剛性コホモロジーにおける重みおよび傾きフィルトーレション

中島幸喜*

Acknowledgement. 講演の機会を与えてくださった組織委員の方々に心より感謝申し上げます.

Convention. 日本人の研究者の敬称を省略させていただきます.

1 Introduction

今日では,
(1.0.1)
(幾何的対象) $\rightsquigarrow$ (完全圏の対象, 例えば, (ある構造付きの) 線型空間) $\rightsquigarrow$ (不変量)

という図式で幾何的対象の不変量 (や不変数) を取り出すのは, 常套手段だが, 今, 時間を巻き戻して, etale コホモロジーの定義は知っているが, 重みフィルトーレションについては知らない時に戻して, 歴史に沿って, 次のことを振り返ってみる.

Grothendieck 著 (辻雄一訳) の [G] に次の Serre の着想が述べられている. （ここでは, 述べられている形そのものではなく, 後の都合上のため, 変種を述べる. ）

κ を代数閉体とし, r を非負整数とする.

Conjecture 1.1 (Serre 予想の変種).

$$S(\kappa) := \{\text{閉部分スキーム付き (分離かつ) } \kappa \text{ 上有限型スキームの同型類のなす集合}\}$$

とおく. このとき, 次の三つの性質を満たす唯一の写像

$$h^r\colon S(\kappa) \longrightarrow \mathbb{Z} \tag{1.1.1}$$

$$(Z \overset{\subset}{\longrightarrow} U) \longmapsto h^r_Z(U)$$

がある. ($h^r(U) := h^r_U(U)$ とおく. ）

(性質 1) U を κ 上, 固有, 滑らかとすると, $h^r(U) = (-1)^r \dim_{\mathbb{Q}_l} H^r_{\mathrm{et}}(U, \mathbb{Q}_l)$ (但し, 素数 l は $\mathrm{ch}(\kappa)$ と素). ([G] では符号 $(-1)^r$ を忘れていることに注意.)

(性質 2) Z' を Z の閉部分スキームとすると, $h^r_Z(U) = h^r_{Z'}(U) + h^r_{Z\setminus Z'}(U \setminus Z')$.

(性質 3) Z も U も κ 上, 滑らかとし, Z は U の中で純余次元 c すると, $h^r_Z(U) = h^{r-2c}(Z)$.

(Serre は $h^r_Z(U)$ を (Z, U) の仮想 Betti 数と呼んだ. ）

*桂利行先生の科研費 [基盤 S 課題番号 19104001] の援助をいただいています.

Remark 1.2. (1) K を可換体とし, $G(K)$ を K 上の有限次元ベクトル空間のなす Grothendieck 群とすると, 次元をとることによって, 同型 $\dim_K\colon G(K) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$ を得る. κ によって, K を適当に取り, (1.1.1) は

$$h^r\colon S(\kappa) \longrightarrow G(K) \tag{1.2.1}$$

と見なしたほうがよりよい.

(2) (性質 2) の弱形

(性質 2)$'$ $h^r(U) = h^r_Z(U) + h^r(U \setminus Z)$

を考える. すると, [Nakk2] で証明されているように, (性質 1) と (性質 2)$'$ から, h^r の唯一性は従う.

同じ本 [G] に次の, より精密な Grothendiedk による予想 (正確にはその変種) が述べられている.

Conjecture 1.3 (Grothendieck 予想の変種). 各 $i, j \in \mathbb{N}$ に対し, 次の性質を満たす写像

$$h^{ij}\colon S(\kappa) \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$(Z \xrightarrow{\subset} U) \longmapsto h^{ij}_Z(U)$$

がある.

(性質 4) $h^r_Z(U) = \sum_{i+j=r} h^{ij}_Z(U)$.

(性質 5) Z' を Z の閉部分スキームとすると, $h^{ij}_Z(U) = h^{ij}_{Z'}(U) + h^{ij}_{Z\setminus Z'}(U \setminus Z)$.

Remark 1.4. (1) 後にわかるように, $h^{ij}_Z(U)$ は κ の標数が 0 であるか, 正標数であるかによって, 哲学的に異なる不変量であることに注意されたい.

(2) Serre 予想のときと同じく, 固有滑らかのスキームのときの場合の h^{ij} の特徴付け (cf. §2, (4.8)) と (性質 5) の弱形

(性質 5)$'$ $h^{ij}(U) = h^{ij}_Z(U) + h^{ij}(U \setminus Z)$

から, $h^{ij}_?(?)$ の唯一性も示すことができる ([Nakk2]).

次のセクションで基礎体 κ が複素数体 $\mathbb{C}$ のときの, Deligne による (1.1) と (1.3) の解決を簡単に復習し, その次のセクションで l 進コホモロジーのときの, Deligne による (1.1) と (1.3) の解決を復習し, 我々の主眼である剛性コホモロジーにおける (1.1) と (1.3) の解決を概説する.

2 基礎体が複素数体のとき.

κ を基礎体とし, U を κ 上 (分離かつ) 有限型スキームで, Z を U の閉部分スキームとする. このセクションでは $\kappa = \mathbb{C}$ とする.

まず, よく知られている次の定義を復習する.

Definition 2.1. m を整数とする. $\mathbb{Q}$ 上の有限次元線型空間 H と $H_{\mathbb{C}} := H \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ 上のフィルトレーション F の組 (H, F) が重み n の Hodge 構造とは, $H^{ij} := F^i H_{\mathbb{C}} \cap \overline{F^j H_{\mathbb{C}}}$ (ここに, $\overline{}$ は複素数共役を表す.) とおくと,

$$F^i(H) = \bigoplus_{i' \geq i} H^{i', m-i'}$$

と直和分解 (Hodge 分解と言う) する (H, F) のこと. ($h^{ij}(H) := \dim_{\mathbb{C}} H^{ij}$ とおく.)

