, \quad D_{\zeta} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{A}} D_{\mathbb{A}}$$

が定まる．これらから，第2節と全く同様にして， $q = \zeta$ における量子旗多様体

$$\mathcal{B}_{\zeta} = \text{Proj}(A_{\zeta})$$

と，擬連接 $\mathcal{D}_{\mathcal{B}_{\zeta}, t}$ 加群の圏 $\text{Mod}(\mathcal{D}_{\mathcal{B}_{\zeta}, t})$ ($t \in H$) が定まる．また Frobenius twist の類似物として，射

$$Fr : \mathcal{B}_{\zeta} \rightarrow \mathcal{B}$$

が定まる．ただし Fr の行き先 $\mathcal{B}$ は，通常の $\mathbb{C}$ 上の旗多様体 $B^- \setminus G$ である．これを用いて $\mathcal{O}_B$ 代数 $Fr_* \mathcal{D}_{\mathcal{B}_{\zeta}, t}$ が得られ，これに関して

$$\text{Mod}(\mathcal{D}_{\mathcal{B}_{\zeta}, t}) \simeq \{ \text{擬連接 } Fr_* \mathcal{D}_{\mathcal{B}_{\zeta}, t} \text{ 加群} \}$$

が成立する． $B \times B^-$ の部分群 K を

$$K = \{(hg, h^{-1}g') \mid h \in H, g \in N^+, g' \in N^-\} \subset B \times B^-$$

により定める．これは $\mathfrak{g}_k^{*(1)}$ の類似物と見なせる．また $\pi_t : V_t \rightarrow \mathcal{B}$ を，

$$V_t = \{(B^-g, (b, b')) \in \mathcal{B} \times K \mid gbb'^{-1}g^{-1} \in t^{2\ell}N^-\}, \quad \pi_t(B^-g, k) = B^-g$$

により定める．これは $T_{\lambda}^* \mathcal{B}_k^{(1)} \rightarrow \mathcal{B}_k^{(1)}$ の類似物と見なせる．

命題 5 $Fr_*\mathcal{D}_{\mathcal{B}_\zeta,t}$ の中心は $\pi_{t*}\mathcal{O}_{V_t}$ と同形である .

従って $\mathcal{D}_{\mathcal{B}_\zeta,t}$ の V_t 上での局所化が

$$\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{B}_\zeta,t} := \mathcal{O}_{V_t} \otimes_{\pi_t^{-1}\pi_{t*}(\mathcal{O}_{V_t})} \pi_t^{-1}Fr_*\mathcal{D}_{\mathcal{B}_\zeta,t}.$$

により定まる .

命題 6 $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{B}_\zeta,t}$ は , 階数 $\ell^{2\dim \mathcal{B}_\zeta}$ の東屋代数である .

命題 5 , 命題 6 に対応する正標数における命題は , ほぼ自明のことであった . しかし , 我々の今考えているベキ根での旗多様体に関しては , これらは非自明な事実であり , その証明には , 環

$$D_{\mathbb{A}} = \langle \ell_\varphi, r_\varphi, \partial_u, \sigma_\lambda \mid \varphi \in A_{\mathbb{A}}, u \in U_{\mathbb{A}}, \lambda \in P \rangle \subset \text{End}_{\mathbb{A}}(A_{\mathbb{A}})$$

におけるある種の関係式が必要となる . これらは次のようにして得られる . r_φ と ℓ_φ の違いは , $\mathbb{C}_q[G]$ の非可換性, すなわち , $U_q(\mathfrak{g})$ の非余可換性から来ている . $U_q(\mathfrak{g})$ の非余可換性をコントロールするのは , 普遍 R 行列 $\mathcal{R} \in \widehat{U \otimes U}$ である . 従って , $\mathcal{R}$ を用いて r_φ の他の生成元 $\ell_\psi, \partial_u, \sigma_\lambda$ による表示が得られる . 特に

$$D_{\mathbb{A}} = \langle \ell_\varphi, \partial_u, \sigma_\lambda \mid \varphi \in A_{\mathbb{A}}, u \in U_{\mathbb{A}}, \lambda \in P \rangle.$$

一方 , もう一つの普遍 R 行列 $\tau(\mathcal{R}^{-1})$ (ただし $\tau(u \otimes v) = v \otimes u$) を用いて , r_φ の別の表示が得られる . これらを比較する事により , $D_{\mathbb{A}}$ の生成元 $\ell_\psi, \partial_u, \sigma_\lambda$ の間関係式が得られる . 命題 5 , 命題 6 の証明は , このようにして得られた関係式を用いてなされる .

モーメント写像の類似が ,

$$\gamma_t : V_t \rightarrow K \quad ((B^-g, k) \mapsto k).$$

により定まる . 我々の主定理はつぎのとおり .

定理 7 $k \in K$ に対して , 制限

$$\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{B}_\zeta,t}|_{\gamma_t^{-1}(k)}$$

は , 分解型東屋代数である .

定理 7 の証明は , 命題 5 , 命題 6 を用いれば , 定理 4 とほぼ同様になされる .

References

- [1] A. Beilinson, J. Bernstein, *Localisation de $\mathfrak{g}$ -modules*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **292** (1981), 15–18.
- [2] J.-L. Brylinski, M. Kashiwara, *Kazhdan-Lusztig conjecture and holonomic systems*, Invent. Math., **64**(1981), 387-410.
- [3] E. Backelin, K. Kremnitzer, *Quantum flag varieties, equivariant quantum $\mathcal{D}$ -modules, and localization of quantum groups*, Adv. Math., **203**(2006), 408-429.
- [4] E. Backelin, K. Kremnitzer, *Localization for quantum groups at a root of unity*, arXiv:math.RT/0407048.
- [5] R. Bezrukavnikov, I. Mirkovic, D. Rumynin, *Localization of modules for a semisimple Lie algebra in prime characteristic*, arXiv:math.RT/0205144.
- [6] V. A. Lunts, A. L. Rosenberg, *Localization for quantum groups*, Selecta Math. New ser. **5** (1999), 123-159.
- [7] A. L. Rosenberg, *Noncommutative algebraic geometry and representations of quantized algebras*, Kluwer Academic Publishers, 1995.
- [8] T. Tanisaki, *The Beilinson-Bernstein correspondence for quantized enveloping algebras*, Math. Z. **250**, (2005), 299–361.