Example 2.2. U が $\mathbb{C}$ 上固有かつ滑らかのとき, Hodge 理論および [D1] によって,

$$F^i H^n(U_{\mathrm{an}}, \mathbb{C}) := \mathrm{Im}(H^n(U_{\mathrm{an}}, \Omega^{\bullet \geq i}_{U_{\mathrm{an}}/\mathbb{C}}) \longrightarrow H^n(U_{\mathrm{an}}, \Omega^{\bullet}_{U_{\mathrm{an}}/\mathbb{C}}) = H^n(U_{\mathrm{an}}, \mathbb{C}))$$

とおくと, $(H^n(U_{\mathrm{an}}, \mathbb{Q}), F)$ は重み m の Hodge 構造となる．さらに

$$h^{ij}(H^n(U_{\mathrm{an}}, \mathbb{C})) = \dim_{\mathbb{C}} H^j(U_{\mathrm{an}}, \Omega^i_{U_{\mathrm{an}}/\mathbb{C}}) = \dim_{\mathbb{C}} H^j(U, \Omega^i_{U/\mathbb{C}}) \quad (i+j=m).$$

(最後の等式は GAGA を使った．)

基礎体が $\mathbb{C}$ のときは, 一連の論文 [D2], [D3], [D4] において, Deligne によって, 30 年以上前に次の形で解決されている.

Theorem 2.3 ([D2], [D3], [D4]). Z_{an} に台を持つコホモロジー $H^n_{Z_{\mathrm{an}}}(U_{\mathrm{an}}, \mathbb{Q})$ $(n \in \mathbb{N})$ に混合 Hodge 構造が存在する．つまり, 有限な増大フィルトレーション P (重みフィルトレーションと呼ばれる) と有限な減少フィルトレーション F (Hodge フィルトレーションと呼ばれる) があって, $(\mathrm{gr}^P_r H^n_{Z_{\mathrm{an}}}(U_{\mathrm{an}}, \mathbb{Q}), \mathrm{gr}^P_r F)$ は重み m の Hodge 構造．ここに, $\mathrm{gr}^P_r F$ は F が $\mathrm{gr}^P_r H^n_{Z_{\mathrm{an}}}(U_{\mathrm{an}}, \mathbb{C})$ に誘導するフィルトレーション.

Corollary 2.4. (1) $r \in \mathbb{N}$ に対し,

$$h^r_Z(U) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{gr}^P_r H^n_{Z_{\mathrm{an}}}(U_{\mathrm{an}}, \mathbb{Q}) \tag{2.4.1}$$

とおくと, (1.1) を満たす.

(2) $i, j \in \mathbb{N}$ に対し, $h^{ij}_Z(U) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dim_{\mathbb{C}} h^{ij}(\mathrm{gr}^P_r H^n_{Z_{\mathrm{an}}}(U_{\mathrm{an}}, \mathbb{C}))$ とおくと, (1.3) を満たす.

実際, (性質 1) は (2.2) から従い, (性質 2) は切除系列

$$\cdots \longrightarrow H^n_{Z_{\mathrm{an}}}(U_{\mathrm{an}}, \mathbb{Q}) \longrightarrow H^n_{Z'_{\mathrm{an}}}(U_{\mathrm{an}}, \mathbb{Q}) \longrightarrow H^n_{U_{\mathrm{an}} \setminus Z'_{\mathrm{an}}}((U_{\mathrm{an}} \setminus Z_{\mathrm{an}}), \mathbb{Q}) \longrightarrow H^{n+1}_{Z_{\mathrm{an}}}(U_{\mathrm{an}}, \mathbb{Q}) \longrightarrow \cdots$$

が重みフィルトレーションに関し, 厳密完全 (上の系列の各項の各重みフィルトレーションをとっても, 完全) より従う．また, (性質) は Hodge 分解から明らか.

今後, 簡単のため, closed subscheme Z を忘れることにする．また, (1.1), (1.3) に登場する不変量も考えないで, もっぱら, 重みフィルトレーションと傾きフィルトレーションと呼ばれるフィルトレーションのみに興味を持つことにする (cf. (1.0.1))．(正標数の体では Hodge フィルトレーションに対応するフィルトレーションは一般に存在しないと思われていて, 代わりに傾きフィルトレーションを考える．)

3 基礎体が有限体でコホモロジーが l 進コホモロジーのとき.

このセクションでは, 簡単のため, 基礎体 κ は (代数閉体ではないが) 有限体 $\mathbb{F}_q$ とする (実は, このセクションの "重み" に関する結果は基礎体が有限体でなくても成立する (cf. [G])；特殊化の議論によって, 有限体の場合に帰着できる)．$\overline{\mathbb{F}}_q$ を $\mathbb{F}_q$ の代数閉包とする．U を $\mathbb{F}_q$ の分離かつ有限型のスキームとする．$U_{\overline{\mathbb{F}}_q} := U \otimes_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}}_q$ とおく．$H^n_{\mathrm{et}}(U_{\overline{\mathbb{F}}_q}, \mathbb{Q}_l)$ $(n \in \mathbb{N})$ を l 進エタールコホモロジーとする $((l, q) = 1)$．$F \colon U \longrightarrow U$ を q 冪フロベニウスとする．射 F は $U_{\overline{\mathbb{F}}_q} \longrightarrow U_{\overline{\mathbb{F}}_q}$ を係数拡大によって, 射 (同じ記号 F で表す) を誘導し, 引き戻し

$$F^* \colon H^n_{\mathrm{et}}(U_{\overline{\mathbb{F}}_q}, \mathbb{Q}_l) \longrightarrow H^n_{\mathrm{et}}(U_{\overline{\mathbb{F}}_q}, \mathbb{Q}_l)$$

を誘導する． このとき, Deligne による Weil 予想の解決 ([D5], [D6]) と de Jong の alteration に関する定理 ([dJ]) により, 次の定理が成立する.

Theorem-Definition 3.1. F^* の固有値は $\overline{\mathbb{Q}}$ の元で, 勝手な体の埋め込み $\sigma\colon \overline{\mathbb{Q}} \overset{\subset}{\longrightarrow} \mathbb{C}$ に対し, ある整数 i があって, $|\sigma(\alpha)| = q^{\frac{i}{2}}$. このとき, 代数的数 α を q に関する純重み i であると言う.

この定理より, 次のフィルトレーション P が定義できる.

Definition 3.2. $k \in \mathbb{Z}$ に対し,

$$P_k H^n_{\mathrm{et}}(U_{\overline{\mathbb{F}}_q}, \mathbb{Q}_l) = \{\ \text{純重み}\ k\ \text{以下の固有値に対する広義固有空間}\ \}$$

とおく. $P = \{P_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ は $H^n_{\mathrm{et}}(U_{\overline{\mathbb{F}}_q}, \mathbb{Q}_l)$ の重みフィルトレーションと呼ばれる.

α を q に関する純重み i の代数的数としたとき, $\mathbb{Q}_p(\alpha)$ の p 進付置 v を $v(q) = 1$ と正規化する. 次のフィルトレーション Fil を考える.

Definition 3.3. $v(\alpha) \geq i$ のとき, α は傾き $\geq i$ であると言う.

Definition 3.4.

$$\mathrm{Fil}^i H^n_{\mathrm{et}}(U_{\overline{\mathbb{F}}_q}, \overline{\mathbb{Q}}_l) = \{\ \text{傾き}\ \geq i\ \text{の固有値に対する広義固有空間}\ \}$$

Fil は $H^n_{\mathrm{et}}(U_{\overline{\mathbb{F}}_q}, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ の傾きフィルトレーションと呼ばれる.

以上, 数論的な記述のフィルトレーション P と Fil を定義したが, 次のように P は幾何的な記述もできる.

まず, 次の記号を準備する. 基礎体 κ 上の滑らかスキーム X とその上の単純正規交差因子 D と D の既約成分 $\{D_i\}_{i\in I}$ に対し, $D^{(k)} := \coprod_{i_1,\dots,i_k} D_{i_1} \cap \cdots \cap D_{i_k}$ とおく ($i_1, \dots, i_k$ は相異なるとする). $D^{(0)}$ を X とする.

$U_\bullet$ を U の固有超被覆とする ([D4]), つまり, 自然な射 $U_{n+1} \longrightarrow \mathrm{cosk}^U_n(U_{\bullet\leq n})_{n+1}$ ($n \geq -1$) が固有全射とする. $U_\bullet$ は固有滑らかな simplicial スキーム $X_\bullet$ の開集合で, 補閉スキーム $D_\bullet$ は単純正規交差因子とする. このとき, 次のスペクトル系列が存在する.

(3.4.1)

$$E_1^{-k,h+k}((X_\bullet, D_\bullet)) = \bigoplus_{t\geq 0} H^{h-2t-k}_{\mathrm{et}}((D_t^{(t+k)})_{\overline{\mathbb{F}}_q}, \mathbb{Q}_l)(-(t+k)) \Longrightarrow H^h_{\mathrm{et}}(U_{\overline{\mathbb{F}}_q}, \mathbb{Q}_l).$$

Deligne による Weil 予想の解決により, $E_1^{-k,h+k}((X_\bullet, D_\bullet))$ は純重み $h+k$ であることから, (3.4.1) から誘導されるフィルトレーションは重みフィルトレーションと一致することがわかる.

但し, l 進コホモロジーを用いる Fil の幾何的記述は不可能と思われる.

4 剛性コホモロジーにおける重みおよび傾きフィルトレーション

このセクションで主結果を述べる.

簡単のため, κ を標数 $p > 0$ の代数閉体とする. W を κ の Witt 環とする. K_0 を W の分数体とする. σ を W の Frobenius 写像とする. U を分離かつ κ 上有限型のスキームとする. このとき, Berthelot は, 関手性をもつ K_0 上のベクトル空間である剛性コホモロジー $H^n_{\mathrm{rig}}(U/K_0)$ ($m \in \mathbb{N}$) を定義した ([B2], [B3], [CT]). ($H^n_{\mathrm{rig}}(U/K_0)$ は §2 の $H^n(U_{\mathrm{an}}, \mathbb{Q})$, §3 の $H^n_{\mathrm{et}}(U_{\overline{\mathbb{F}}_q}, \mathbb{Q}_l)$ に対応するコホモロジーと思われている.) まず, '97, '02 に Berthelot [B3], Große-Klönne [GK] によって, 次の基本的な定理が証明され, '03 に都築によって, 別証明が与えられた.

Theorem 4.1 (Berthelot [B3], Große-Klönne [GK], Tsuzuki [T]).

$$\dim_{K_0} H^n_{\mathrm{rig}}(U/K_0) < \infty.$$

次に傾きフィルトレーションについて, 復習する. $F\colon U \longrightarrow U$ を p 冪 Frobenius 写像とする. 射 F は引き戻し

$$F^*\colon H^n_{\mathrm{rig}}(U/K_0) \longrightarrow H^n_{\mathrm{rig}}(U/K_0)$$

を誘導する (F^* は σ-linear). Dieudonne-Manin の定理によって, 組 $(H^n_{\mathrm{rig}}(U/K_0), F)$ は $(K_0[T]/(T^r - p^s), T\cdot)$ $(r, s \in \mathbb{Z}, r \neq 0)$ の形の直和になる. $(K_0[T]/(T^r - p^s), T\cdot)$ と同型な直和成分を傾き s/r という.

Definition 4.2.

$$\mathrm{Fil}^i H^n_{\mathrm{rig}}(U/K_0) = \{\text{ 傾き } i \text{ 以上の直和成分の直和 }\}$$

Fil は $H^n_{\mathrm{rig}}(U/K_0)$ の傾きフィルトレーションと呼ばれる.

この論説の目標は

(目標 1) $H^n_{\mathrm{rig}}(U/K_0)$ の幾何的記述を使って, 重みフィルトレーションと呼ばれる関手的なフィルトレーションを定義し,

(目標 2) $H^n_{\mathrm{rig}}(U/K_0)$ の傾きフィルトレーションの幾何的記述を与えること

にある.

まず, 永田の埋め込み定理を使って, U を κ 上の固有スキームの $\overline{U}$ の中の開集合として, 埋め込む. $(U_\bullet, X_\bullet) := (U_\bullet, X_\bullet)_{\bullet \in \mathbb{N}}$ を $(U, \overline{U})$ の固有超被覆とする, つまり, cartesian な図式

(4.2.1)
$$\begin{array}{ccc} U_\bullet & \xrightarrow{\subset} & X_\bullet \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ U & \xrightarrow{\subset} & \overline{U} \end{array}$$

で, $X_n \longrightarrow \overline{U}$ $(n \in \mathbb{N})$ は固有で, $U_\bullet \longrightarrow U$ は U の固有超被覆とする. さらに, $X_\bullet$ は κ 上滑らかで, simplicial 閉部分スキーム $D_\bullet$ は単純正規交差因子とする. また, さらに, $(X_\bullet, D_\bullet)$ は分裂しているとする. つまり, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し, (X_n, D_n) の閉かつ開対数スキーム (N^X_n, N^D_n) が存在し, 自然な射

$$\coprod s\colon \coprod_{m \le n} \coprod_{s\colon [n] \twoheadrightarrow [m]} (N^X_m, N^D_m) \longrightarrow (X_n, D_n)$$

がスキームの同型射であるとする. このとき, 加藤の対数的クリスタルコホモロジーの一般論 ([K]) より, 対数的クリスタルコホモロジーの複体 $R\Gamma_{\text{log-crys}}((X_\bullet, D_\bullet)/W)$ が考えられる. このとき, 次の定理が成立する.

Theorem 4.3 (比較定理). 図式 (4.2.1) に関し, 関手的な同型

(4.3.1) $$R\Gamma_{\mathrm{rig}}(U/K_0) \xrightarrow{\sim} R\Gamma_{\text{log-crys}}((X_\bullet, D_\bullet)/W) \otimes_W K_0$$

が存在する. 特に, 関手的な同型

(4.3.2) $$H^h_{\mathrm{rig}}(U/K_0) \xrightarrow{\sim} H^h_{\text{log-crys}}((X_\bullet, D_\bullet)/W) \otimes_W K_0 \quad (h \in \mathbb{N})$$

が存在する.

Remark 4.4. (1) $\mathbb{C}$ 上のときと大きく違って, 剛性コホモロジーと対数クリスタルコホモロジーという異なったコホモロジーを比較していることにまず, 注意されたい. 比較定理により, 対数的クリスタルコホモロジーに関する結果を使って, 剛性コホモロジーに関する結果を導くことができる. 例えば, Künneth 公式など ([Nakk2]).

(2) 実は, (4.3) だけなら, $(X_\bullet, D_\bullet)$ の分裂性を仮定しなくても, 成立する. 但し, $(X_\bullet, D_\bullet)$ の分裂性を仮定しないと, 現在のところ, Künneth 公式と重みの両立性の証明には役立たない.

(3) (4.3) および (2) は de Jong の予想 ([dJ])

$$「H^h_{\text{log-crys}}((X_\bullet, D_\bullet)/W) \otimes_W K_0 \text{は} U/\kappa \text{にしか依らない}」$$

の解決になっている. もっと, 強く複体 $R\Gamma_{\text{log-crys}}((X_\bullet, D_\bullet)/W) \otimes_W K_0$ は U/κ にしか依らないことがわかる.

(4) [AB] において, Andreatta と Barbieri-Viale は $p \geq 3$ で augmentation 射 $X_0 \setminus D_0 \longrightarrow U$ が generically etale ($X_\bullet$ の分裂性は仮定しない.) のとき, $H^1_{\text{log-crys}}((X_\bullet, D_\bullet)/W)$ が $(X_\bullet, D_\bullet)$ の取り方によらないことを示している.

(5) 志甫は [S] において, 次のことを示していた. Y を κ 上固有滑らかなスキームとして, E を Y 上の正規単純交差因子とし, $V := Y \setminus E$ としたとき, 関手的な同型

$$H^h_{\text{rig}}(U/K_0) \xrightarrow{\sim} H^h_{\text{log-crys}}((Y, E)/W) \otimes_W K_0 \tag{4.4.1}$$

が存在する.

(4.3) の証明は都築の固有降下 ([T]) を使って, 上の志甫の定理に帰着することにある. (4.3) の証明のポイントは射 (4.3.1) をつくることにある.

(4.3) より, 剛性コホモロジー $H^h_{\text{rig}}(U/K_0)$ は対数的クリスタルコホモロジーと解釈されたので, Poincaré 留数を使って, 次のスペクトル系列を得る.

(4.4.2)
$$E_1^{-k,h+k}((X_\bullet, D_\bullet)/K_0) = \bigoplus_{t \geq 0} H^{h-2t-k}_{\text{crys}}(D^{(t+k)}_t/W)(-(t+k)) \otimes_W K_0 \Longrightarrow H^h_{\text{rig}}(U/K_0).$$

(4.4.2) を $H^h_{\text{rig}}(U/K_0)$ の重み系列と呼ぶ. $H^h_{\text{rig}}(U/K_0)$ の重み系列に関し, 次の基本的な定理が成立する.

Theorem 4.5 (E_2-退化). 重み系列は E_2 退化する.

この定理の証明は結局は κ が有限体のときに帰着し, Deligne による Weil 予想の解決に帰着するのだが, その帰着のさせ方が Ogus の収束 F-クリスタルの理論 ([O1]) や Berthelot-Ogus 同型等を使って, 非自明である. この定理を使って, 次の重要な定理を得る.

Theorem-Definition 4.6. (1) P を (4.4.2) から定まる $H^h_{\text{rig}}(U/K_0)$ のフィルトレーションとすると, P は U/κ にしかよらない. P を $H^h_{\text{rig}}(U/K_0)$ の重みフィルトレーションという.

(2) P は射の引き戻しに関し, 狭両立する.

この定理の証明も結局は κ が有限体のときに帰着し, Deligne による Weil 予想の解決に帰着するのだが, その帰着のさせ方は非自明である.

Remark 4.7. (1) (4.6) は de Jong の予想の重みフィルトレーション版とみなすことができる.

(2) P に関し, 様々な基本的な性質が ([Nakk2]) で示されている.

(3) U が κ 上の滑らかなスキームに埋め込めるとき, コンパクトサポート剛性コホモロジー $H^h_{\text{rig},c}(U/K_0)$ にも重みフィルトレーションが定義されることが [Nakk2] で示されている. その系として, [G] に載っている Serre の予想, および, Grothendieck の予想も正標数の完全体上, 解決することができる.

次に $H^h_{\mathrm{rig}}(U/K_0)$ の傾きフィルトレーションに関する基本的な結果を述べる．Bloch-Illusie の比較定理の simplicial 対数版の定理 ([HK], [Nakk1]) より, 標準同型

$$H^h_{\text{log-crys}}((X_\bullet, D_\bullet)/W) \xrightarrow{\sim} H^h(X_\bullet, W\Omega^\bullet_{X_\bullet}(\log D_\bullet)) \quad (h \in \mathbb{N}) \tag{4.7.1}$$

を得る．ここに, $W\Omega^\bullet_{X_\bullet}(\log D_\bullet)$ は対数的 de Rham-Witt 複体 ([HK]). コホモロジー $H^h(X_\bullet, W\Omega^\bullet_{X_\bullet}(\log D_\bullet))$ には次の傾きスペクトル系列と呼ばれるスペクトル系列が存在する．

$$E_1^{i,h-i} = H^{h-i}(X_\bullet, W\Omega^i_{X_\bullet}(\log D_\bullet)) \Longrightarrow H^h(X_\bullet, W\Omega^\bullet_{X_\bullet}(\log D_\bullet))$$

誘導されるフィルトレーション Fil を傾きフィルトレーションと言う．このスペクトル系列は modulo torsion で E_1 退化する．さらに, 次の傾き分解が成立する．

$$\bigoplus_{i=0}^{h} H^{h-i}(X_\bullet, W\Omega^i_{X_\bullet}(\log D_\bullet)) \otimes_W K_0 = H^h(X_\bullet, W\Omega^\bullet_{X_\bullet}(\log D_\bullet)) \otimes_W K_0.$$

各直和因子 $H^{h-i}(X_\bullet, W\Omega^i_{X_\bullet}(\log D_\bullet)) \otimes_W K_0$ は $(H^h(X_\bullet, W\Omega^\bullet_{X_\bullet}(\log D_\bullet)) \otimes_W K_0)_{[i,i+1)}$ と解釈される．ここに, $[i, i+1)$ は傾き i 以上, $i+1$ より小を表す. 以上まとめて, (4.3.2) を使うことによって,

Theorem 4.8 (傾き分解).

$$H^h_{\mathrm{rig}}(U/K_0) = \bigoplus_{i=0}^{h} H^{h-i}(X_\bullet, W\Omega^i_{X_\bullet}(\log D_\bullet)) \otimes_W K_0 \tag{4.8.1}$$

であり,

$$H^{h-i}(X_\bullet, W\Omega^i_{X_\bullet}(\log D_\bullet)) \otimes_W K_0 = H^h_{\mathrm{rig}}(U/K_0)_{[i,i+1)}. \tag{4.8.2}$$

(4.8) により, $H^h_{\mathrm{rig}}(U/K_0)$ の傾きフィルトレーションの幾何的記述が得られ, 他方で, $H^{h-i}(X_\bullet, W\Omega^i_{X_\bullet}(\log D_\bullet)) \otimes_W K_0$ が U/κ にしか依らないことがわかる． これは de Jong の予想の精密化とも見れる．

ところで, Berthelot-Bloch-Esnault は次の定理を証明した．

Theorem 4.9 ([BBE]). X を κ 上の固有スキームとする．このとき関手的な同型

$$H^h_{\mathrm{rig}}(X/K_0)_{[0,1)} \xrightarrow{\sim} H^h(X, W(\mathcal{O}_X)) \otimes_W K_0 \quad (h \in \mathbb{N}) \tag{4.9.1}$$

が存在する．

(4.8.2) と (4.9.1) を合わせることにより, $W(\mathcal{O}_X)$ modulo torsion の固有降下とも言うべき次の系を得る．

Corollary 4.10. *X を κ 上の固有スキームとし, $X_\bullet$ を X の固有超被覆で, $X_\bullet$ を滑らかとする．このとき関手的な同型*

$$H^h(X, W(\mathcal{O}_X)) \otimes_W K_0 \xrightarrow{\sim} H^h(X_\bullet, W(\mathcal{O}_{X_\bullet})) \otimes_W K_0 \quad (h \in \mathbb{N}) \tag{4.10.1}$$

が存在する．

実は (4.10) の記号の下, 自然な射

$$H^h(X, W(\mathcal{O}_X)) \longrightarrow H^h(X_\bullet, W(\mathcal{O}_{X_\bullet})) \quad (h \in \mathbb{N}) \tag{4.10.2}$$

は一般に同型にならない. (4.10) に得も言われない不思議さを感じるのは筆者だけであろうか？

Remark 4.11. 最近, Langer と Kedlaya の学生（名前を覚えていません, すいません.）は X が滑らかのとき, X の overconvergent de Rham-Witt 複体を定義し, 剛性コホモロジーをその複体の超コホモロジーによって, 解釈したと announce した．この結果より, 傾きが高いときの部分も (4.10) の類似の結果が期待される．

5 Theory of Hodge II

前のセクションで主結果たちとその非常におおまかな証明の方針をのべたが, 実際には, 証明の道のりはかなり長い. 主結果たちの証明は哲学的には, 複素数体上の Hodge-Deligne の [D3], [D4] の理論を手本として, それを p 進的に解釈して証明を遂行する. [D2] に習って, 次の [D3] に対応する表をあげるにとどめて, この論説を終えることにする. このセクションの表は志甫との共同研究である ([NS1], [NS2]).

(X, D) を $\mathbb{C}$ 上の, あるいは, 標数 $p > 0$ の完全体上の滑らかスキームと単純正規交差因子の組とする. U を X 内の D の補開スキーム, $j\colon U \overset{\subset}{\longrightarrow} X$ を自然な開埋め込みとする. $a^{(k)}\colon D^{(k)} \longrightarrow X$ $(k \in \mathbb{N})$ を自然な射とする.

次の表は Grothendieck による代数, 幾何, 解析を統一するプロジェクトを思い出させる ([G]):

(5.0.1)

	$/\mathbb{C}$	crystal
空間, トポア 1	U_{an}, $(X_{\mathrm{an}}, D_{\mathrm{an}})^{\log}$ $\widetilde{(X_{\mathrm{an}}, D_{\mathrm{an}})}_{\mathrm{et}}^{\log}$ ([IKN])	 $(\widetilde{(X, D)/W})^{\log}_{\mathrm{crys}}$, $(\widetilde{(X, D)/W})^{\log}_{\mathrm{conv}}$
空間, トポア 2	X_{an}, $\widetilde{X_{\mathrm{an}}}$	$(\widetilde{X/W})_{\mathrm{crys}}$, $(\widetilde{X/W})_{\mathrm{conv}}$
射 1	$j_{\mathrm{an}} \colon U_{\mathrm{an}} \overset{\subset}{\longrightarrow} X_{\mathrm{an}}$ $\epsilon_{\mathrm{top}} \colon (X_{\mathrm{an}}, D_{\mathrm{an}})^{\log} \longrightarrow X_{\mathrm{an}}$, $\epsilon_{\mathrm{an}} \colon (\widetilde{(X_{\mathrm{an}}, D_{\mathrm{an}})})^{\log}_{\mathrm{et}} \longrightarrow \widetilde{X_{\mathrm{an}}}$	 $\epsilon^{\mathrm{crys}}_{(X,D)/W} \colon (\widetilde{(X, D)/W})^{\log}_{\mathrm{crys}}$ $\longrightarrow (\widetilde{X/W})_{\mathrm{crys}}$, $\epsilon^{\mathrm{conv}}_{(X,D)/W} \colon (\widetilde{(X, D)/W})^{\log}_{\mathrm{conv}}$ $\longrightarrow (\widetilde{X/W})_{\mathrm{conv}}$
射 2	$X_{\mathrm{an}} \longrightarrow X$	$\overline{u}^{\mathrm{crys}}_{X/W} \colon (\widetilde{X/W})_{\mathrm{Rcrys}} \overset{Q_{X/W}}{\longrightarrow} (\widetilde{X/W})_{\mathrm{crys}}$ $\overset{u^{\mathrm{crys}}_{X/W}}{\longrightarrow} \widetilde{X}_{\mathrm{zar}}$ $u^{\mathrm{conv}}_{X/W} \colon (\widetilde{X/W})_{\mathrm{conv}} \longrightarrow \widetilde{X}_{\mathrm{zar}}$
層 1	$\mathbb{Z}_{(X_{\mathrm{an}}, D_{\mathrm{an}})^{\log}}$ $\widehat{\mathbb{Z}}_{(X_{\mathrm{an}}, D_{\mathrm{an}})^{\log}_{\mathrm{an}}}$, $\widehat{\mathbb{Z}}_{\widetilde{(X_{\mathrm{an}}, D_{\mathrm{an}})}^{\log}_{\mathrm{et}}}$ $(n \in \mathbb{Z})$	 $\mathcal{O}_{(X,D)/W} \in (\widetilde{(X, D)/W})^{\log}_{\mathrm{crys}}$
層 $1'$	$\mathbb{Q}_{(X_{\mathrm{an}}, D_{\mathrm{an}})^{\log}}$	$\mathcal{K}_{(X,D)/W} \in (\widetilde{(X, D)/W})^{\log}_{\mathrm{conv}}$
層 2	$\mathbb{Z}_{X_{\mathrm{an}}}$ $\widehat{\mathbb{Z}}_{X_{\mathrm{an}}}$ $\widehat{\mathbb{Z}}_{D^{(k)}_{\mathrm{an}}}$	 $\mathcal{O}_{X/W} \in (\widetilde{X/W})_{\mathrm{crys}}$ $\mathcal{O}_{D^{(k)}/W} \in (\widetilde{D^{(k)}/W})_{\mathrm{crys}}$
層 $2'$	$\mathbb{Q}_{X_{\mathrm{an}}}$ $\mathbb{Q}_{D^{(k)}_{\mathrm{an}}}$	$\mathcal{K}_{X/W} \in (\widetilde{X/W})_{\mathrm{conv}}$ $\mathcal{K}_{D^{(k)}/W} \in (\widetilde{D^{(k)}/W})_{\mathrm{conv}}$
層 3	$Rj_{\mathrm{an}*}(\mathbb{Z}) = R\epsilon_{\mathrm{top}*}(\mathbb{Z})$ ([KN])	$R\epsilon^{\mathrm{crys}}_{(X,D)/W*}(\mathcal{O}_{(X,D)/W})$
層 $3'$	$Rj_{\mathrm{an}*}(\mathbb{Q}) = R\epsilon_{\mathrm{top}*}(\mathbb{Q})$	$R\epsilon^{\mathrm{conv}}_{(X,D)/W*}(\mathcal{K}_{(X,D)/W})$
純粋性	$R^k j_{\mathrm{an}*}(\mathbb{Z}) = R^k \epsilon_{\mathrm{top}*}(\mathbb{Z}) = a^{(k)}_*(\mathbb{Z}_{D^{(k)}_{\mathrm{an}}})(-k)$	$Q^*_{X/W} R^k \epsilon_{(X,D)/W*}(\mathcal{O}_{(X,D)/W})$ $= Q^*_{X/W} a^{(k)}_{\mathrm{crys}*}(\mathcal{O}_{D^{(k)}/W})(-k)$, $R^k \epsilon^{\mathrm{conv}}_{(X,D)/W*}(\mathcal{K}_{(X,D)/W})$ $= a^{(k)}_{\mathrm{conv}*}(\mathcal{K}_{D^{(k)}/W})(-k)$
フィルト レーション 付き de Rham (Zariski, クリスタル) 複体	$(\Omega^{\bullet}_{X_{\mathrm{an}}/\mathbb{C}}(\log D_{\mathrm{an}}), \tau)$ $= (\Omega^{\bullet}_{X_{\mathrm{an}}/\mathbb{C}}(\log D_{\mathrm{an}}), P)$ $(\Omega^{\bullet}_{X/\mathbb{C}}(\log D), P)$	$(C_{\mathrm{Rcrys}}(\mathcal{O}_{(X,D)/W}), \tau)$ $= (C_{\mathrm{Rcrys}}(\mathcal{O}_{(X,D)/W}), P)$, $(C_{\mathrm{conv}}(\mathcal{K}_{(X,D)/W}), \tau)$ $= (C_{\mathrm{conv}}(\mathcal{K}_{(X,D)/W}), P)$ $(C_{\mathrm{zar}}(\mathcal{O}_{(X,D)/W}), P)$, $(C_{\mathrm{isozar}}(\mathcal{K}_{(X,D)/W}), P)$, $(W\Omega^{\bullet}_X(\log D), P)$ [M1], [M2]

記号の説明をする.

まず, 左の列から.

$(X_{\mathrm{an}}, D_{\mathrm{an}})^{\log}$: [KN] で定義された $(X_{\mathrm{an}}, D_{\mathrm{an}})$ の実ブローアップで, ϵ_{top} は [loc. cit.] で τ と記述されている自然な位相空間としての射.

我々の上の τ : [D3] 以来広く使われている標準フィルトレーション.

$((\widetilde{X_{\rm an}, D_{\rm an}}))^{\log}_{\rm et}$: [IKN] で定義された解析的対数エタールトポス.

$\widetilde{X_{\rm an}}$: $X_{\rm an}$ の局所同型によって, 定義されるトポス.

$\epsilon_{\rm an}$: 対数構造を忘れる自然な射.

次に, 右の列から.

$((\widetilde{X, D)/W})^{\log}_{\rm crys}$: 対数クリスタルトポス ([K])

$(\widetilde{X/W})_{\rm crys}$: X/W のクリスタルトポス ([BO1]).

$((\widetilde{X, D)/W})^{\log}_{\rm conv}$: $(X, D)/W$ の対数収束トポス ([S]).

$(\widetilde{X/W})_{\rm conv}$: X/W の収束トポス ([O2]).

$\epsilon^{\rm crys}_{(X,D)/W}$ と $\epsilon^{\rm conv}_{(X,D)/W}$: D から定まる対数構造を忘れる射.

$(\widetilde{X/W})_{\rm Rcrys}$: X/W の制限クリスタルトポス ([B1]).

$Q_{X/W} : (\widetilde{X/W})_{\rm Rcrys} \longrightarrow (\widetilde{X/W})_{\rm crys} : Q^*_{X/W}$ が制限となるトポスの射 ([B1]).

$u^{\rm crys}_{X/W} : (\widetilde{X/W})_{\rm crys} \longrightarrow \widetilde{X}_{\rm zar}$: クリスタルトポスからザリスキトポスへの射影 ([B1], [BO1]).

$u^{\rm conv}_{X/W} : (\widetilde{X/W})_{\rm conv} \longrightarrow \widetilde{X}_{\rm zar}$: 収束トポスからザリスキトポスへの射影 ([O2]).

$\mathcal{O}_{(X,D)/W}$ など: 各トポスでの構造層.

$\mathcal{K}_{(X,D)/W}$ など: (各トポスでの構造層)$\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$.

純粋性については, 微妙な注意を要する. まず, [B1] で指摘されているように, D が滑らか因子のとき, $R^k j_{{\rm crys}*}(\mathcal{O}_{U/W})$ ($k \geq 1$) は消えてしまうので, 開写像 j に対する純粋性は期待できない. そこで, 素朴に $R^k\epsilon_{(X,D)/W*}(\mathcal{O}_{(X,D)/W})$ に対する純粋性は期待したくなるが, $k = 0$ のとき, 一般に, $\mathcal{O}_X \subsetneqq \epsilon_{(X,D)/W*}(\mathcal{O}_{(X,D)/W})$ より, $R^k\epsilon_{(X,D)/W*}(\mathcal{O}_{(X,D)/W})$ に対する純粋性は不成立 (クリスタルは病的性質をもつことがわかる. 悪いことではなく, そういうものである) で, 上の表にあるように制限クリスタルトポス内でやっと, 純粋性が成立する. 但し, 制限クリスタルトポスは, [B1] で指摘されているように関手性が成立しないので, 扱いには慎重さを要する. ところが, トージョンを無視した対数収束トポスの構造層では, 純粋性が成立し, 対数収束トポスの関手性も成立するので, 病的現象が起こらず, 明快である.

$(C_{\rm Rcrys}(\mathcal{O}_{(X,D)/W}), P) \in {\rm D}^+{\rm F}(Q^*_{X/W}(\mathcal{O}_{X/W}))$ の定義を簡単に述べる. (X, D) が ${\rm Spf}(W)$ 上の単純正規交差付き滑らかスキーム $(\mathcal{X}, \mathcal{D})$ への厳密埋め込みを持つときは,

$$\begin{aligned}(C_{\rm Rcrys}(\mathcal{O}_{(X,D)/W}), P) = &(Q^*_{X/W} L_{X/W}(\Omega^\bullet_{\mathcal{X}/W}(\log \mathcal{D})), \\ &\{Q^*_{X/W} L_{X/W}(P_k\Omega^\bullet_{\mathcal{X}/W}(\log \mathcal{D}))\}_{k\in\mathbb{Z}}).\end{aligned}$$

$L_{X/W}$ は $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$-modules に対する線型化関手 ([B1], [BO1, §6]). 上の埋め込みを持たないときは, (X, D) のアファイン被覆を考えて, 局所的に厳密埋め込み (正確には D の既約成分を増やさない厳密埋め込み (admissible immersion と呼ばれる ([NS1])) を作って,

cosimplicial フィルタード複体を下に導来順像で X に落とす (ここで, 制限クリスタルトポスの関手性が不成立なので, いくらかの注意を必要とする).

$(C_{\rm conv}(\mathcal{K}_{(X,D)/W}), P) \in {\rm D}^+{\rm F}(\mathcal{K}_{X/W})$ は $(C_{\rm Rcrys}(\mathcal{O}_{(X,D)/W}), P)$ の収束バージョン.

$f\colon X \longrightarrow {\rm Spf}(W)$ を構造射とする. $(C_{\rm zar}(\mathcal{O}_{(X,D)/W}), P) \in {\rm D}^+{\rm F}(f^{-1}(\mathcal{O}_W))$ は, 上の埋め込みを持つ場合は

$$(C_{\rm zar}(\mathcal{O}_{(X,D)/W}), P) \simeq (\mathcal{O}_{\mathfrak{D}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \Omega^{\bullet}_{\mathcal{X}/W}(\log \mathcal{D}), \{\mathcal{O}_{\mathfrak{D}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} P_k\Omega^{\bullet}_{\mathcal{X}/W}(\log \mathcal{D})\}_{k\in\mathbb{Z}}).$$

ここに, $\mathfrak{D}$ は $({\rm Spf}(W), pW, \text{canonical PD-structure})$ 上の $X \overset{\subset}{\longrightarrow} \mathcal{X}$ の PD-包絡.

$(C_{\rm isozar}(\mathcal{K}_{(X,D)/W}), P)$ は $(C_{\rm zar}(\mathcal{O}_{(X,D)/W}), P)$ の定義で $\mathfrak{D}$ を普遍対数 enlargement に換えて定義される.

$(C_{\rm zar}(\mathcal{O}_{(X,D)/W}), P)$ と Mokrane によるフィルタード de Rham-Witt 複体 ([M1], [M2]) $(W\Omega^{\bullet}_X(\log D), P)$ には次の関係がある.

Theorem 5.1 (比較定理). フィルター付き導来圏 ${\rm D}^+{\rm F}(f^{-1}(W))$ において, 標準同型

$$(C_{\rm zar}(\mathcal{O}_{(X,D)/W}), P) \overset{\sim}{\longrightarrow} (W\Omega^{\bullet}_X(\log D), P)$$

がある.

実は, $(C_{\rm Rcrys}(\mathcal{O}_{(X,D)/W}), P)$, $(C_{\rm zar}(\mathcal{O}_{(X,D)/W}), P)$ は一般の PD-scheme 上定義することが可能で, たとえ, この論説のように, 基礎スキームが Witt 環でも特殊化等の議論で一般の PD-scheme 上での議論が必要となる. (Mokrane によるフィルタード de Rham-Witt 複体は W 上しか構成されていない.) $(C_{\rm conv}(\mathcal{K}_{(X,D)/W}), P)$, $(C_{\rm isozar}(\mathcal{K}_{(X,D)/W}), P)$ も Ogus の意味での p 進形式スキーム ([O1]) 上で定義される. また, 次の比較定理も [NS2] で証明されている.

Theorem 5.2 (比較定理). フィルター付き導来圏 ${\rm D}^+{\rm F}(f^{-1}(K_0))$ において, 標準同型

$$(C_{\rm zar}(\mathcal{O}_{(X,D)/W}), P) \otimes_{\mathbb{W}} K_0 \overset{\sim}{\longrightarrow} (C_{\rm isozar}(\mathcal{K}_{(X,D)/W}), P)$$

がある.

まだまだ, [NS1], [NS2] で得られている結果があるが, この辺で筆をおきたい. 以上, [NS1] の結果を simplicial 版にして, さらに, 都築の固有降下, 志甫の比較同型を使って, 前セクションの結果を得るのだが, 長くなるので, 筆をおく. 興味のある方は [NS1], [Nakk2] を読んでいただけるとたいへんありがたい.

References

[AB] Andreatta, F., Barbieri-Viale, L. *Crystalline realizations of 1-motives.* Math. Ann. 331, (2005), 111-172.

[B1] Berthelot, P. *Cohomologie cristalline des schémas de caractéristique* $p > 0$. Lecture Notes in Math. 407, Springer-Verlag, Berlin-New York, (1974).

[B2] Berthelot, P. *Géométrie rigide et cohomologie des variétés algébriques de caractéristique* p. In: Introductions aux cohomologies p-adiques (Luminy, 1984). Mém. Soc. Math. France 23, (1986), 7–32.

[B3] Berthelot, P. *Finitude et pureté cohomologique en cohomologie rigide, avec un appendice par Aise Johan de Jong.* Invent. Math. 128, (1997), 329–377.

[BBE] Berthelot, P., Bloch S., Esnault, H. *Hodge type over the complex numbers and rational points over finite fields.* Preprint, arXiv:math.AG/0510349v1.

[BO1] Berthelot, P., Ogus, A. *Notes on crystalline cohomology.* Princeton Univ. Press, (1978).

[BO2] Berthelot, P., Ogus, A. *F-isocrystals and de Rham cohomology.* I. Invent. Math. 72, (1983), 159-199.

[CT] Chiarellotto, B., Tsuzuki, N. *Cohomological descent of rigid cohomology for etale coverings.* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 109, (2003), 63–215.

[D1] Deligne, P. *Théorème de Lefschetz et critères de dégénérescence de suites spectrales.* IHÉS Publ. Math. 35, (1968), 107–126.

[D2] Deligne, P. *Théorie de Hodge* I. Actes du Congrès International des Mathématiciens (Nice, 1970), Tome 1, pp. 425–430. Gauthier-Villars, Paris, (1971).

[D3] Deligne, P. *Théorie de Hodge,* II. IHÉS Publ. Math. 40, (1971), 5–57.

[D4] Deligne, P. *Théorie de Hodge,* III. IHÉS Publ. Math. 44, (1974), 5–77.

[D5] Deligne, P. *La conjecture de Weil,* I. IHÉS Publ. Math. 43, (1974), 273–307.

[D6] Deligne, P. *La conjecture de Weil,* II. IHÉS Publ. Math. 52, (1980), 137–252.

[dJ] de Jong, A. J. *Smoothness, semi-stability and alterations.* IHÉS Publ. Math. 83, (1996), 51–93.

[G] Grothendieck, A (辻雄一訳) . **収穫と蒔いた種と (数学と裸の王様)**. 現代数学社, (1990).

[GK] Große-Klönne, E. *Finiteness of de Rham cohomology in rigid analysis.* Duke Math. J. 113, (2002), 57–91.

[HK] Hyodo, O., Kato, K. *Semi-stable reduction and crystalline cohomology with logarithmic poles.* Périodes p-adiques (Bures-sur-Yvette, 1988). Astérisque 223, (1994), 221–268.

[IKN] Illusie, L., Kato, K., Nakayama, C. *Quasi-unipotent logarithmic Riemann-Hilbert correspondences.* J. Math. Sci. Univ. Tokyo 12 (2005), 1–66.

[K] Kato, K. *Logarithmic structures of Fontaine-Illusie.* In: Algebraic analysis, geometry, and number theory, Johns Hopkins Univ. Press, (1989), 191–224.

[KN] Kato, K., Nakayama, C. *Log Betti cohomology, log étale cohomology, and log de Rham cohomology of log schemes over* $\mathbb{C}$. Kodai Math. J. 22, (1999), 161–186.

[M1] Mokrane, A. *La suite spectrale des poids en cohomologie de Hyodo-Kato.* Duke Math. J. 72, (1993), 301–337.

[M2] Mokrane, A. *Cohomologie cristalline des variétés ouvertes.* Rev. Maghrebine Math. 2, (1993), 161–175.

[Nakk1] Nakkajima, Y. *p-adic weight spectral sequences of log varieties.* J. Math. Sci. Univ. Tokyo 12, (2005), 513–661.

[Nakk2] Nakkajima, Y. *Weight filtration and slope filtration on the rigid cohomology of a variety in characteristic* $p > 0$. To appear in Mém. Soc. Math. France.

[NS1] Nakkajima, Y., Shiho, A. *Weight filtrations on log crystalline cohomologies of families of open smooth varieties in characteristic* $p > 0$. To appear in Springer Lecture Notes in Math.

[NS2] Nakkajima, Y., Shiho, A. *Weight-filtered convergent complex.* Preprint.

[O1] Ogus, A. *F-isocrystals and de Rham cohomology.* II. *Convergent isocrystals.* Duke Math. J. 51, (1984), 765–850.

[O2] Ogus, A. *The convergent topos in characteristic* p. The Grothendieck Festschrift, Vol. III, Progr. Math. 88, Birkhäuser, (1990), 133–162.

[S] Shiho, A. *Crystalline fundamental groups* II*–Log convergent cohomology and rigid cohomology.* J. Math. Sci. Univ. Tokyo 9, (2002), 1–163.

[T] Tsuzuki, N. *Cohomological descent of rigid cohomology for proper coverings.* Invent. Math. 151, (2003), 101–133.